Université Claude Bernard | Mathématiques
L3 Topologie et Théorie de la Mesure | 2023-2024

Feuille d'exercices numéro 6

Classes monotones et mesurabilité

Exercice 1 Si $\Omega = \{1, 2, 3\}$ trouver la tribu et la classe monotone engendrées par $\mathcal{E} = \{\{1\}\}$.
(cf TD.)
ou Correction de 2021-2022 exercice 9.1
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille3-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 2 Soit $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{E} = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2. Montrer que $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{M}(\mathcal{E})$.

1. (cf. TD)
2. Montrons que $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{M}(\mathcal{E})$.
   D'abord, $\emptyset$ appartient toujours à la tribu engendrée et aussi à la classe monotone engendrée car $\Omega \subset \Omega$, donc $\Omega \setminus \Omega = \emptyset \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Conclusion, on a
   $$\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E} \cup \{\emptyset\}) = \mathcal{M}(\mathcal{E} \cup \{\emptyset\}) = \mathcal{M}(\mathcal{E}),$$
   où l'égalité du milieu vient du lemme de classe monotone car $\mathcal{E} \cup \{\emptyset\}$ est stable par intersection finie (contrairement à $\mathcal{E}$).

Exercice 3
(cf. TD)

Exercice 4
(cf. TD)

Théorèmes de Fubini et mesures produits

Exercice 5 Soit $f \geq 0$ une fonction mesurable positive μ une mesure σ-finie sur $(\Omega, \mathcal{T})$, montrer que pour $p \in]0, \infty[$:
$$\int f^p d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(\{\omega : f(\omega) > t\})dt.$$

(cf TD)
ou Correction de 2021-2022 exercice 6
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 6
(cf TD)
ou Correction de 2021-2022 exercice 7

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 7 (cf TD)

ou Correction de 2021-2022 exercice 8

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 8

Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on pose

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrons que les intégrales itérées de f existent et sont égales.
   f est continue en dehors de $(0, 0)$ et vu que $f(x, 0) = f(0, y) = 0$, on a $y \mapsto f(x_0, y)$ et $x \mapsto f(x, y_0)$ sont continues pour chaque x_0, y_0 fixés, donc boréliennes, on a donc la mesurabilité requise pour parler des intégrales itérées.
   Soit $y \neq 0$, on a $|f(x, y)| \leq 1/y^2$, ce qui est une domination par une constante intégrable pour la mesure de Lebesgue sur un intervalle borné $[-1, 1]$ donc $\int_{-1}^{1} f(x, y)dx$ est bien définie. De plus par imparité (ou changement de variable $z = -x$, on obtient : $\int_{-1}^{1} f(x, y)dx = 0$ pour tout $y \neq 0$. Comme $f(x, 0) = 0$, cela est aussi valable pour $y = 0$. La fonction $y \mapsto \int_{-1}^{1} f(x, y)dx = 0$ est continue et manifestement intégrable et on obtient :
   $$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} 0dy = 0.$$
   En intervertissant x et y dans l'argument (vu $f(x, y) = f(y, x)$, on voit que
   $$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dydx = \int_{-1}^{1} 0dx = 0.$$
   La conclusion du théorème de Fubini s'applique donc, bien qu'on va maintenant voir que ce théorème ne s'applique pas.
2. Montrons que la fonction f n'est PAS λ_2-intégrable sur $[-1, 1]^2$. Pour cela on va minorer son intégrale par celle sur $D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq 1, x \neq 0\}$ (car si on s'attend à une valeur infini, et que le problème soit en $(0, 0)$, autant prendre un domaine facile pour les coordonnées polaires et autant éviter $x = 0$ ou $y = 0$ pour faciliter la continuité) par changement de variable en polaire. Comme les fonctions sont positives, il suffit de vérifier qu'elles sont mesurables pour appliquer le changement de variable, mais f est continue sur D comme fraction rationnelle à dénominateur non nul. On obtient :
   $$\int_{[-1,1]^2} |f(x,y)|d\lambda_2(x,y) \geq \int_D |f(x,y)|d\lambda_2(x,y) = \int_0^1 dr \int_{]0,2\pi[-\{\pi\}} \frac{r^2}{r^4}|\cos(\theta)\sin(\theta)|d\theta$$
   $$= \int_{]0,2\pi[} |\cos(\theta)\sin(\theta)|d\theta \int_0^1 dr\frac{1}{r^2} = +\infty.$$
   En effet, par les intégrales de Riemann, $\frac{1}{r^2}$ n'est pas intégrable en 0, et peu importe la valeur de l'intégrale en θ, elle est strictement positive par intégrale d'une fonction positive non-nulle (continue donc non λ-p.p. nulle) sur un ensemble de mesure non-nulle (la longueur 2π de l'intervalle).

Exercice 9

(cf. TD)

Exercice 10

ou Correction de 2021-2022 exercice 12

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 11 (cf. TD)

Changements de variables

Exercice 12 Soit $D = B((0,1),1)$ dans le plan. Calculer $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$.

cf. TD ou Correction de 2021-2022 exercice 14

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 13 Soit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2+y^2) < 9\}$. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/3}}\,dxdy$ est convergente et donner sa valeur.

On passe en coordonnées polaires (dans le cas positif pour une fonction continue sur $B-[0,+\infty]\times\{0\}$ donc mesurable) en remarquant que, vu que $\lambda_2([0,+\infty]\times\{0\}) = 0$, on a

$$\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/3}}\,dxdy = \iint_{B-[0,+\infty]\times\{0\}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/3}}\,dxdy = 2\pi\int_0^9 \frac{1}{r^{1/3}}\,dr = 2\pi[\frac{3r^{2/3}}{2}]_0^9 = 3(9)^{2/3} = 3^{7/3}$$

par le cas convergent des intégrales de Riemann.

Exercice 14

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2+y^2)^2 < xy\}$. Calculons $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} 1_D(x,y)\sqrt{xy}\,d\lambda_2(x,y)$ qui est l'intégrale d'une fonction positive. On remarque $D = D_+ \cup D_-$ avec $D_\pm = \{(x,y) \in D : \pm x > 0\}$. De plus avec le changement de variable $(x',y') = (-x,-y)$, il est facile de voir

$$\iint_{\mathbb{R}^2} 1_{D_+}(x,y)\sqrt{xy}\,d\lambda_2(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2} 1_{D_-}(x,y)\sqrt{xy}\,d\lambda_2(x,y)$$

On a aussi une symétrie, donc par changement de variable $(x',y') = (y,x)$, on obtient pour $C = D \cap B, B = \{(x,y) \in D : y > x > 0\}$ que

$$I = \iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} 1_D(x,y)\sqrt{xy}\,d\lambda_2(x,y) = 4\iint_{\mathbb{R}^2} 1_C(x,y)\sqrt{xy}\,d\lambda_2(x,y).$$

On pose $\phi(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)$ et si $(z,t) = (x^2+y^2, 2xy)$ on a $z-t = (y-x)^2, z+t = (x+y)^2$, donc on a $\phi : B \to E = \{(z,t) : z-t > 0, t > 0\}$, et on déduit que $y - x = \sqrt{z-t}, x+y = \sqrt{z+t}$ (vu $y - x > 0$ sur C) d'où l'unique $(x,y) \in C$ vérifiant cela est donné par

$$\psi(z,t) = \Big(\frac{\sqrt{z+t}-\sqrt{z-t}}{2}, \frac{\sqrt{z+t}+\sqrt{z-t}}{2}\Big)$$

Ceci montre que ϕ est bijective d'inverse $\psi : E \to B$.

De plus, ϕ est clairement C^∞ (car polynomiale), on calcule son jacobien :

$$J\phi(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

d'où $\det(J\phi(x,y)) = 4x^2 - 4y^2 < 0$ sur C (donc non-nulle ce qui implique que $J\phi(x,y)$ est un isomorphisme linéaire pour tout $(x,y) \in C$). Par le théorème d'inversion globale, ϕ est donc un C^∞-difféomorphisme et on déduit que $\det(J\psi(z,t)) = \dfrac{1}{4(\psi_1(z,t)^2 - \psi_2(z,t)^2)} = \dfrac{-1}{4(\sqrt{z+t}\sqrt{z-t})}$. On peut donc appliquer le théorème de changement de variable :

$$I = 4\iint_B 1_D(x,y)\sqrt{xy}\,d\lambda_2(x,y) = \iint_E 1_D \circ \psi(z,t)\sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{z^2-t^2})}\,d\lambda_2(z,t).$$

Cela suggère un autre changement de variable(polaire hyperbolique) : $z = r\mathrm{ch}(\theta), t = r\mathrm{sh}(\theta)$, de sorte que $z^2 - t^2 = r^2$. On pose donc $\varphi(r,\theta) = (r\mathrm{ch}(\theta), r\mathrm{sh}(\theta)$ qui définit $\varphi :]0,+\infty[^2 \to E = \{(z,t) : z > t > 0\}$ et $z = r\mathrm{ch}(\theta), t = r\mathrm{sh}(\theta)$, se résoud en $r = \sqrt{z^2-t^2}, \theta = \mathrm{argsh}\left(\frac{t}{r}\right)$ vu que le sinus hyperbolique est strictement croissant bijectif. Cela montre donc que φ est bijective.

De plus, φ est clairement C^∞ (par produit et sommes de projections et d'exponentielles), on calcule son jacobien :

$$J\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\theta) & r\mathrm{sh}(\theta) \\ \mathrm{sh}(\theta) & r\mathrm{ch}(\theta) \end{pmatrix}$$

donc $\det(J\varphi(x,y)) = r\mathrm{ch}^2(\theta) - r\mathrm{sh}^2(\theta) = r > 0$ sur son domaine, donc par par théorème d'inversion globale, φ est un C^∞-difféomorphisme. Le cas positif du changment de variable donne donc :

$$I = \iint_E 1_{[0,t]}(z^2)\sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{z^2-t^2})}\,d\lambda_2(z,t) = \iint_{]0,+\infty[^2} 1_{[0,r\mathrm{sh}(\theta)]}(r^2\mathrm{ch}(\theta)^2)\sqrt{r\mathrm{sh}(\theta)}\frac{1}{\sqrt{2}r}\,r d\lambda_2(r,\theta)$$

Maintenant $1_{[0,r\mathrm{sh}(\theta)]}(r^2\mathrm{ch}(\theta)^2) = 1$ pour $r\mathrm{ch}(\theta)^2 \leq \mathrm{sh}(\theta)$ soit $r \leq \frac{\mathrm{sh}(\theta)}{\mathrm{ch}(\theta)^2}$. En appliquant le théorème de Fubuni-Tonelli au produit d'une fonction continue positive et d'une indicatrice d'ensemble mesurable, on obtient :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{]0,+\infty[} d\theta\sqrt{\mathrm{sh}(\theta)}\int_0^{\frac{\mathrm{sh}(\theta)}{\mathrm{ch}(\theta)^2}} \sqrt{r}dr = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_{]0,+\infty[} d\theta\sqrt{\mathrm{sh}(\theta)}\Big(\frac{\mathrm{sh}(\theta)}{\mathrm{ch}(\theta)^2}\Big)^{3/2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{sh}(\theta)^2}{\mathrm{ch}(\theta)^4}\mathrm{ch}(\theta)d\theta$$

Par dernier changement de variable $x = \mathrm{sh}(\theta)$, $dx = \mathrm{ch}(\theta)d\theta$ on obtient (vu $\mathrm{ch}(\theta)^2 = 1 + \mathrm{sh}(\theta)^2$)

$$I = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

Par ailleurs, avec $y = 1/x, dx = -dy/y^2$, on obtient :

$$I = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+1/x^2)^2}\frac{dx}{x^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+y)^2}dy$$

donc en combinant à la précédente égalité : $\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+y)^2}dy = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)}dx$ soit :

$$I = \frac{1}{3\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+y)^2}dy = \frac{1}{3\sqrt{2}}[-\frac{1}{1+y}]_0^{+\infty} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Exercice 15 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 - 2x < 0, x^2 - 2y < 0\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\, dx\, dy.$

On définit $(x,y) = \phi(u,v) = (u^2v, uv^2)$. $\phi :]0,+\infty[^2 \to]0,+\infty[^2$ est polynomiale donc C^∞. $x = u^2v, y = uv^2$ implique $y^2/x = u^2v^4/(u^2v) = v^3, u^3 = x^2/y$ donc, comme le cube est une bijection, on obtient l'unique solution :

$$(u,v) = \left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}, \sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}\right)$$

on voit facilement que c'est bien une solution donc ϕ est bijective. De plus

$$J\phi(u,v) = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix}$$

d'où $\det(J\phi(u,v)) = 4u^2v^2 - u^2v^2 = 3u^2v^2 > 0$ d'où $d\phi(u,v)$ est un isomorphisme linéaire et le théorème d'inversion globale s'applique montrant que ϕ est un C^∞-difféomorphisme.

On peut donc appliquer le théorème de changement de variable dans le cas positif à $(x,y) \mapsto 1_D(x,y)e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}$ (produit de continue donc borélienne, et d'une indicatrice d'ouvert) :

$$\begin{aligned} I = \int_{]0,+\infty[^2} 1_D(x,y)e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\, d\lambda_2(x,y) &= \int_{]0,+\infty[^2} 1_D(\phi(u,v))e^{\frac{(u^2v)^3+(uv^2)^3}{u^3v^3}} \det(J\phi(u,v))\, d\lambda_2(u,v) \\ &= \int_{]0,+\infty[} du \int_{]0,+\infty[} dv 1_{]0,\sqrt[3]{2}[}(u)1_{]0,\sqrt[3]{2}[}(v)e^{u^3+v^3}3u^2v^2 \end{aligned}$$

avec la dernière égalité utilisant aussi Fubini-Tonelli et $1_D(\phi(u,v)) = 1_{]0,\sqrt[3]{2}[}(u)1_{]0,\sqrt[3]{2}[}(v)$ car les deux vallent 1 si et seulement si $u^2v^4 < 2u^2v, v^2u^4 < 2v^2u$ soit $v^3 < 2, u^3 < 2$. Bilan, on obtient donc

$$I = 3\left(\int_{]0,+\infty[} dv 1_{]0,\sqrt[3]{2}[}(v)e^{v^3}v^2\right)^2 = 3\left(\left[\frac{e^{v^3}}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{2}}\right)^2 = \frac{(e^2-1)^2}{3}.$$

Exercice 16 cf Correction de 2021-2022 exercice 16

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 17 Calculer l'intégrale $\displaystyle\iiint_D \frac{z}{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$

où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < x^2+y^2 < z^2 < 4\}$. Comme z, n'est pas positif, on doit montrer l'intégrabilité, ce pourquoi on considère d'abord l'intégrale avec $|z|$ à la place de z.

On passe juste en coordonnées polaires sur $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ (avec le z inchangé, on parle parfois de coordonnées cylindriques). Comme $1_D(x,y,z)\frac{z}{x^2+y^2}$ est borélienne comme produit d'une fraction rationnelle à dénominateur non nulle (donc une fonction continue) et d'une indicatrice d'ensemble ouvert. On obtient (en utilisant aussi que $[0,+\infty[\times\{0\}^2$ est de mesure nulle pour λ_3)

$$J = \iiint_{\mathbb{R}^3 - [0,+\infty[\times\{0\}^2} 1_D(x,y,z)\frac{|z|}{x^2+y^2}\, d\lambda_3(x,y,z) = \iiint_{]0,2\pi[\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}} \frac{|z|}{r^2} r 1_D(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) d\lambda_3(\theta, r$$

Or $1_D(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) = 1$ si et seulement si $1 < r^2 < z^2 < 4$ si et seulement si $1_{]1,|z|[}(r)1_{]1,2[}(|z|) = 1$ d'où, en utilisant aussi Fubini-Tonelli pour passer à des intégrales simples :

$$J = 2\pi \int_{\mathbb{R}} dz 1_{]1,2[}(|z|)|z| \int_{]0,+\infty[} dr \frac{1}{r} 1_{]1,|z|[}(r) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} dz 1_{]1,2[}(|z|)|z|[\ln(r)]_1^{|z|} = 4\pi \int_1^2 dz z\ln(z).$$

où on a utilisé que l'intégrale sur $|z| \in]1,2[$ revient à 2 fois l'intégrale sur $]1,2[$. Sans même calculer l'intégrale, en remarquant juste que la fonction est continue bornée par $2\ln(2)$, on obitnet $J \leq 8\pi\ln(2) < +\infty$. La fonction de départ est donc intégrable. On pourrait reprendre le même calcul, mais vu la remarque sur la symétrie du domaine de z, il vaut mieux utiliser un argument d'imparité. On fait donc le changement de variable $t = -z$ dans le cas intégrable (de déterminant du jacobien -1 et on obtient :

$$I = \iiint_D \frac{z}{x^2+y^2} dx\, dy\, dz = \iiint_D \frac{-t}{x^2+y^2} dx\, dy\, dt = -I = 0.$$

Exercice 18 Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < z < x^2+y^2 < 1\}$.

Justifier que l'intégrale $I = \iiint_D \ln(x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$ est convergente et donner sa valeur.

Comme $\ln(x^2+y^2)$ négatif sur D, on va calculer avec une valeur absolue, mais l'intégrale voulue sera juste l'opposée. On fait le même changement de variable en cylindrique qu'à l'exercice précédent (toujours appiqué au produit d'une fonction continue et d'une indicatrice d'ouvert, donc une fonction borélienne) en remarquant que $1_D(x,y,z) = 1_{]0,r[}(z)1_{]0,1[}(r)$ puis en appliquant Fubini-Tonelli pour passer à des intégrales simples :

$$\begin{aligned} -I &= \int_{\mathbb{R}^3-[0,+\infty[\times\{0\}^2} 1_D(x,y,z)|\ln(x^2+y^2)|\, d\lambda_3(x,y,z) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dr\ r 1_{]0,1[}(r) 2|\ln(r)| \int_0^{+\infty} dz 1_{]0,r[}(z) \\ &= 4\pi \int_0^1 dr\ r^2|\ln(r)| = 4\pi \int_0^{+\infty} du\ e^{-3u}u = 4\pi\Big[-\frac{e^{-3u}u}{3} - \frac{e^{-3u}}{9}\Big]_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{9} \end{aligned}$$

où la dernière ligne vient d'un changement de variable $u = -\ln(r)$ d'où $du = \frac{dr}{r}$. On en déduit que I est convergente et vaut $I = -\frac{4\pi}{9}$.

Exercices plus difficiles.

Exercice 19 Ensemble triadique de Cantor et escalier du diable Soit $\Omega = [0,1]$, muni de la restriction de la mesure de Lebesgue λ à $\mathcal{B}([0,1])$.

Si $I = [a,b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, on note $\widetilde{I} = \left[a, \dfrac{2a+b}{3}\right] \cup \left[\dfrac{a+2b}{3}, b\right] \subset I$ l'union d'intervalles obtenu en retirant de I l'intervalle ouvert qui a le même centre que I et dont la longueur est un tiers de celle de I.

On définit par récurrence une suite d'ensembles $C_n \subset [0,1]$ (tous union finie d'intervalle fermés) et de fonctions croissantes linéaires par morceau $F_n : [0,1] \to [0,1]$ par

— $C_0 = [0,1]$ et $F_0(x) = x$.

— Si C_n s'écrit comme une union finie d'intervalles fermés deux à deux disjoints : $C_n = \displaystyle\bigcup_{m=1}^{N} I_m$ avec $I_m = [a_m, b_m]$ alors C_{n+1} est défini comme $C_{n+1} = \displaystyle\bigcup_{m=1}^{N} \widetilde{I_m}$ et

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} F_n(x) & \text{si} \quad x \notin C_n \\ \frac{F_n(a_m)+F_n(b_m)}{2} & \text{si} \quad x \in I_m - \widetilde{I_m} = \left]\frac{2a_m+b_m}{3}, \frac{a_m+2b_m}{3}\right[, \\ F_n(a_m) + (F_n(b_m) - F_n(a_m))\frac{3(x-a_m)}{2(b_m-a_m)} & \text{si} \quad x \in [a_m, \frac{2a_m+b_m}{3}], \\ F_n(b_m) - (F_n(b_m) - F_n(a_m))\frac{3(b_m-x)}{2(b_m-a_m)} & \text{si} \quad x \in [\frac{a_m+2b_m}{3}, b_m]. \end{cases}$$

1. Montrer que C_n est compact et vérifie $C_{n+1} \subset C_n$.
Solution :
Par récurrence, on initialise à C_0 compact. Par construction, $\widetilde{I} \subset I$, donc $C_{n+1} = \displaystyle\bigcup_{m=1}^{N} \widetilde{I_m} \subset \bigcup_{m=1}^{N} I_m = C_n$. Enfin, chaque $\widetilde{I_m}$ est une union de 2 intervalles fermés donc C_{n+1} est une union de $2N$ intervalles fermés, donc un fermé, du compact C_0, donc lui-même un compact.

2. On pose $U_n = [0,1] - C_n$. Montrer que C_n est une union de 2^n intervalles compacts deux à deux disjoints et U_n est union de $2^n - 1$ intervalles ouverts deux à deux disjoints. Est-ce que C_n est borélien ?
Solution : On montre cela par induction sur n. Pour $n = 0$, U_0 est vide donc l'union de 0 intervalle disjoint, et $C_0 = [0,1]$ est un intervalle.
Si le résultat est montré au rang n, on a $C_n = \displaystyle\bigcup_{m=1}^{N} I_m$ est l'union de $N = 2^n$ intervalles compacts dijoint. Alors les $\widetilde{I_m}$ sont disjoints, et chacun l'union de 2 intervalles compacts disjoints, leur union est union de $2.2^n = 2^{n+1}$ intervalles compacts disjoints. Enfin, $U_{n+1} = U_n \cup \bigcup_{m=1}^{N} I_m - \widetilde{I_m}$ et $I_m - \widetilde{I_m}$ est un intervalle ouvert, disjoints entre eux et de U_n donc U_{n+1} s'écrit comme l'union de $N + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$ intervalles ouverts disjoints, CQFD.
De plus C_n étant un fermé est bien un borélien.

3. Calculer $\lambda(C_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. **Solution :** De nouveau par récurrence, on obtient une formule $\lambda(C_0) = 1$ et par additivité de la mesure de Lebesgue :

$$\lambda(C_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N} \lambda(\widetilde{I_m}) = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{N} \lambda(I_m) = \frac{2}{3}\lambda(C_n) = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}.$$

4. Posons $C = \bigcap_{n\geq 0} C_n$. Montrer que C est non vide et calculer $\lambda(C)$. C s'appelle *ensemble triadique de Cantor.*

   Solution : Par intersection décroissante, on a $\lambda(C) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) = 0$. De plus, on a par une récurrence immediate $0 \in C_n$ vu que $\widetilde{I}$ contient toujours le minimum de I, donc $0 \in C$ qui est non-vide.

5. Montrer que la formule $\phi(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{21_A(n)}{3^{n+1}}$ définit une fonction injective $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to C$. En déduire que C est non-dénombrable.

   Solution : Posons $\phi_N(a) = \sum_{n=0}^{N} \frac{21_A(n)}{3^{n+1}}$.

   Tout d'abord l'injectivité de ϕ est facile car on montre par récurrence sur n que pour $1_A(n)$ se retrouve comme un digit du développement en base 3, précisément, en formule,

   $$1_A(n) = \left\lfloor \frac{3^{n+1}}{2}(\phi(A) - \phi_{n-1}(A)) \right\rfloor$$

   vu que $\phi(A) - \phi_{n-1}(A) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{21_A(k)}{3^{k+1}}$ et que $\frac{3^{n+1}}{2}(\phi(A) - \phi_{n-1}(A)) = 1_A(n) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{21_A(k+n)}{3^k}$ de sorte que la somme est dans $[0, 1/2]$. Donc par recurrence on voit que $1_A(n)$ est déterminée par $\phi(A)$ donc toutes ses valeurs de 1_A le sont, et donc A est déterminée (donc en particuler $\phi(A) = \phi(B)$ implique $1_A = 1_B$ soit $A = B$).

   On montre par réccurence sur n que $\phi(A) \in C_n$ et aussi $\phi_k(A) \in C_n$ pour $k \geq n$. Le cas $n = 0$ est évident car la série est à termes positifs, bornée par $\phi(A) \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-1/3} = 1$ en utilisant la série géométrique. Donc $\phi(A) \in [0, 1]$. On montre de même $\phi_k(A) \in [0, 1]$.

   Par l'hypothèse de récurrence, au rang n, on sait que $\phi_{n-1}(A) \in C_{n-1}$ et **A finir**

6. Montrer que F_n est croissante pour tout n.*

   Solution : On le voit la réccurence en montrant en même temps qu'elle est continue. C'est évident pour F_0. Au rang $n + 1$, l'expression par morceau montre que F_{n+1} est croissante sur chaque intervalle de définition (pente positive du coefficient directeur des fonctions affines), y compris sur chaque intervalle de U_n vu qu'on sait déjà que F_n est croissante. En voyant les limites à droite et à gauche, la continuité sur les $[a_m, b_m]$ est facile, et la continuité en a_m, b_m vient de celle de F_n en dehors du segment, et des limites respectives $F_n(a_m), F_n(b_m)$ des formules affines. Comme on a vu la continuité, la croissance se déduit de celle sur chaque intervalle fermé des C_n et de $\overline{U_n}$ ce qu'on vient de vérifier et ce qui conclut.

7. Montrer que F_n est lipschitzienne de constante $K_n \leq \frac{3^n}{2^n}$ et que pour tout $x \in [0, 1]$,

   $$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq \frac{1}{3.2^{n+1}}$$

   En déduire que F_n converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction continue F.

   Solution : De nouveau, on montre F_n lipschitzienne par récurrence sur n. F_0 est clairement 1-Lipchitz.

En supposant montrer le rang n, il suffit de montrer que $|F_{n+1}(x) - F_{n+1}(y)| \leq K_{n+1}|x-y|$ sur chaque intervalle de définition. EN effet si on connait sur $[x,c]$ et $[c,y]$, on obtient

$$|F_{n+1}(x)-F_{n+1}(y)| \leq |F_{n+1}(x)-F_{n+1}(c)|+|F_{n+1}(c)-F_{n+1}(y)| \leq K_{n+1}|x-c|+K_{n+1}|c-y| = K_{n+1}|x-y|,$$

et on rassemble ainsi les inégalités sur des unions d'intervalles.
Donc on obtient

$$K_{n+1} = \max(K_n, 0, (F_n(b_m) - F_n(a_n))\frac{3}{2(b_m - a_m)}\Big) \leq \max(K_n, \frac{3}{2}K_n) \leq \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}$$

Ensuite, on montre la borne sur $F_{n+1} - F_n$ au cas par cas selon les cas de définition de F_{n+1} ainsi en se basant sur le fait que sur $I_m = [a_m, b_m]$, F_n est linéaire donc $F_n(x) = F_n(a_m) + \frac{(x-a_m)}{b_m-a_m}(F_n(b_m) - F_n(a_m))$:

$$F_{n+1}(x)-F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin C_n \\ \Big(\frac{1}{2} - \frac{(x-a_m)}{b_m-a_m}\Big)(F_n(b_m) - F_n(a_m)) & \text{si} \quad x \in I_m - \widetilde{I_m} = \Big]\frac{2a_m+b_m}{3}, \frac{a_m+2b_m}{3}\Big[, \\ (F_n(b_m) - F_n(a_m))\frac{(x-a_m)}{2(b_m-a_m)} & \text{si} \quad x \in [a_m, \frac{2a_m+b_m}{3}], \\ \Big(-\frac{1}{2} + \frac{(x-a_m)}{2(b_m-a_m)}\Big)(F_n(b_m) - F_n(a_m)) & \text{si} \quad x \in [\frac{a_m+2b_m}{3}, b_m]. \end{cases}$$

En utilisant la borne de Lipschitz déjà obtenu, on obtient donc (vu que la longueur des intervalle de C_n est constante, on obtient en divisant la longueur totale du 3 par le nombre d'intervalle du 2 : $(b_m - a_m) = \lambda(C_n)\frac{1}{2^n} = \frac{1}{3^n}$

$$|F_{n+1}(x)-F_n(x)| \leq \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin C_n \\ \Big|x - \frac{(a_m+b_m)}{2}\Big|K_n \leq \frac{3^n}{6.2^n}(b_m - a_m) \leq \frac{1}{6.2^n} & \text{si} \quad x \in I_m - \widetilde{I_m} = \Big]\frac{2a_m+b_m}{3}, \frac{a_m+2b_m}{3}\Big[\\ \Big|\frac{(x-a_m)}{2}\Big|K_n \leq \frac{3^n}{3.2^n}(b_m - a_m) \leq \frac{1}{6.2^n} & \text{si} \quad x \in [a_m, \frac{2a_m+b_m}{3}] \\ \Big|\frac{(x-b_m)}{2}\Big|K_n \leq \frac{3^n}{3.2^n}(b_m - a_m) \leq \frac{1}{6.2^n} & \text{si} \quad x \in [\frac{a_m+2b_m}{3}, b_m] \end{cases}$$

Ceci donne dans tous les cas la borne annoncée. ON en déduit donc que $\sum_n ||F_{n+1} - F_n||_\infty$ converge, donc al série télescopique $\sum_n(F_{n+1}-F_n)$ converge normalement donc uniformément. En particulier, aussi la suite F_n de fonctions continues, converge uniformément, donc sa limite F est continue.

8. Montrer que $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.
   Solution : C'est évident car pour tout n : $F_n(0) = 0$ et $F_n(1) = 1$.
9. Posons $U = [0,1] - C$. Si $I \subset U$ est un intervalle ouvert, montrer que F est constante sur I.
   Solution : C'est facile, car $U = \cup_n U_n$ et F_n est constante sur chaque intervalle de U_n, puis F_m pour $m \geq n$ n'est pas modifiée, donc $F = F_n$ sur U_n est donc aussi constante sur chaque intervalle de U_n. En prenant l'union, on en déduit que F est constante sur les intervalles de U.
10. En déduire que F est dérivable sur U, n'est pas constante, mais que $F'(x) = 0$ pour λ-presque tout $x \in [0,1]$. F s'appelle *escalier du diable de Cantor.*
    Solution : Une fonction constante est dérivable de dérivée nulle, donc c'esst le cas de F sur chaque intervalle ouvert de U, donc F est dérivable sur U de dérivée nulle. Or $\lambda(U) = 1 - \lambda(C) = 1$, donc c'est le cas pour λ-presque tout $x \in [0,1]$. Enfin, vu $F(0) < F(1)$, F n'est pas constante!

Exercice 20 Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\{x\} \in \mathcal{T}$ pour tous $x \in \Omega$. On dit que μ est *continue* si $\mu(\{x\}) = 0\}$ pour tout $x \in \Omega$ et on dit que μ est *discrète* s'il existe un ensemble D au plus dénombrable tel que $\mu(D^c) = 0$.

1. Montrer que l'équivalence des conditions suivantes :
   (a) μ est continue ;
   (b) si A est une partie au plus dénombrable de Ω alors $\mu(A) = 0$;
   (c) toute partie au plus dénombrable A de Ω est μ-négligeable.

   Solution :
   μ est continue dit que $\{x\}$ est négligeable, mais une union au plus dénombrable d'ensemble négligeable l'est encore d'où (a) implique (c). (c) implique (b) est claire vu que A est union au plus dénombrable de singleton, donc dans $\mathcal{T}$ et par (c) A est négligeable donc $A \subset B$ avec $\mu(B) = 0$ ce qui implique $\mu(A) = 0$.
   Enfin, (b) implique (a) car $\{x\}$ est (fini donc) au plus dénombrable, on déduit de (b) $\mu(\{x\}) = 0$.

2. Montrer que μ est discrète si et seulement s'il existe une suite (a_n) de points de Ω et une suite $(c_n) \subset [0, +\infty]$ telles que $\mu = \sum_n c_n \delta_{a_n}$.

   Solution : $\Rightarrow$ On prend $D = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ ou $D = \{a_n, n \in [\![0, N]\!]\}$ pour une certaine suite (a_n) tel que $\mu(D^c) = 0$ par définition de μ discrète (les deux cas correspondent à D fini ou dénombrable).
   On pose $c_n = \mu(\{a_n\})$ et montrons que $\mu = \sum_n c_n \delta_{a_n}$. Il suffit de voir que pour $A \in$ Tr les deux mesures coïcident sur A (vu que $A \cap D = \cup_{n:a_n \in A}\{a_n\}$) :

   $$\mu(A) = \mu(A \cap D) + \mu(A \cap D^c) = \mu(A \cap D) = \sum_{n:a_n \in A} \mu(\{a_n\}) = \sum_{n:a_n \in A} c_n \delta_{a_n}(\{a_n\}) = \sum_{n:a_n \in A} c_n \delta_{a_n}(A)$$

   Enfin, $\delta_{a_n}(A) = 0$ si $a_n \notin A$, donc on peut retirer la condition sur la somme et obtenir :

   $$\mu(A) = \sum_n c_n \delta_{a_n}(A) = \Big(\sum_n c_n \delta_{a_n}\Big)(A).$$

   $\Leftarrow$ la réciproque est évidente car si $\mu = \sum_{n \in I} c_n \delta_{a_n}$ $D = \{a_n : n \in I\}$ alors,

   $$\mu(D^c) = \sum_{n \in I} c_n \delta_{a_n}(D^c) = \sum_{n \in I} c_n 0 = 0$$

   vu que $a_n \in D$ donc $\delta_{a_n}(D^c) = 0$.

3. Décrire les espaces mesurés avec μ à la fois discrète et continue.

   Solution : La seule mesure est la mesure nulle $\mu = 0$. car si μ est discrète, on vient de voir que $\mu = \sum_n \mu(\{a_n\})\delta_{a_n}$, mais $\mu(\{a_n\}) = 0$ pour une mesure continue, d'où le résultat.

4. $(\star)$ Supposons maintenant que μ est σ-finie. Montrer que μ s'écrit de façon unique $\mu = \mu_c + \mu_d$, où μ_c est une mesure continue et μ_d est une mesure discrète.

   Solution : Unicité Si $\mu_c + \mu_d = \nu_c + \nu_d$ sont deux décompositions, alors on a $\mu_c - \nu_c = \nu_d - \mu_d$ comme pour tout singleton $\{a\}$ on a $\mu_c(\{a\}) - \nu_c(\{a\}) = 0 - 0$, on déduit que $\nu_d(\{a\}) = \mu_d(\{a\})$. Par la formule du 2, on trouve que $\nu_d = \mu_d$. et donc $\mu_c - \nu_c = 0$ soit $\mu_c = \nu_c$.

Solution : Existence Soit $D = \{a \in \Omega : \mu(\{a\}) > 0\}$. Comme μ est σ-finie, on sait par le TD4 ex 7 que D est au plus dénombrable (et donc $D \in \mathcal{T}$ par union au plus dénombrable de singletons). On peut donc définir la mesure discrète

$$\mu_d = \sum_{a \in \mathrm{D}} \mu(\{a\})\delta_a.$$

On pose $\mu_c = \mu - \mu_d$. Soit $B \in \mathcal{T}$, on a $\mu_c(B \cap D) = \sum_{a \in \mathrm{D}} \mu(\{a\}) - \mu(\{a\}) = 0$ donc $\mu_c(B) = \mu(B \cap D^c)$. Donc comme mesure induite à D^c, on déduit que μ_c est une mesure (positive) (exo facile). En particulier on déduit que $\mu_c(\{e\}) = 0$ si $e \notin D^c$ puis, $\mu_c(\{e\}) = \mu(\{e\}) = 0$ si $e \in D^c$ vu la définition de D. Donc, μ_c est continue comme voulu et on a bien sûr par construction $\mu = \mu_c + \mu_d$.

Exercice 21 **($\star$)** Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\overline{\mathcal{T}} = \{A \Delta N : A \in \mathcal{T}, N\ \mu-\text{négligeable}\}$.

1/ Montrer que $\overline{\mathcal{T}}$ est une tribu. *C'est la tribu μ-complétée de $\mathcal{T}$.*

Solution : On rappelle que $A \Delta N = (A \cap N^c) \cup (A^c \cap N)$.

On a trois axiomes à vérifier

- $\emptyset = \emptyset \Delta \emptyset \in \overline{\mathcal{T}}$ vu que $\emptyset \in \mathcal{T}$ et aussi $\mu(\emptyset) = 0$ donc c'est un ensemble μ-négligeable.

- Par distributivité de $\cap$ et $\cup$:

$$(A \Delta N)^c = (A^c \cup N) \cap (A \cup N^c) = (A^c \cap A) \cup (A^c \cap N^c) \cup (A \cap N) \cup (N \cap N^c) = (A^c \cap N^c) \cup (A \cap N) = A^c \Delta N$$

comme on utilise le même N μ-négligeable et $A^c \in \overline{\mathcal{T}}$, cela conclut à $(A \Delta N)^c \in \overline{\mathcal{T}}$.

-Enfin, soit $B_n = A_n \Delta N_n \in \overline{\mathcal{T}}$. Le point clef est de montrer qu'on peut supposer A_n et N_n disjoints.

Par définition d'un ensemble μ-négligeable, il existe $M_n \in \mathcal{T}$ avec $N_n \subset M_n$ et $\mu(M_n) = 0$ donc $M_n - N_n$ est aussi négligeable et $N_n^c = (M_n - N_n) \cup M_n^c$. On a donc $B_n = (A_n \cap M_n^c) \cup (A_n \cap M_n - N_n) \cup (A^c \cap N)$ Si on pose $A_n' = A_n \cap M_n^c \in \mathcal{T}$ et $N_n' = (A_n \cap M_n - N_n) \cup (A_n^c \cap N_n)$ qui est μ-négligeable comme union de 2 tels ensembles vu que $A_n \cap M_n - N_n \subset M_n$ μ-négligeable et $A_n^c \cap N_n \subset N_n$ μ-négligeable. De plus par construction $A_n' \cap N_n' \subset (M_n^c \cap A_n \cap M_n - N_n) \cup (A_n \cap A_n^c \cap N_n) = \emptyset$. Donc $B_n = A_n \cup N_n' = A_n' \Delta N_n'$. On obtient donc

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \Big(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n' \Big) \cup \Big(\cup_{n \in \mathbb{N}} N_n' \Big)$$

et on pose $N = \Big(\cup_{n \in \mathbb{N}} N_n' \Big)$ qui est μ-négligeable comme union dénombrable de μ-négligeables et $A = \Big(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n' \Big) \in \mathcal{T}$ par union dénombrable. Il reste à transformer A, N comme avant pour les rendre disjoints. Or, par μ-négligeabilité de N, il existe donc $M \in \mathcal{T}$ avec $N \subset M$ et $\mu(M) = 0$ et on peut donc écrire :

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n = A \cup N = (A \cap N^c) \cup N = (A \cap M^c) \cup (A \cap (M - N)) \cup N$$

et maintenant $A' = A \cap M^c \in \mathcal{T}$ et $N' = (A \cap (M - N)) \cup N$ est μ-négligeable comme union de 2 μ-négligeables et par construction $A' \cap N' = \emptyset$ donc finalement :

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n = A' \cup N' = A' \Delta N' \in \overline{\mathcal{T}}.$$

2/ Soit $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{T}} \to \overline{\mathbb{R}}, A \Delta N \mapsto \mu(A)$, où $A \in \mathcal{T}$ et N est μ-négligeable. Montrer que $\overline{\mu}$ est une mesure sur $\overline{\mathcal{T}}$. On obtient un espace mesuré $(\Omega, \overline{\mathcal{T}}, \overline{\mu})$ appelé *l'espace mesuré μ-completé de* $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

Solution :

On commence par montrer que $\overline{\mu}$ est bien défini. Soit donc deux écritures $A\Delta N = B\Delta P$ avec $A, B \in \mathcal{T}$ et N, P est μ-négligeables, on montre que $\mu(A) \leq \mu(B)$ (et par symétrie cela implique l'égalité).

On a $A \cap N^c \subset (B \cap P^c) \cup (P \cap B^c)$. Comme P, L sont μ-négligeables on $P \subset M, N \subset L$ avec $\mu(M) = 0 = \mu(L)$ (et donc $M, L \in \mathcal{T}$. Donc, on obtient

$$A \subset (A \cap L^c) \cup (A \cap L) \subset (A \cap N^c) \cup (A \cap L) \subset (B \cap M^c) \cup M \cup (A \cap L)$$

(vu que $(B \cap P^c) = (B \cap M^c) \cup (B \cap M - P)$ et le deuxième est inclus dans M comme $(P \cap B^c)$) Donc, par monotonie et sous-additivité, on obtient $\mu(A) \leq \mu(B \cap M^c) + \mu(M) + \mu(L) = \mu(B \cap M^c) + 0 \leq \mu(B)$.

On est maintenant prêt à vérifier que $\overline{\mu}$ est une mesure. On a deux axiomes à vérifier. D'abord $\emptyset = \emptyset\Delta\emptyset$ donc $\overline{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ comme voulu. Soit donc $B_n = A_n\Delta N_n \in \overline{\mathcal{T}}$ deux à deux disjoints. En reprenant la notation de la question précédente, on a $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A'\Delta N' \in \overline{\mathcal{T}}$ donc on calcule

$$\overline{\mu}(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \mu(A') = \mu\Big(\cup_{n\in\mathbb{N}} (A'_n \cap M^c)\Big)$$

Or on rappelle que $B_n = A'_n\Delta N'_n$ est une décomposition comme la décomposition de $\overline{\mathcal{T}}$, donc $\overline{\mu}(B_n) = \mu(A'_n) = \mu(A'_n \cap M^c)$ (vu $\mu(A'_n \cap M^c) \leq \mu(A'_n) \leq \mu(A'_n \cap M^c) + \mu(M) = \mu(A'_n \cap M^c)$ par monotonie et sous-additivité vu $\mu(M) = 0$) et rapellons que $A'_n = A_n \cap M_n^c \subset A_n \cap N_n^c \subset B_n$ donc ils sont deux à deux disjoints comme les B_n donc par la σ-additivité de μ, on obtient :

$$\overline{\mu}(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \mu\Big(\cup_{n\in\mathbb{N}} (A'_n \cap M^c)\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\Big(A'_n \cap M^c\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(B_n).$$

Cela conclut donc à la sous-additivité.

Exercice 22 Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ au plus dénombrable ou } A^c \text{ au plus dénombrable } \}.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathcal{T} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
3. Conclure.

Correction de 2021-2022 exercice 19
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille3-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 23 On reprend la tribu $\mathcal{T}$ de l'exercice précédent et on restreint la mesure de comptage ν sur $\mathbb{R}$ à $\mathcal{T}$. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}, \nu)$ est un espace mesuré qui n'est pas σ-finie.

Vu que $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \nu)$ est un espace mesuré, la restriction est aussi un espace mesuré. Si ν était σ-finie, cela voudrait dire qu'il existe A_n avec $\nu(A_n) < +\infty$ c'est à dire A_n fini (donc au plus dénombrable) telle que l'union de la suite soit $\mathbb{R} = \cup_n A_n$. Ceci est impossible car une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrable est au plus dénombrable, mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas (par le cours car il contient $[0, 1]$ qui ne l'est pas.

Exercice 24

1. Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, trouver la tribu et la classe monotone engendrés par $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.
2. Trouver une classe monotone qui n'est pas une tribu.

Correction de 2021-2022 exercice 9.2 et 9.3

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille3-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 25

1. Si $\Omega = \mathbb{N}$ trouver la classe monotone engendrée par $\mathcal{E} = \{\{1, n\} : n \geq 2\}$.
   Solution :
   On commence par trouver des éléments de $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, on a toujours Ω et $\emptyset$, donc comme $\{1, n\} \subset \Omega$, les complémentaires, donc on obtient :
   $$\mathcal{M}(\mathcal{E}) \supset \{\emptyset, \Omega\} \cup \mathcal{E} \cup \{\{1, n\}^c : n \geq 2\} =: \mathcal{M}$$
   On va montrer qu'il y a égalité en voyant que le membre de droite est une classe monotone qui contient $\mathcal{E}$. Bien sûr, il n'y a pas d'inclusion entre éléments de $\mathcal{E}$ vu qu'ils ont tous le même cardinal 2. A fortiori, pas non plus entre les complémentaires. OR tous les $\{1, n\}^c$ contiennent $\{0\} \notin \{1, n\}$ donc $\{1, n\} \not\subset \{1, m\}^c$ (et bien sûr par l'inverse non plus vu que $\{1, m\}^c$ est infini). Donc comme il n'y a aucune inclusion non triviale (i.e. autre que celles avec l'ensemble vide et Ω) dans $\mathcal{M}$, on déduit qu'il n'y pas non plus d'union croissantes. Donc $\mathcal{M}$ est bien stable par différence et unions croissantes, donc c'est une classe monotone.
2. Trouver une classe monotone dénombrable qui n'est pas une tribu.
   $\{1\} \in \sigma(\mathcal{E})$ par intersection de deux éléments différents quelconques de $\mathcal{E}$ mais $\{1\} \notin \mathcal{M}(\mathcal{E})$ donc $\sigma(\mathcal{E}) \neq \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Le fait que $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ est évident par la description indicée par deux suites ci-dessus.