Université Claude Bernard | Mathématiques
L3 Topologie et Théorie de la Mesure | 2023-2024

Feuille d'exercices numéro 7

Espaces L^p

Exercice 1
Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$, montrer que $|f| \leq ||f||_\infty$ μ-presque partout.

Exercice 2 Soit $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} 1_{[0,1]}(x^2+y^2)$.

1. Montrer que $f \notin L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$. (Indication, on pourra utiliser un changement de variable en coordonnées polaires).
2. Montrer que $\sqrt{f} \in L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$ et calculer $||\sqrt{f}||_1$.
3. En déduire que $L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$ n'est pas inclus dans $L^2(]0,1[^2, \lambda_2)$.

Exercice 3 Soient $1 \leq p < q \leq +\infty$. On rappelle que $\ell^p(\mathbb{N})$ est l'espace vectorielle des séries de puissance p sommable et qu'il coïncide avec $\ell^p(\mathbb{N}) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ pour la mesure de comptage ν
.

1. Soit $u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. Pour quel α a-t-on $u_n \in \ell^p(\mathbb{N})$? En déduire que $\ell^q(\mathbb{N}) \not\subset \ell^p(\mathbb{N})$.
2. Soit v_n une suite telle que pour tout n, $|v_n| \leq 1$, montrer que
$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^q \leq \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^p.$$
3. Montrer que la boule unité de $\ell^p(\mathbb{N})$ est inclus dans la boule unité de $\ell^q(\mathbb{N})$.
4. Montrer que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$, et pour tout $v \in \ell^p(\mathbb{N})$ $||v||_q \leq ||v||_p$.

Exercice 4 Soient $1 \leq p < q \leq +\infty$, λ la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que $L^q(]0,1], \lambda)$ est un sous-espace de $L^p(]0,1], \lambda)$.
2. Soit $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Pour quel $\alpha > 0$ a-t-on $f \in L^p(]0,1], \lambda)$? En déduire que $L^q(]0,1], \lambda)$ est un sous-espace strict de $L^p(]0,1], \lambda)$.
3. Soit $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définit par $g_\alpha = \frac{1}{(x+1)^\alpha} 1_{]0,+\infty[}(x)$. Pour quel α a-t-on $g_\alpha \in L^p(\mathbb{R}, \lambda)$?
4. Peut-on comparer pour l'inclusion $L^q(\mathbb{R}, \lambda)$ et $L^p(\mathbb{R}, \lambda)$? (justifier)

Exercices plus difficiles

Exercice 5 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On le munit de la norme $||f||_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$

1. Montrer que $\mathbb{Q}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels, est dense dans E.
2. Montrer que E est séparable.
3. Montrer que $E \subset (C^0([0,1], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$ n'est pas fermé (on pourra utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass).

4. Est-ce que E est complet ?

Exercice 6 Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions C^1 sur $[0,1]$ (la dérivée en 0 est la dérivée à droite et celle en 1 la dérivée à gauche).

On munit E de la norme
$$||f||_E = \sup_{x \in [0,1]} \max(|f(x)|, |f'(x)|).$$

1. Soit $U(f) = (f, f')$. Montrer que $U : E \to C^0([0,1], \mathbb{R})^2$ est une application linéaire isométrique (quand $C^0([0,1], \mathbb{R})^2$ est muni de la norme produit de la norme infinie $||(f,g)|| = \max(||f||_\infty, ||g||_\infty)$)
2. Montrer que $C^0([0,1], \mathbb{R})^2$ est complet.
3. Montrer que l'image $U(E)$ est fermé dans $C^0([0,1], \mathbb{R})^2$, en déduire que E est complet.
4. En utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass, montrer que les polynômes sont denses dans E. En déduire que E est séparable.

Exercice 7 Soient $1 \leq p < +\infty, 1 \leq q < +\infty$, λ la mesure de Lebesgue. On cherche à montrer que $B = \{f \in L^p(\mathbb{R}, \lambda) : ||f||_q \leq 1\}$ est fermé dans $L^p(\mathbb{R}, \lambda)$.

1. Soit $r = \lambda p + (1-\lambda)q$ avec $\lambda \in]0,1[$. En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R}, \lambda) \cap L^q(\mathbb{R}, \lambda)$, alors $f \in L^r(\mathbb{R}, \lambda)$ et on a
$$||f||_r \leq ||f||_p^{\lambda p/r} ||f||_q^{(1-\lambda)q/r}.$$
2. On suppose que $f_n \in B$ et que $||f_n - f||_p \to 0$. Montrer que pour $r \in]\min(p,q), \max(p,q)[$, on a $||f_n - f||_r \to 0$. Qu'en déduit-on sur $||f||_r$?
3. Montrer que $||f||_r \to ||f||_q$ pour $r \to q$.
4. Conclure.

Exercice 8

1. Montrer $P := \{1_A, A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\} = \{f \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : f(1-f) = 0\}$.
2. En déduire que P est un sous-ensemble fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.
3. Montrer que pour $f \neq g \in P$, $||f - g||_\infty = 1$.
4. En déduire que P puis $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ne sont pas séparables.
5. ($\star$) Montrer que $T((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 1_{](1/n+2),1/(n+1)]}$ définit une isométrie $T : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to L^\infty([0,1], Leb)$ et en déduire que $L^\infty([0,1], Leb)$ n'est pas séparable.