L3 Mathématiques et Economie ou Informatique **18 octobre 2024**
2024–2025

Partiel : Théorie de la mesure et topologie

Durée : 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (5 points) :

1. Donner la définition des ensembles au plus dénombrables et une de leurs caractérisations.
2. Énoncer le théorème de sommation par paquet (dans le cas général).
3. Énoncer la caractérisation topologique de la continuité.
4. Énoncer le théorème de prolongement des identités.

Exercice 1 (4 points)

1. Montrer que pour tous les entiers $n, m, l \in \mathbb{N}$, on a les inégalités :
$$\sqrt{n+m+l} \leq (\sqrt{n} + \sqrt{m} + \sqrt{l}) \leq 3\sqrt{n+m+l}.$$
2. Montrer que
$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2 : n+m\leq N} 1 = \frac{(N+1)(N+2)}{2}.$$
3. Soit $I = \mathbb{N}^3 - \{(0,0,0)\}$. Trouver tous les $\alpha > 0$ tels que la famille suivante est sommable :
$$\sum_{(n,m,l)\in I} \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{m} + \sqrt{l})^\alpha}.$$

Exercice 2 (5 points + Bonus : 2 points) On se place dans l'e.v.n $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$. On pose
$$O := \{(x,y) \in]0, +\infty[^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$
et
$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, y = 0\}$$

1. Montrer que O est un ouvert de $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$.
2. Montrer que F est un fermé de $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$.
3. Soit $L = O \cup F$. Est-ce que L est ouvert ? fermé ? (justifier)
4. Calculer l'adhérence de L. (justifier)
5. Calculer la frontière de L. (Bonus : 2 points)

Exercice 3 (6 points)
Soit $E = \mathrm{Lip}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On le voit comme le sous-espace $E \subset (C^0([0,1], \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ des fonctions continues bornées, et on le munit donc de la norme :

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

1. Montrer que $||f||_\infty < +\infty$ pour tout $f \in E$.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{1/3}$ (racine cubique de x). Montrer que $f \notin E$.
3. Montrer que f est uniformément continue.
4. Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^{1/3}$. Montrer que $f_n \in E$.
5. Montrer que $||f_n - f||_\infty \to 0$.
6. En déduire que E n'est pas fermé dans $(C^0([0,1], \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$.