L3 Mathématiques et Economie ou Informatique **18 octobre 2024**
2024–2025

Correction du CC1

Durée : 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (5 points, cf. cours) :

Exercice 1 (4 points)

1. Montrer que pour tous les entiers $n, m, l \in \mathbb{N}$, on a les inégalités :
$$\sqrt{n+m+l} \leq (\sqrt{n} + \sqrt{m} + \sqrt{l}) \leq 3\sqrt{n+m+l}.$$
Solution : $n \leq n+m+l$ donc en passant la racine carrée qui est croissante : $\sqrt{n} \leq \sqrt{n+m+l}$. En faisant de même pour m, l, on obtient en sommant l'inégalité de droite $(\sqrt{n} + \sqrt{m} + \sqrt{l}) \leq 3\sqrt{n+m+l}$.
Comme la fonction carrée est aussi croissante, la première inégalité est aussi équivalente à :
$$n+m+l \leq (\sqrt{n} + \sqrt{m} + \sqrt{l})^2 = n+m+l+2\sqrt{n}\sqrt{m}+2\sqrt{m}\sqrt{l}+2\sqrt{n}\sqrt{l},$$
et cette inégalité est vraie car chacune des racines en plus dans le terme de droite est positive. En prenant la racine carré (croissante) on obtient l'inégalité de gauche voulue.
2. Montrer que
$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2 : n+m\leq N} 1 = \frac{(N+1)(N+2)}{2}.$$
Solution : Par exemple par sommation par paquet finie et/ou par changement d'indice $(n = n, k = m+n)$:
$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2 : n+m\leq N} 1 = \sum_{k=0}^{N} \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2 : n+m=k} 1 = \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{k} 1 = \sum_{k=0}^{N} k+1 = \sum_{l=0}^{N+1} l = \frac{(N+1)(N+2)}{2}.$$
A la fin, on utilise que la somme des N premiers entiers est $\frac{N(N+1)}{2}$. (cf. L1 ou récurrence facile)
3. Soit $I = \mathbb{N}^3 - \{(0,0,0)\}$. Trouver les $\alpha > 0$ tels que la famille suivante est sommable :
$$\sum_{(n,m,l)\in I} \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{m} + \sqrt{l})^\alpha}.$$
Solution : Les inégalités de la question 1 donnent, vu $\alpha > 0$ et croissance de $x \mapsto x^\alpha$:
$$\frac{1}{3^\alpha (n+m+l)^{\alpha/2}} \leq \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{m} + \sqrt{l})^\alpha} \leq \frac{1}{(n+m+l)^{\alpha/2}}.$$

Donc par 2 dominations (avec à droite et à gauche la même série à multiplication par une constante prêt) la sommabilité de la série demandée est équivalente à celle

$$\sum_{(n,m,l)\in I} \frac{1}{(n+m+l)^{\alpha/2}}.$$

Comme c'est une série à termes positifs, on applique le théorème de sommation par paquet pour $\Lambda_k = \{(n,m,l) \in I : n+m+l = k\}$ et la partition $I = \cup_{N\geq 1}\Lambda_N$. Cela donne l'égalité et l'équivalence des sommabilités des deux membres :

$$\sum_{(n,m,l)\in I} \frac{1}{(n+m+l)^{\alpha/2}} = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{(n,m,l)\in\Lambda_N} \frac{1}{(n+m+l)^{\alpha/2}} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{Card(\Lambda_N)}{N^{\alpha/2}}$$

Il suffit de calculer le cardinal de $\Lambda_N = \{(n,m,N-n-m) \in \mathbb{N}^2 : (n,m) \in \mathbb{N}^2, n+m \leq N\}$ mais cette représentation donne que c'est la somme calculée en 2 : $Card(\Lambda_N) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$. Le terme général de la dernière série est donc équivalent à $N^2/N^{\alpha/2}$ et converge donc par le critère de Riemann si et seulement si $\alpha/2 - 2 > 1$ soit une sommabilité si et seulement si $\alpha > 6$.

Exercice 2 (5 points + Bonus : 2 points) On se place dans l'e.v.n $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$.
On pose

$$O := \{(x,y) \in]0,+\infty[^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

et

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, y = 0\}$$

1. Montrer que O est un ouvert de $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$.
   Solution : On pose $f(x,y) = x^2 + y^2$ qui est un polynôme (en dimension finie) donc continue. On pose aussi $g(x,y) = x, h(x,y) = y$ qui sont linéaires en dimension finie, donc continue. Donc $O = f^{-1}(]-\infty,1[) \cap g^{-1}(]0,+\infty[) \cap h^{-1}(]0,+\infty[)$ est ouvert comme intersection d'un nombre fini (3) d'ouverts, chacun ouvert comme image réciproque d'un intervalle ouvert par f, g, h continues.
2. Montrer que F est un fermé de $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$.
   Solution :
   F est fermés comme intersection de (deux) fermés, comme images réciproques $g^{-1}([-1,1])$ et $h^{-1}(\{1\})$ d'intervalles fermés par g, h continue.
3. Soit $L = O \cup F$. Est-ce que L est ouvert ? fermé ? (justifier)
   Solution : Montrons que L n'est ni fermé ni ouvert.
   Si on prend $x_n = (1/n, 1-1/n) \in O \subset L$ (car $1/n^2 + (1-1/n)^2 = 1 - 2(1-1/n)/n < 1$), $x_n \to (0,1) \notin L$, donc par caractérisation séquentielle des fermés, L n'est pas fermé.
   Si on prend $y_n = (0, -1/n) \in L^c$, $x_n \to (0,0) \in F \subset L$, donc par caractérisation séquentielle des fermés, L^c n'est pas fermé, donc L n'est pas ouvert.
4. Calculer l'adhérence de L. (justifier)
   Solution : Montrons que $\overline{L} = F \cup C$ avec $C = f^{-1}(]-\infty,1]) \cap g^{-1}([0,+\infty[) \cap h^{-1}([0,+\infty[)$. On raisonne par double inclusion.

D'abord C est fermé comme intersection de fermés, images réciproques de 3 intervalles fermés par f, g, h continues. Donc Son union (finie) avec F esst aussi fermé et contient L, donc $\overline{L} \subset F \cup C$, comme plus petit fermé contenant L.

Pour l'autre inclusion il suffit de montrer que $(F \cup C) - L = C - L \subset \overline{L}$.

Or $C - L = C_1 \cup \{(0,1)\} \cup C_2$ avec $C_1 = \{(0,x), x \in [0,1[\}$ et $C_2 = \{(x,y) \in]0,+\infty[^2, x^2+y^2 = 1\}$. Comme on a déjà vu à la question précédente que $(0,1) \in \overline{L}$, il reste à montrer $C_i \in \overline{L}$.

Or pour n assez grand $z_n = (1/n, x) \in O \subset L$ pour $x \in [0,1[$ donc $x_n \to (0,x) \in \overline{L}$ par caractérisation séquentielle de l'adhérence, c'est à dire : $C_1 \subset \overline{L}$.

De même, pour $(x,y) \in C_2$, $t_n = (1-1/n)(x,y) \in O \subset L$ et $t_n \to (x,y) \in \overline{L}$ par caractérisation séquentielle de l'adhérence, c'est à dire : $C_2 \subset \overline{L}$.

5. Calculer la frontière de L. (Bonus : 2 points)

   Solution : On a $Fr(L) = \overline{L} - Int(L)$ donc il reste à calculer $Int(L)$. Montrons que $Int(L) = O$. On a vu au 1 que O et ouvert, et $O \subset L$, donc comme l'intérieur est le plus grand ouvert contenu dans L, on a $O \subset Int(L)$.

   La réciproque $Int(L) \subset O$ est équivalente en passant au complémentaire à $O^c \subset \overline{L^c}$ et vu $L^c \subset \overline{L^c}$, il suffit de montrer $L - O = F \subset \overline{L^c}$.

   Or, pour $x \in [-1,1]$, $(x, -1/n) \in L^c$ et $(x,-1/n) \to (x,0) \in F$ donc par caractérisation séquentielle de l'adhérence $(x,0) \in \overline{L^c}$ et comme tout point de F est de cette forme, on a bien $F \subset \overline{L^c}$.

   Bilan : on a bien $Int(L) = O$ et il suffit de calculer : $Fr(L) = F \cup C - O = (C-L) \cup (L-O) = C_1 \cup \{(0,1)\} \cup C_2 \cup F$ avec les notations de la question précédente.

Exercice 3 (6 points)

Soit $E = \mathrm{Lip}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On le voit comme le sous-espace $E \subset (C^0([0,1],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ des fonctions continues bornées, et on le munit donc de la norme :

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

1. Montrer que $||f||_\infty < +\infty$ pour tout $f \in E$.

   Solution 1 : C'est une partie du théorème de Weierstrass : une fonction f, continue sur le compact $[0,1]$, est bornée et atteint ses bornes. Être bornée veut exactement dire $||f||_\infty < +\infty$.

   Solution 2 : Si f est K lipschitzienne, on a $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$ donc en $y = 0$, on obtient : $|f(x) - f(0)| \leq K|x| \leq K$ pour $0 \leq x \leq 1$, on obtient par inégalité triangulaire :

   $$|f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leq |f(0)| + K$$

   d'où en passant au sup sur $[0,1]$:

   $$||f||_\infty \leq |f(0)| + K.$$

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{1/3}$ (racine cubique de x). Montrer que $f \notin E$.

Solution : Pour montrer que f n'est pas K-lipshitzienne, on trouve des suites $x_n, y_n \in [0,1]$ telles que $\frac{|f(x_n)-f(y_n)|}{|x_n-y_n|} \to_{n\to\infty} \infty$. On prend $x_n = 1/n, y_n = 0$. d'où

$$\frac{|f(x_n)-f(y_n)|}{|x_n-y_n|} = \frac{n}{n^{1/3}} = n^{2/3} \to_{n\to\infty} \infty.$$

3. Montrer que f est uniformément continue.
   Solution 1 : f est continue sur un compact $[0,1]$, donc par le théorème de Heine : uniformément continue.
   Solution 2 : On montre $|f(x)-f(y)| \leq f(|x-y|)$ donc pour ϵ on pose $\eta = \epsilon^3$ et si $|x-y| \leq \eta$, alors $|f(x)-f(y)| \leq f(\epsilon^3) = \epsilon$.
4. Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^{1/3}$. Montrer que $f_n \in E$.
   Solution : Comme en TD, on vérifie que la dérivée est bornée. f_n est dérivable de dérivée $f_n'(x) = \frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-2/3}$ qui est décroissante, on a $||f_n'||_\infty = f_n'(0) = \frac{n^{2/3}}{3}$. Par le théorème fondamental du calcul, on obtient pour $x < y$:

$$|f_n(x) - f_n(y)| = f_n(y) - f_n(x) = \int_x^y f_n'(t)dt \leq ||f_n'||_\infty (y-x).$$

   Donc f_n est K-lipschitzienne pour $K = \frac{n^{2/3}}{3}$.
5. Montrer que $||f_n - f||_\infty \to 0$.
   Solution 1 : On utilise l'uniforme continuité de $g(x) = x^{1/3}$ pour $g : [0,2] \to \mathbb{R}$. Vu que f_n est obtenue en restreignant g sur $[1/n, 1+1/n]$ (et en translatant).
   Soit $\epsilon > 0$ soit $\delta > 0$ telle que pour tout $(x,y) \in [0,2]^2$ si $|x-y| \leq \delta$ implique $|g(x)-g(y)| \leq \epsilon$ Soit alors n telle que $1/n \leq \delta$, alors

$$|f_n(x) - f(x)| = |g(x+\frac{1}{n}) - g(x)| \leq \epsilon.$$

   Soit en passant au sup sur $[0,1]$, on obtient : $||f_n - f||_\infty \leq \epsilon$. Ce qui implique la limite voulue.
   Solution 2 :
   On fait une étude de variation pour calculer la norme infinie. On pose $g_n = f_n - f$, qui est dérivable sur $]0,1[$, continue sur $[0,1]$. On a

$$g_n'(x) = \frac{1}{3}\left(\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-2/3} - x^{-2/3}\right) < 0,$$

   car $x \mapsto x^{-2/3}$ est strictement décroissante. Donc g_n est aussi décroissante sur $]0,1[$ et donc aussi par continuité sur $[0,1]$, donc atteint son maximum en 0 :

$$||f_n - f||_\infty = f_n(0) - f(0) = \frac{1}{n^{1/3}} \to 0.$$

6. En déduire que E n'est pas fermé dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$.
   Solution : $f_n \in E$ and $f_n \to f$ mais $f \notin E$, donc par caractérisation séquentielle des fermés, E n'est pas fermé.