

Correction du CC1

Durée : 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES
ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (5 points, cf. cours) :

Exercice 1 (6 points) *On rappelle que $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.*

1. *Soit*

$$I = \left\{ (n, m) \in \mathbb{Z}^2 : n + m \neq 0 \right\}.$$

Montrer que I est infini.

Solution 1 :

On peut définir $x_n = (n + 1, 0) \in I$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments distincts de I car $n + 1 + 0 \geq 1$, donc I est infini (on peut aussi dire que $x : \mathbb{N} \rightarrow I$ est injective).

Solution 2 :

On peut définir $x_n = (n + 1, 0) \in I$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on remarque que $\|x_n\|_\infty = n + 1 \rightarrow \infty$ donc l'image de x ne contient pas seulement un nombre fini d'éléments (car un ensemble fini est borné).

Solution 3 : (utilisant un résultat non vu en cours)

$f : I \rightarrow \mathbb{Z}^$ définie par $f(n, m) = n + m$ est surjective car par exemple $f(n, 0) = n$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ donc I est infini car $\mathbb{Z}^*$ est infini.*

Rmq : On utilise que si $f : A \rightarrow B$ est surjective avec B infini, alors A est infini. Preuve : soit $n \in B$ on choisit $x_n \in f^{-1}(\{n\})$ qui est non-vide par surjectivité de f . $x : B \rightarrow A$ vérifie $f \circ x = \text{id}_B$ donc x est injective donc B infini implique bien A infini. En fait cette méthode, si on montre la surjectivité de f concrètement (en exhibant x_n), peut toujours être remplacée par la méthode de la solution 1... Cela se voit au dessus où on a pris $x_n = (n, 0)$ pour $n \in \mathbb{Z}^$ qui est presque la même suite que la solution 1.*

2. Montrer que I est dénombrable.

Solution : $\mathbb{Z}$ est dénombrable, donc le produit $\mathbb{Z}^2$ est aussi dénombrable et finalement, le sous-ensemble $I \subset \mathbb{Z}^2$ est au plus dénombrable.

Comme I est au plus dénombrable et infini (par le 1), on obtient que I est dénombrable.

3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\left(\frac{1}{(n+m)^4}\right)_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{-n\}}$ est sommable.

On note $S_n = \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{-n\}} \frac{1}{(n+m)^4}$ sa somme.

Solution 1 :

Comme $\llbracket -N-n, N-n \rrbracket - \{-n\}$ est une suite exhaustive de $\mathbb{Z} \setminus \{-n\}$, la famille $\left(\frac{1}{(n+m)^4}\right)_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{-n\}}$ est sommable si et seulement si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m \in \llbracket -N-n, N-n \rrbracket - \{-n\}} \frac{1}{(n+m)^4} < +\infty$$

or par changement de variable $k = n + m$ puis parité, on a

$$\sum_{m \in \llbracket -N-n, N-n \rrbracket - \{-n\}} \frac{1}{(n+m)^4} = \sum_{m \in \llbracket -N, N \rrbracket - \{0\}} \frac{1}{k^4} = 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^4}.$$

Donc la limite est finie et donc la famille est sommable car la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^4}$ est convergente (vu $\alpha = 4 > 1$).

Solution 2 :

On applique le théorème de sommation par paquet (cas positif) à $\mathbb{Z} \setminus \{-n\} = \{m \in \mathbb{Z} : m > -n\} \cup \{m \in \mathbb{Z} : m < -n\}$, donc (en posant ensuite $k = m + n$ et par parité) :

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{-n\}} \frac{1}{(n+m)^4} &= \sum_{m > -n} \frac{1}{(n+m)^4} + \sum_{m < -n} \frac{1}{(n+m)^4} = \sum_{k > 0} \frac{1}{k^4} + \sum_{k < 0} \frac{1}{k^4} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}. \end{aligned}$$

Donc la famille est sommable car la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^4}$ est convergente (vu $\alpha = 4 > 1$).

4. Montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n = \sum_{(n,m) \in I} \frac{1}{(n+m)^4}.$$

Solution 1 :

La famille $\left(\frac{1}{(n+m)^4} \right)_{(n,m) \in I}$ est à coefficient positifs, donc on peut appliquer le théorème de sommation par paquets (cas positif). On décompose $I = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Lambda_n$ avec $\Lambda_n = \{(n, m) : n + m \neq 0\} = \{(n, m) : m \in \mathbb{Z} \setminus \{-n\}\}$ qui est bien sûr une partition. Le théorème de sommation par paquet donne l'égalité :

$$\sum_{(n,m) \in I} \frac{1}{(n+m)^4} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{(n,m) \in \Lambda_n} \frac{1}{(n+m)^4} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n.$$

Solution 2 : On se ramène à $\mathbb{Z}^2$ pour avoir un ensemble produit et appliquer Fubini-Tonelli. On définit la famille positive

$$a_{n,m} = \begin{cases} \frac{1}{(n+m)^4} & \text{si } (n, m) \in I \\ 0 & \text{si } n + m = 0 \end{cases}.$$

et on note que $S_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n,m}$, donc par Fubini-Tonelli à

l'inégalité du milieu :

$$\sum_{(n,m) \in I} \frac{1}{(n+m)^4} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} a_{n,m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n,m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n.$$

5. Est-ce que la famille $\left(\frac{1}{(n+m)^4}\right)_{(n,m) \in I}$ est sommable ? (justifier). Calculer sa somme.

Solution : On peut appliquer le théorème de sommation par paquets (cas positif) pour une autre décomposition

$I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^*} I_k$ avec $I_k = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 : n + m = k\}$. Le théorème de sommation par paquet donne l'égalité :

$$\sum_{(n,m) \in I} \frac{1}{(n+m)^4} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \sum_{(n,m) \in I_k} \frac{1}{(n+m)^4} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \sum_{(n,m) \in I_k} \frac{1}{k^4}.$$

Or la somme $\sum_{(n,m) \in I_k} \frac{1}{k^4}$ est la somme infini d'une constante vu que $I_k = \{(n, k - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ est en bijection avec $\mathbb{Z}$. Donc cette série diverge, et par l'équivalence dans le théorème de sommation par paquets (cas positif), la famille d'origine $\left(\frac{1}{(n+m)^4}\right)_{(n,m) \in I}$ n'est pas sommable. On a donc :

$$\sum_{(n,m) \in I} \frac{1}{(n+m)^4} = +\infty.$$

Exercice 2 (6 points) On se place dans l'e.v.n $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

On pose

$$A := \left\{ (x, y) \in]0, +\infty[^2 : \frac{1}{xy} \leq 1 \right\}$$

1. Montrer que A n'est pas un ouvert de E .

Solution :

Il suffit de voir que A^c n'est pas fermé. ON considère la suite $a_n = (1, 1 - \frac{1}{n})$. On a $\frac{1}{1 \cdot (1 - \frac{1}{n})} > 1$ donc $a_n \in A^c$ mais $a_n \rightarrow (1, 1) \in A$ donc par caractérisation séquentielle des fermés, A^c n'est pas fermé donc A n'est pas ouvert.

2. Est-ce que A est fermé dans E ? (justifier)

Solution : Pour montrer que A est fermé, on remarque que l'équation se réécrit $xy \geq 1$. et Pour $x, y \geq 0$ est implique déjà $x \neq 0, y \neq 0$. On déduit donc que

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

On pose donc $f_1(x, y) = xy - 1, f_2(x, y) = x, f_3(x, y) = y$ qui sont polynomiales donc continue. On note que

$$A = \bigcap_{i=1}^3 f_i^{-1}([0, +\infty[).$$

A est donc fermé comme intersection d'images réciproques de l'intervalle fermé $[0, +\infty[$ par f_i continue.

3. Calculer l'adhérence de A . (justifier) **Solution :** Comme A est fermé, l'adhérence de A est $\overline{A} = A$.

4. Calculer l'intérieure de A . (justifier) **Solution :** On pose

$$O := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1, x > 0, y > 0 \right\} = \bigcap_{i=1}^3 f_i^{-1}(]0, +\infty[)$$

c'est l'intersection d'un nombre fini d'image réciproques de l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ par f_i continue, donc O est ouvert.

Or $O \subset A$ donc comme $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A , on obtient $O \subset \text{Int}(A)$. On va montrer qu'il y a égalité.

Il suffit de montrer que $A \setminus O \subset (\text{Int}(A))^c = \overline{A}^c$.

Or on voit que

$$A \setminus O := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1, y > 0 \right\}$$

donc pour $(x, y) \in A \setminus O$ on pose $x_n = x, y_n = y(1 - \frac{1}{n})$ d'où $x_n y_n = xy(1 - \frac{1}{n}) = (1 - \frac{1}{n}) < 1$ et donc $(x_n, y_n) \in A^c$. Or $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ donc par caractérisation séquentielle de

l'adhérence, on obtient $(x, y) \in \overline{A^c}$ et donc $A \setminus O \subset (Int(A))^c$ comme voulu.

Bilan : on a obtenu $O \subset Int(A) \subset A$ et $A \setminus O \subset (Int(A))^c$ donc $O^c \subset (Int(A))^c$ et ainsi $O \supset Int(A)$ soit $O = Int(A)$.

Exercice 3 (3 points + Bonus 2 points) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x\sqrt{x}.$$

1. Montrer que f n'est pas lipschitzienne.

Solution :

On prend les suites $x_n = n$, $y_n = 4n$ de sorte que $f(y_n) = 8n\sqrt{n} = 8f(x_n)$.

Donc

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{8n\sqrt{n} - n\sqrt{n}}{4n - n} = \frac{7\sqrt{n}}{3} \rightarrow +\infty$$

donc il n'existe pas de constante $K < +\infty$ telle que $|f(y) - f(x)| \leq K|x - y|$ vu que le rapport n'est pas borné.

2. Est ce que f est uniformément continue ?

Solution :

On prend cette fois les suites $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n^{1/4}}$ donc $|x_n - y_n| = 1/n^{1/4} \rightarrow 0$ mais calculons

$$f(y_n) - f(x_n) = \left(n + \frac{1}{n^{1/4}}\right)^{3/2} - n^{3/2} = n^{3/2} \left(\left(1 + \frac{1}{n^{5/4}}\right)^{3/2} - 1 \right)$$

or quand $n \rightarrow \infty$, on a $\frac{1}{n^{5/4}} \rightarrow 0$ donc on utilise le développement limité en 0 $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ d'où

$$\begin{aligned} f(y_n) - f(x_n) &= n^{3/2} \left(1 + \frac{3}{2n^{5/4}} + o\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right) - 1 \right) \\ &= \frac{3}{2}n^{1/4} + o(n^{1/4}) \simeq \frac{3}{2}n^{1/4} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc pour tout $\epsilon = 1$, il n'existe pas de $\delta > 0$ telle que $|x - y| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq 1$ vu $|x_n - y_n| \leq \delta$ pour n grand mais $|f(y_n) - f(x_n)|$ n'est pas borné.

Remarque : Prendre les suites $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$ ne marche

pas. En fait, pour $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$, on a

$$\begin{aligned} f(y_n) - f(x_n) &= \left(n + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{3/2} - n^{3/2} = n^{3/2} \left(\left(1 + \frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)^{3/2} - 1 \right) \\ &= n^{3/2} \left(1 + \frac{3}{2n^{1+\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right) - 1 \right) \\ &= \frac{3}{2} n^{1/2-\alpha} + o(n^{1/2-\alpha}) \simeq \frac{3}{2} n^{1/2-\alpha} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

si et seulement si $\alpha < 1/2$. Cela ne tend pas vers 0 aussi pour $\alpha \leq 1/2$.

3. *Est ce que le produit de deux fonctions uniformément continue est uniformément continue ? (justifier)*

(Bonus : 2 points) Solution : $g(x) = x$ est 1-lipschitzienne donc uniformément continue De plus $h(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue comme on va le rappeler en reprenant la démonstration du TD. Mais leur produit $gh = f$ n'est pas uniformément continue par le 2, donc le produit de deux fonctions uniformément continue n'est pas forcément uniformément continue.

En effet $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour $a, b > 0$ donc

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|}$$

et donc pour $|a - b| \leq \delta = \epsilon^2$ on obtient :

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon$$

donc h est bien uniformément continue.

Autre Solution : $g(x) = x = h(x)$ est 1-lipschitzienne donc uniformément continue mais le produit $gh(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue comme vu en TD et comme on rappelle maintenant, donc le produit de deux fonctions uniformément continue n'est pas forcément uniformément continue.

En effet pour les suites $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$ on a $gh(y_n) - gh(x_n) = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$ qui ne tend pas vers 0 donc gh n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.