L3 Mathématiques et Economie ou Informatique 10 octobre 2025

2025-2026

CC1 : Topologie et théorie de la mesure

Durée : 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES
ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (5 points) :

1. Donner la définition de la norme subordonnée.
2. Énoncer le théorème de Fubini–Tonelli pour les familles sommables.
3. Énoncer la caractérisation séquentielle de l'adhérence.
4. Énoncer le théorème de prolongement des applications uniformément continues.
5. Donner une propriété particulière des espaces vectoriels normés de dimension finie (au choix parmi les 3 vues en cours).

Exercice 1 (6 points) On rappelle que $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

1. Soit
$$I = \left\{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 : n + m \neq 0\right\}.$$
Montrer que I est infini.
2. Montrer que I est dénombrable.
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\left(\frac{1}{(n+m)^4}\right)_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-n\}}$ est sommable.
On note $S_n = \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-n\}} \frac{1}{(n+m)^4}$ sa somme.

4. Montrer que
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} S_n = \sum_{(n,m)\in I} \frac{1}{(n+m)^4}.$$

5. Est-ce que la famille $\left(\frac{1}{(n+m)^4}\right)_{(n,m)\in I}$ est sommable ? (justifier). Calculer sa somme.

Exercice 2 (6 points) On se place dans l'e.v.n $E = (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$.

On pose
$$A := \left\{(x,y) \in]0,+\infty[^2 : \frac{1}{xy} \leq 1\right\}$$

1. Montrer que A n'est pas un ouvert de E.
2. Est-ce que A est fermé dans E ? (justifier)
3. Calculer l'adhérence de A. (justifier)
4. Calculer l'intérieure de A. (justifier)

Exercice 3 (3 points + Bonus 2 points) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = x\sqrt{x}.$$

1. Montrer que f n'est pas lipschitzienne.
2. Est ce que f est uniformément continue ?
3. Est ce que le produit de deux fonctions uniformément continue est uniformément continue ? (justifier)

(Bonus : 2 points)