L3 Mathématiques et Economie ou Informatique **8 novembre 2024**
2024–2025

CC2 : Théorie de la mesure et topologie

Durée : 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (5 points) :

1. Énoncer l'inégalité des pentes
2. Énoncer le théorème de minimisation sous contrainte convexe.
3. Donner la définition d'un ensemble μ-négligeable.
4. Énoncer le théorème de convergence monotone de Beppo Levi.

Exercice 1 (9 points) On se place dans l'e.v.n $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$. On cherche à minimiser la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{(x+2)^4}{4} + \frac{y^4}{4} + \frac{(x+2)^2 y^2}{2}.$$

sur l'ensemble

$$C := \{(x,y) \in [0,+\infty[^2: \qquad 2 \leq x+y \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

On définit également :

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - x - y.$$

1. Montrer que g est convexe sur $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas concave.
2. Montrer que C est un convexe fermé.
3. Montrer que f est strictement convexe sur C.
4. Montrer que f admet un unique minimum global sur C.
5. Calculer le cône normal $N_C((0,2))$
6. Calculer le point de C où f atteint son minimum global (justifier).

Exercice 2 (6 points + Bonus : 2 points) Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $||\cdot||_1$ de distance associée par $d_1((x,y),(x',y')) = |x-x'| + |y-y'|$.
On considère le système d'équations

$$\begin{cases} 2x = \cos^2(\frac{x+y}{2}), & (x,y) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]^2 \\ 8y = 4 + \sin(\tan(x-y)). \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que $C = ([0, \frac{\pi}{4}] \times [0, \frac{\pi}{4}], d_1)$ est complet
2. Déterminer une fonction $h : C \to C$ telle que $(x,y) \in C$ soit solution de (1) si et seulement si (x,y) est un point fixe de h.
3. Montrer pour tout $(a,b) \in [0, \frac{\pi}{4}]^2$:
$$|(\cos(a))^2 - (\cos(b))^2| \leq 2|a-b|.$$
4. **(Bonus : 2 points)** Montrer que pour tout $(a,b) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]^2$:
$$|\sin(\tan(a)) - \sin(\tan(b))| \leq 2|a-b|$$
5. Montrer que h est K-lipschitzienne pour une constante K que l'on déterminera.
6. Montrer que le système (1) admet une unique solution dans C.