L3 Mathématiques et Economie ou Informatique **08 novembre 2024**
2024–2025

Correction du CC2 : Théorie de la mesure et topologie

Durée : 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (5 points, cf. cours) :

Exercice 1 (9 points) On se place dans l'e.v.n $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$. On cherche à minimiser la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{(x+2)^4}{4} + \frac{y^4}{4} + \frac{(x+2)^2 y^2}{2}.$$

sur l'ensemble

$$C := \{(x,y) \in [0,+\infty[^2 : \qquad 2 \leq x+y \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

On définit également :

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - x - y.$$

1. Montrer que g est convexe sur $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas concave.
   Solution :
   g est polynomial donc C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on peut donc calculer sa Hessienne.

   $$\text{Hess } g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Celle-ci a deux valeurs propres strictement positives ($2 > 0$), donc par le critère différentielle de convexité g est (strictement) convexe sur $\mathbb{R}^2$. $-g$ a une hessienne avec des valeurs propres strictement négatives, donc (par le même critère) $-g$ n'est pas convexe, donc g n'est pas concave.
2. Montrer que C est un convexe fermé.
   Solution :
   On met C sous la forme avec contrainte pour appliquer le théorème du cône normal.

   $$\begin{aligned} C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : & g_1(x,y) = -x \leq 0 \\ & g_2(x,y) = -y \leq 0 \\ & g_3(x,y) = -x - y + 2 \leq 0 \\ & g_4(x,y) = x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ & -g(x,y) \leq 0\}. \end{aligned}$$

   Attention, on vient de voir que $-g$ n'est pas convexe, donc il faut montrer que la dernière équation est redondante. Or, en mettant le polynôme de degré 2 en forme canonique :

   $$g(x,y) = (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 - 0.5.$$

donc $g(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow (x,y) \notin B((0.5,0.5),\sqrt{0.5})$. On veut voir que $(x,y) \in B((0.5,0.5),\sqrt{0.5})$ implique $x+y<2$. ON utilise Cauchy-Schwarz, pour $(x,y) \in B((0.5,0.5),\sqrt{0.5})$:

$$(x-0.5)*1+(y-0.5)*1 \leq \sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.5)^2}\sqrt{2} < 1$$

donc cela implique $x+y<1+1=2.$, donc par contraposée, $g_3(x,y) = \leq 0$ implique $g(x,y) \geq 0$ et donc on a :

$$\begin{aligned} C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : & g_1(x,y) = -x \leq 0 \\ & g_2(x,y) = -y \leq 0 \\ & g_3(x,y) = -x-y+2 \leq 0 \\ & g_4(x,y) = x^2+y^2-4 \leq 0 \end{aligned}$$

On remarque que g_i sont polynomiales donc continues. g_1, g_2, g_3 sont même affines donc convexe, $g_4(x,y) = g(x,y)+x+y-4$ est convexe comme somme d'une fonction convexe et d'une fonction affines.
Soit donc $C = \cap_{i=1}^4 g_i^{-1}(]-\infty,0])$ est convexe fermé comme intersection de 4 convexes fermés, obtenu par image réciproque du l'intervalle initial fermé $]-\infty,0]$ par g_i convexes continues.

3. Montrer que f est strictement convexe sur C.
Solution : f est polynomiale donc C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On calcule donc son gradient $\nabla f((x,y)) = ((x+2)^3+(x+2)y^2, y^3+y(x+2)^2)$ puis sa hessienne :

$$\text{Hess } f(x,y) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x+2)^2+y^2 & 2(x+2)y \\ 2(x+2)y & 3y^2+(x+2)^2 \end{pmatrix}$$

On a clairement $r \geq 0$ comme somme de carrés et même $r \geq 3 > 0$ car $x > -1$ implique $(x+2)^2 \geq 1$. De plus, le déterminant de la Hessienne est

$$\begin{aligned} rt-s^2 &= (3(x+2)^2+y^2)*(3y^2+(x+2)^2) - 4(x+2)^2y^2 \\ &= 5(x+2)^2y^2+3(x+2)^4+3y^4+y^2*(x+2)^2 \\ &\geq 3(x+2)^4 > 3. \end{aligned}$$

Donc la Hessienne de f est définie positive sur l'ouvert $]-1,+\infty[\times\mathbb{R}$ donc f strictement convexe sur cet ensemble, donc sur C.

4. Montrer que f admet un unique minimum global sur C.
Solution : C est borné car il est inclus dans une boule euclidienne $C \subset B_F(0,2)$. On a vu C fermé, donc C est compact comme fermé borné de $\mathbb{R}^2$, de dimension finie.
f est continue sur le compact C donc par le théorème de Weierstrass, f atteint son minimum (global) sur C.
Comme f est strictement convexe, f a au plus un minimum (global) sur C.

5. Calculer le cône normal $N_C((0,2))$
Solution : On a vu au 2 qu'on peut appliquer le théorème de détermination du cône normal vu g_i C^1 convexe.
On a $g_1(0,2) = g_3(0,2) = g_4(0,2) = 0, g_2(0,2) = -2 < 0$ donc g_1, g_3, g_4 sont les 3 contraintes actives en $(0,2)$. On calcule

$$\nabla g_1(0,2) = (-1,0), \nabla g_3(0,2) = (-1,-1) \nabla g_4(0,2) = (0,4)$$

Donc le théorème de détermination du cône normal donne :

$$N_C((0,2)) = \{\lambda_1(-1,0) + \lambda_3(-1,-1) + \lambda_4(0,4) : \lambda_i \geq 0\}.$$

ON voit que $(-1,0) = (-1,-1) + \frac{1}{4}(0,4)$ donc le premier vecteur est redondant et en fait :

$$N_C((0,2)) = \{\lambda_3(-1,-1) + \lambda_4(0,1) : \lambda_3, \lambda_4 \geq 0\}.$$

6. Calculer le point de $\mathbb{R}^2$ où f atteint son minimum global (justifier).
   f est convexe sur C, C^1 sur $\mathbb{R}^2$, donc on applique le théorème de minimisation d'une fonction convexe sur un convexe. Un minimum global doit vérifier

   $$-\nabla f((x,y)) \in N_C((x,y)).$$

   On calcule $\nabla f((x,y)) = ((x+2)^3 + (x+2)y^2, y^3 + y(x+2)^2)$, donc

   $$-\nabla f((0,2)) = -(8 + 2*4, 8 + 2*2^2) = (-16,-16) = 16(-1,-1) \in N_C((0,2))$$

   f atteint donc un minimum global en $(0,2)$.

Exercice 2 (7 points) Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $||\cdot||_1$ de distance associée par $d_1((x,y),(x',y')) = |x-x'| + |y-y'|$. On considère le système d'équations

$$\begin{cases} 2x = \cos^2(\frac{x+y}{2}), & (x,y) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]^2 \\ 8y = 4 + \sin(\tan(x-y)). \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que $C = ([0,\frac{\pi}{4}] \times [0,\frac{\pi}{4}], d_1)$ est complet
   Solution : $[0,\frac{\pi}{4}]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ complet, donc est complet. C est donc complet comme produit de 2 complets.
2. Déterminer une fonction $h : C \to C$ telle que $(x,y) \in C$ soit solution de (**??**) si et seulement si (x,y) est un point fixe de h.
   Solution : On pose $h(x,y) = (h_1(x,y), h_2(x,y))$ de sorte que $h(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow$ (**??**)

   $$\begin{cases} h_1(x,y) = \frac{1}{2}\cos^2(\frac{x+y}{2}), & (x,y) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]^2 \\ h_2(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sin(\tan(x-y)). \end{cases} \tag{2}$$

   h est bien définie sur C (à priori à valeur $\mathbb{R}^2$) car $C - C \subset [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur lequel tan est définie. Il reste à voir que h est à valeur dans C.
   Mais, en bornant sin et cos par 1, on trouve $0 \leq h_1(x,y) \leq \frac{1}{2}$ donc $h_1(C) \subset [0,\frac{\pi}{4}]$ et

   $$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \leq h_2(x,y) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

   donc $h(C) \subset [0,\frac{3}{4}]$ et finalement $h(C) \subset C$.

3. Montrer que $x \mapsto (\cos(x))^2$ est concave sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. En déduire que pour tout $(a, b) \in [0, \frac{\pi}{2}]^2$ avec $b > a$:
$$(\cos(b))^2 \leq (\cos(a))^2) + 2(b - a).$$

   Solution :
   On pose $f(x) = (\cos(x))^2$. f est C^2 sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions C^2 (cos avec lui même). On calcule $f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)$ puis
$$f''(x) = 2\sin^2(x) - 2\cos^2(x) = 4\sin^2(x) - 2(\sin^2(x) + \cos^2(x)) = 4\sin^2(x) - 2.$$
   On applique le critère différentielle de convexité à $-f$ sur l'intervalle ouvert $I =]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$. sin étant croissante sur I, on obtient, en utilisant $\sin(\frac{\pi}{3}) = 1/2$
$$-f''(x) \geq 2 - 4\sin^2(\frac{\pi}{3}) = 2 - \frac{4}{4} = 1 > 0, \qquad x \in I.$$
   donc $-f$ est convexe sur I, donc f est concave sur $[0, \frac{\pi}{4}] \subset I$.
   En appliquant la caractérisation de la convexité en terme de graphe au dessus de la tangente, on obtient, pour $a, b \in I, b > a$:
$$-f(b) \geq -f(a) + -f'(a)(b - a)$$
   donc en prenant l'opposée :
$$(\cos(b))^2 \leq (\cos(a))^2) + f'(a)(b - a) \leq (\cos(a))^2) + 2(b - a),$$
   vu $|f'(a)| = 2|\cos(a)\sin(a)| \leq 2$.
4. Montrer que pour tout $(a, b) \in C$:
$$|\sin(\tan(a)) - \sin(\tan(b))| \leq |a - b|$$
   Solution : On pose $g(x) = \sin(\tan(x))$ avec $g : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [-1, 1]$. g est bien définie (car tan est définie sur l'intervalle) et C^1 par composée de fonctions C^1 (sin et tan). On obtient par dérivation des fonctions composées
$$g'(x) = \cos(\tan(x))(1 + \tan^2(x))$$
   tan est croissante impaire sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ donc $|tan(x)| \leq \tan(\pi/4) = 1$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Dong $|g'(x)| \leq 2$ pour tout x dans son domaine de définition. Par le théorème des accroissements finies pour tout $(a, b) \in C$ il existe $c \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ tel que
$$|\cos(\tan(a)) - \cos(\tan(b))| = g'(c)|a - b| \leq |a - b|.$$
5. Montrer que h est K-lipschitzienne pour une constante K que l'on déterminera.
   Solution :
   On doit borner

$$
\begin{aligned}
&\|h(x,y) - h(x',y')\|_1 \\
&\quad = \frac{1}{2}\left|\cos^2(\frac{x+y}{2}) - \cos^2(\frac{x'+y'}{2})\right| + \frac{1}{8}\left|\sin(\tan(x-y)) - \sin(\tan(x'-y'))\right| \\
&\quad \leq \frac{1}{2}2\left|\frac{x+y}{2} - \frac{x'+y'}{2}\right| + \frac{1}{8}\left|(x-y) - (x'-y')\right| \\
&\quad \leq \frac{|x-x'| + |y-y'|}{2} + \frac{|x-x'| + |y-y'|}{8} = \frac{5\|(x,y) - (x',y')\|_1}{8}.
\end{aligned}
$$

où on peut utiliser à la deuxième ligne les questions 3 et 4, car $(x,y) \in C$ implique $\frac{x+y}{2} \in [0,\pi/4]$ et $x - y \in [-\pi/4, \pi/4]$. On utilise juste l'inégalité triangulaire à la troisième ligne.

Donc h est K-lipschitzienne pour $K = 5/8$.

6. Montrer que le système (**??**) admet une unique solution dans C.

   Solution :

   Comme h est K-lipschitzienne avec $K < 1$ sur C complet, le théorème de point fixe de Banach conclut que h a un unique point fixe, donc par 2. le système (**??**) admet une unique solution dans C.