L3 Mathématiques et Economie ou Informatique 7 novembre 2025

2025-2026

CC2 : Théorie de la mesure et topologie

Durée : 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS

LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (5 points) : (cf. cours)

Exercice 1 (9 points) On se place dans l'e.v.n $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$, c'est à dire muni de la norme euclidienne. On cherche à minimiser la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{xy^2}{4}.$$

sur l'ensemble

$$C := \{(x,y) \in [0,+\infty[^2: \qquad x^2+y^2 < 4\}$$

On définit également :

$$g(x,y) = x^2 + y^2,$$

et

$$O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad x^2+y^2 < 4\}.$$

1. Montrer que g est convexe sur $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas concave.
   Solution :
   g est polynomiale donc C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on peut donc calculer sa Hessienne.

$$\text{Hess } g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Celle-ci a deux valeurs propres strictement positives ($2 > 0$), donc par le critère différentiel de convexité g est (strictement) convexe sur $\mathbb{R}^2$. $-g$ a une hessienne avec des valeurs propres strictement négatives, donc (par le même critère) $-g$ n'est pas convexe, donc g n'est pas concave.

2. Montrer que O est un ouvert convexe.

   Solution 1 : O es la boule ouverte de centre 0 et de rayon 2 pour la norme euclidienne. On a vu en cours que les boules d'e.v.n. sont convexes et que les boules ouvertes sont des ouverts.

   Solution : $O = g^{-1}(]-\infty, 4[)$ est l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]-\infty, 4[$ par g continue, donc O est ouvert. C'est aussi l'image réciproque de 'lintervalle initial $]-\infty, 4[$ par g convexe, donc O est convexe.

3. Montrer que C est convexe.

   Solution 1 : $C = O\cap]-\infty, 0]^2$. $]-\infty, 0]^2$ est un produit d'intervalles, donc convexe et C est convexe comme l'intersection des convexes O et $]-\infty, 0]^2$.

   Solution 2 : On réécrit :

   $$C := \{(x, y) \in O : \qquad x \geq 0, y \geq 0\}$$

   On pose $g_1(x, y) = -x$, $g_2(x, y) = -y$, qui sont linéaires donc convexe sur $\mathbb{R}^2$. On décrit donc C comme $C = O \cap g_1^{-1}(]-\infty, 0]) \cap g_2^{-1}(]-\infty, 0])$ qui est donc convexe comme intersection du convexe O et de deux convexes obtenus comme image réciproque de $]-\infty, 0]$ par g_i convexes.

4. Est-ce que C est compact ? (justifier)

   Solution : Non, C n'est pas compact car il n'est pas fermé. En effet $c_n = (2 - \frac{1}{n}, 0) \in C$ car $\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 + 0^2 < 2^2 = 4$ et les coordonnées sont positives. Mais $c_n \to (2, 0) \notin C$, vu $(2, 0) \notin O$ ce qui montre que C n'est pas fermé par caractérisation séquentielle.

5. Montrer que f est strictement convexe sur C.

Solution 1 : f est polynomiale donc C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On calcule donc son gradient $\nabla f((x,y)) = (x+1+\frac{y^2}{4}, y+\frac{xy}{2})$ puis sa hessienne :

$$\text{Hess } f(x,y) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} & 1+\frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

On a clairement $r = 1 > 0$. De plus, le déterminant de la Hessienne est

$$rt - s^2 = 1.(1+\frac{x}{2}) - \frac{y^2}{4} \geq (1+\frac{x}{2}) - \frac{x^2+y^2}{4} > \frac{x}{2} \geq 0.$$

Donc sur C ce gradient est strictement positif. **ATTENTION**, comme C n'est pas ouvert, on ne peut PAS appliquer le critère différentiel de convexité sur C. On pose donc $h(x,y) = \frac{y^2}{4} - (1+\frac{x}{2})$ l'opposée de la hessienne

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1+\frac{x}{2}) - \frac{y^2}{4} > 0\} = h^{-1}(]-\infty, 0[) \supset C$$

où l'inclusion de C vient de l'inégalité précédente. h est C^2 et convexe sur $\mathbb{R}^2$ car la hessienne de h a les valeurs propres $1/2 \geq 0$ et 0, donc U est un ouvert convexe (comme image réciproque d'un intervalle ouvert initial par h convexe continue).

On peut donc appliquer le critère différentiel de convexité à f sur l'OUVERT CONVEXE U. Vu que le déterminant de la Hessienne est stictement positif sur U par définition de U et aussi $r > 0$, Hess f est définie positive sur U donc f est strictement convexe sur U donc sur C contenu dans U.

Solution 2 : (le début est le même) f est polynomiale donc C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On calcule donc son gradient $\nabla f((x,y)) = (x+1+\frac{y^2}{4}, y+\frac{xy}{2})$ puis sa hessienne :

$$\text{Hess } f(x,y) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} & 1+\frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

De plus, le déterminant de la Hessienne est

$$rt - s^2 = 1.(1 + \frac{x}{2}) - \frac{y^2}{4} \geq (1 + \frac{x}{2}) - \frac{x^2 + y^2}{4} > \frac{x}{2} \geq 0.$$

Donc sur C ce gradient est strictement positif. **La nouveauté commence là**. On applique le critère différentiel de convexité sur l'intérieur de C qui est l'ouvert convexe $O\cap]-\infty, 0[^2$ (on n'a pas besoin de savoir que c'est l'intérieur... mais que C est dans l'adhérence de cet ensemble) On déduit donc que pour tout $(x, y), (x', y') \in V = O\cap]-\infty, 0[^2$, on obtient pour $\lambda \in]0, 1[$:

$$f(\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', y')) < \lambda f(x, y) + (1 - \lambda)f(x', y'))$$

En appliquant à $(x', 1/n)$ ou $(1/n, y')$, on en déduit à la limite les inégalités larges (pour $x', y' \in [0, 2[$, toujours $(x, y) \in V$:

$$f(\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', 0)) \leq \lambda f(x, y) + (1 - \lambda)f(x', 0)$$
$$f(\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(0, y')) \leq \lambda f(x, y) + (1 - \lambda)f(0, y')$$
$$f(\lambda(0, y') + (1 - \lambda)(x', 0)) \leq \lambda f(0, y') + (1 - \lambda)f(x', 0)$$

Cela ne suffit pas à la convexité stricte, juste à la convexité large, mais on améliore en passant par un point intermédiaire
Par exemple, on obtient ainsi la première inégalité stricte :

$$\begin{aligned}
&f(\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', 0)) \\
&\qquad = f(\frac{\lambda}{1 + \lambda}(x, y) + \frac{\lambda^2}{1 + \lambda}(x, y) + \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda}(x', 0)) \\
&\qquad < \frac{\lambda}{1 + \lambda}f(x, y) + \frac{1}{1 + \lambda}f(\lambda^2(x, y) + (1 - \lambda^2)(x', 0)) \\
&\qquad \leq \frac{\lambda}{1 + \lambda}f(x, y) + \frac{1}{1 + \lambda}\lambda^2 f(x, y) + \frac{1}{1 + \lambda}(1 - \lambda^2)f(x', 0) \\
&\qquad = \lambda f(x, y) + (1 - \lambda)f(x', 0).
\end{aligned}$$

où l'inégalité stricte de la première ligne vient de $\lambda^2(x, y) + (1 - \lambda^2)(x', 0) \in V$ et la deuxième ligne vient de l'inégalité large de convexité qui inclut un point du bord $(x', 0)$.

6. Montrer que f admet un unique minimum global sur C.

Solution 1 : Comme f est strictement convexe sur O, d'après le cours, f admet au plus un minimum sur O. Il reste à voir l'existence, mais comme C n'est pas compact, on va utiliser son adhérence (mais on a juste besoin de savoir que c'est un compact contenant C, pas exactement l'adhérence).

On pose

$$\begin{aligned} F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\} \\ &= g^{-1}]-\infty,4] \cap g_1^{-1}(]-\infty,0]) \cap g_2^{-1}(]-\infty,0]) \end{aligned}$$

est fermé comme intersection d'images récirpoques d'intervalles fermés par g, g_1, g_2 continues.

F est inclus dans la boule euclidienne de centre $(0,0)$ et de rayon 2, donc F est borné et fermé en dimension finie donc compact.

Par le théorème de Weierstrass, f admet un minimum sur F, il reste à voir qu'il n'est pas atteint sur $F - C$ et ce qui donnera qu'il est atteint sur C et donc que f aura un minimum sur C.

Or

$$F - C = \{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 = 4\},$$

donc pour $(x,y) \in F - C$, on a

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2+2x+1}{2} + \frac{xy^2}{4} \geq \frac{x^2+y^2}{2} = 2$$

en utilisant les conditions de positivités pour la première inégalité et l'équation pour la deuxième. Enfin, $(0,1) \in C$ et $f(0,1) = 1 < 2$ donc 2 ne peut pas être le minimum de f sur F, ce qui conclut.

Solution 2 : Comme f est strictement convexe sur O, d'après le cours, f admet au plus un minimum sur O. On répond à l'existence après la question 8, par le 8, on a montré que f admet un minimum global en $(0,0)$ sur C, d'où l'existence du minimum.

7. Calculer le cône normal $N_C((0,0))$

   Solution : On a vu au 2 qu'on peut appliquer le théorème de détermination du cône normal vu g_i C^1 convexe.

   On a $g_1(0,0) = g_3(0,2) = g_4(0,2) = 0$, $g_2(0,2) = -2 < 0$ donc g_1, g_3, g_4 sont les 3 contraintes actives en $(0,2)$. On calcule

$$\nabla g_1(0,2) = (-1,0), \nabla g_3(0,2) = (-1,-1) \nabla g_4(0,2) = (0,4)$$

   Donc le théorème de détermination du cône normal donne :

$$N_C((0,0)) = \{\lambda_1(-1,0) + \lambda_3(0,-1) : \lambda_i \geq 0\}.$$

8. Calculer le point de C où f atteint son minimum global (justifier).

   Solution : f est convexe sur C, C^1 sur O, donc on applique le théorème de minimisation d'une fonction convexe sur un convexe. Un minimum global doit vérifier

$$-\nabla f((x,y)) \in N_C((x,y)).$$

   On calcule $\nabla f((0,0)) = (1,0)$, donc

$$-\nabla f((0,0)) = (-1,0) \in N_C((0,0))$$

   f atteint donc un minimum global en $(0,0)$.

Exercice 2 (6 points + Bonus : 2 points) Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $||\cdot||_1$ de distance associée par $d_1((x,y),(x',y')) = |x-x'| + |y-y'|$. On considère le système d'équations

$$\begin{cases} 3x = \cos(\frac{(x-y)^2}{9}), & (x,y) \in \left[0, \frac{3}{2}\right]^2 \\ y = \sqrt{1+\sin(x+y)}. \end{cases} \qquad (1)$$

1. Montrer que $K = ([0,\frac{3}{2}] \times [0,\frac{3}{2}], d_1)$ est compact. Est-ce que K est complet ?

Solution :

$[0, \frac{3}{2}]$ est fermé borné de $\mathbb{R}$ (de dimension finie) donc compact, donc K est compact car produit de compacts.

Or un compact est complet donc K est complet.

Aure solution un compact est fermé et K est fermé dans $\mathbb{R}^2$ complet (car de dimension finie) donc K est complet.

2. Déterminer une fonction $h : K \to K$ telle que $(x, y) \in K$ soit solution de (1) si et seulement si (x, y) est un point fixe de h.

Solution : On pose $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$ de sorte que $h(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow (1)$

$$\begin{cases} h_1(x, y) = \frac{1}{3}\cos(\frac{(x-y)^2}{9}), & (x, y) \in \left[0, \frac{3}{2}\right]^2 \\ h_2(x, y) = \sqrt{1 + \sin(x + y)}. \end{cases} \tag{2}$$

h est bien définie sur K (à priori à valeur $\mathbb{R}^2$) la racine carrée est définie sur $[0, +\infty[$ et $1 + \sin$ est à valeur $[0, 2]$. Or $[0, \frac{3}{2}] - [0, \frac{3}{2}] \subset [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur lequel cos est positif, donc h_1 est à valeur $[0, \frac{3}{2}]$ sur K vu que le cos est aussi borné par 1.

Et vu $[0, \frac{3}{2}] + [0, \frac{3}{2}] = [0, 3] \subset [0, \pi]$, $(x, y) \mapsto \sin(x + y)$ est à valeur $[0,1]$ sur K donc h_2 est à valeur $[1, \sqrt{2}] \subset [0, \frac{3}{2}]$ et finalement $h(K) \subset K$.

3. Montrer pour tout $(a, b) \in [0, \frac{3}{2}]^2$:

$$|\cos(b^2) - \cos(a^2)| \leq 3|b - a|.$$

Solution :

On pose $f(x) = (\cos(x^2))$ avec $f : [0, 3/2] \to [0, 1]$. f est C^2 sur $\mathbb{R}$ comme composée d'un polynôme et d'une fonction usuelle cos.

On calcule par dérivation des fonctions composées $f'(x) = -2x\sin(x^2)$. On a $|f'(x)| \leq |2x| \leq 2\frac{3}{2} = 3$ pour tout x dans son domaine de définition. Par le théorème des accroissements finies pour tout $(a,b) \in C$ il existe $c \in]0,3/2[$ tel que

$$|f(a) - f(b)| = f'(c)|a-b| \leq 3|a-b|.$$

4. **(Bonus : 2 points)** Montrer que pour tout $(a,b) \in [0,\frac{3}{2}]^2$:

$$|\sqrt{1+\sin(a)} - \sqrt{1+\sin(b)}| \leq \frac{|a-b|}{2}$$

Solution : On pose $g(x) = \sqrt{1+\sin(x)}$ avec $g : [0,\pi] \to [1,\sqrt{2}]$. g est bien définie (car $1+\sin$ est positive donc dans le domaine de définitiion de la racine carrée) et C^1 par composée de fonctions C^1 ($\sin$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0,+\infty[$).

On obtient par dérivation des fonctions composées

$$g'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{1+\sin(x)}}$$

Comme $\sqrt{1+\sin(x)} \geq 1$ pour $x \in [0,\pi]$, on a $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout x dans son domaine de définition. Par le théorème des accroissements finies pour tout $(a,b) \in C$ il existe $c \in]0,\pi[$ tel que

$$|\sqrt{1+\sin(a)} - \sqrt{1+\sin(b)}| = g'(c)|a-b| \leq \frac{|a-b|}{2}.$$

5. Montrer que h est C−lipschitzienne pour une constante C que l'on déterminera.

Solution : On doit borner

$$\begin{aligned}
\|h(x,y) - h(x',y')\|_1 &= \frac{1}{3}\left|\cos\left(\frac{(x-y)^2}{9}\right) - \cos\left(\frac{(x'-y')^2}{9}\right)\right| \\
&+ \left|\sqrt{1+\sin(x+y)} - \sqrt{1+\sin(x'+y')})\right| \\
&\leq \frac{1}{3}3\left|\frac{x-y}{3} - \frac{x'-y'}{3}\right| + \frac{1}{2}\left|(x+y) - (x'+y')\right| \\
&\leq \frac{|x-x'| + |y-y'|}{3} + \frac{|x-x'| + |y-y'|}{2} = \frac{5\|(x,y) - (x',y')\|_1}{6}.
\end{aligned}$$

Donc h est C−lipschitzienne pour $C = 5/6$.

6. Montrer que le système (1) admet une unique solution dans C.

Solution :

Comme h est C–lipschitzienne avec $C = 5/6 < 1$ sur K complet, le théorème de point fixe de Banach conclut que h a un unique point fixe, donc par 2. le système (1) admet une unique solution dans K.