

CC2 : Topologie et Théorie de la mesure

Durée : 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET
TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS

LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (5 points) :

1. Donner la définition d'un ensemble convexe.
2. Énoncer le théorème de projection sur un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.
3. Donner deux systèmes de générateurs usuels des boréliens de $\mathbb{R}^n$.
4. Énoncer le lemme de Fatou.

Exercice 1 (9 points) On se place dans l'e.v.n $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, c'est à dire muni de la norme euclidienne. On cherche à minimiser la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{xy^2}{4}.$$

sur l'ensemble

$$C := \{(x, y) \in [0, +\infty[^2 : x^2 + y^2 < 4\}.$$

On définit également :

$$g(x, y) = x^2 + y^2,$$

et

$$O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}.$$

1. Montrer que g est convexe sur $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas concave.
2. Montrer que O est un ouvert convexe.
3. Montrer que C est convexe.
4. Est-ce que C est compact? (justifier)
5. Montrer que f est strictement convexe sur C .
6. Montrer que f admet un unique minimum global sur C .
7. Calculer le cône normal $N_C((0, 0))$.
8. Calculer le point de C où f atteint son minimum global (justifier).

Exercice 2 (6 points + Bonus : 2 points) Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_1$ de distance associée par $d_1((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|$. On considère le système d'équations

$$\begin{cases} 3x = \cos\left(\frac{(x-y)^2}{9}\right), \\ y = \sqrt{1 + \sin(x+y)}. \end{cases} \quad (x, y) \in \left[0, \frac{3}{2}\right]^2 \quad (1)$$

1. Montrer que $K = ([0, \frac{3}{2}] \times [0, \frac{3}{2}], d_1)$ est compact.
Est-ce que K est complet? (justifier)
2. Déterminer une fonction $h : K \rightarrow K$ telle que $(x, y) \in K$ soit solution de (1) si et seulement si (x, y) est un point fixe de h .
3. Montrer pour tout $(a, b) \in [0, \frac{3}{2}]^2$:

$$|\cos(b^2) - \cos(a^2)| \leq 3|b - a|.$$

4. **(Bonus : 2 points)** Montrer que pour tout $(a, b) \in [0, \frac{3}{2}]^2$:

$$|\sqrt{1 + \sin(a)} - \sqrt{1 + \sin(b)}| \leq \frac{|a - b|}{2}$$

5. Montrer que h est C -lipschitzienne pour une constante C que l'on déterminera.
6. Montrer que le système (1) admet une unique solution dans K .