L3 Mathématiques et Economie ou Informatique **13 décembre 2024**
2024–2025

CC de seconde chance

Durée : 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (5 points) :

1. Donner la définition d'un ensemble négligeable.
2. Énoncer le théorème de Fubini-Tonelli pour les familles sommables.
3. Énoncer le résultat de complétude d'un espace de fonction continue vu en cours .
4. Énoncer le théorème de projection sur un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.
5. Énoncer le théorème d'interversion série-intégrale dans le cas positif.

Exercice 1 (3 points) Est-ce que la famille suivante est sommable ? (justifier)

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \frac{1}{(|n|+|m|+1)^2}.$$

Exercice 2 (4 points) On définit $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ par

$$g(x) = (x+7)^{1/4}.$$

On définit $I = [0, 9]$, avec la métrique induite par la valeur absolue $d(x, y) = |x - y|$.

1. Montrer que I est complet.
2. Montrer que g est concave sur I.
3. Montrer que pour tout $x \in I$, on a

$$g(x) \leq 2 + \frac{1}{32}(x-9)$$

4. Montrer que g est K-lipschitzienne sur I pour un K que l'on trouvera.
5. Montrer que g admet un unique point fixe sur I.

Exercice 3 (8 points) On se place dans l'e.v.n $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$.
On pose
$$C := \{(x,y) \in [0,+\infty[^2 \colon x < y\}$$
et
$$F = \{(x,y) \in [0,+\infty[^2 \colon x \leq y\}$$
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x,y) = (x+1)^2 + (y-1)^2.$$
On cherche à trouver le minimum de f sur C.

1. Montrer que C est convexe.
2. Est-ce que C est ouvert ? (justifier)
3. Montrer que l'adhérence $\overline{C} = F$? est-ce que C est fermé ? (justifier)
4. Est-ce que F est compact ? (justifier)
5. Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
6. Montrer que f admet au plus un minimum sur C.
7. Calculer le cône normal $N_C((0,1))$.
8. Montrer que f admet un minimum sur C.