L3 Mathématiques et Economie ou Informatique 05/01/2026

2025-2026

Examen : Topologie et Théorie de la mesure

Durée : 2 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS

LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Le barême est sur 25 points.

Question de Cours (5 points) :

1. Donner la définition d'une base hilbertienne.
2. Énoncer le théorème de changement de variables (pour l'intégrale de Lebesgue).
3. Énoncer l'inégalité de Hölder.
4. Énoncer le théorème de représentation de Riesz.
5. Énoncer l'égalité de Parseval.
6. Énoncer le théorème d'approximation de Weierstrass.

Exercice 1 (4 points) Soit $I = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : n > m\}$. Pour $p \geq 1$, on rappelle que $\ell^p(I)$ est l'ensemble des familles de puissance p sommable.

1. Montrer que I est dénombrable.
2. Soit $u_{n,m} = \frac{1}{n+m}$ pour $(n, m) \in I$.
   Pour quels $p \geq 1$ a-t-on $(u_{n,m})_{(n,m)\in I} \in \ell^p(I)$? (justifier)
3. En déduire que pour $q > p \geq 1$, $\ell^q(I)$ n'est PAS inclus dans $\ell^p(I)$.

Exercice 2 (3 points) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \cos^n(x)e^{-|x|}$.

1. Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue λ_1.
2. Montrer que $\left(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1\right)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 (3 points) Soit $\Omega = ([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1]), \lambda)$ avec la mesure de Lebesgue $\lambda = \lambda_1$ restreinte sur $[-1, 1]$. Soit $f : \Omega \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la fonction définie par : $f(x) = 1_{[-1,0.5]}(x) - 1_{[-0.5,1]}(x)$. (On rappelle que 1_A est la fonction indicatrice de A.)

1. Montrer que f est borélienne.
2. Calculer la tribu $\sigma(f) \subset \mathcal{B}([-1, 1])$ engendrée par f. (On rappelle que $\sigma(f)$ est la plus petite tribu sur $[-1, 1]$ rendant f mesurable).
3. Calculer la mesure image λ_f de f.

Exercice 4 (10 points) On rappelle et on pourra utiliser que, par le cours, $e_n(x) = \exp(inx)$ définit une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $K = L^2([0, 2\pi], \frac{\lambda_1}{2\pi}; \mathbb{C})$.

Soit l'espace $H = (L^2([0, 2\pi]^2, \frac{\lambda}{4\pi^2}; \mathbb{C}), ||\cdot||_2)$ des (classes d'équivalence à égalité presque partout prêt de) fonctions de carré intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda = \lambda_2$ sur $[0, 2\pi]^2$ à valeurs complexes.

On pose $e_{n,m}(x, y) = e_n(x)e_m(y) = \exp(i(nx + my))$.

0. Soient $f, g \in H$. Rappeler la formule du produit scalaire de H :$\langle f, g\rangle$.

1. Montrer que $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, on a $e_{n,m} \in H$.

2. Soit $f \in H$, on définit $f_x(y) = f(x, y)$. On note $\langle\cdot,\cdot\rangle_K$ le produit scalaire de K

2.a) Montrer que f est λ−intégrable sur $[0, 2\pi]^2$, que pour presque tout $x \in [0, 2\pi]$, $f_x \in L^2([0, 2\pi], \frac{\lambda_1}{2\pi}; \mathbb{C})$ et qu'on a l'égalité :

$$||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} d\lambda_1(x)\langle f_x, f_x\rangle_K.$$

2.b) Montrer que $g_m \in L^2([0, 2\pi], \frac{\lambda_1}{2\pi}; \mathbb{C})$ pour g_m définie (pour λ_1−p.p x) par

$$g_m(x) = \langle e_m, f_x\rangle_K = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} d\lambda_1(y) \exp(-imy)f(x, y) \tag{1}$$

2.c) En utilisant le théorème de Fubini, montrer que

$$\langle e_{n,m}, f\rangle = \langle e_n, g_m\rangle_K.$$

2.d) En déduire que $(e_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ est une famille orthonormale de H.

3. On cherche à montrer que $(e_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ est une base hilbertienne de H.

On fixe donc une fonction $f \in H$ telle que $\langle e_{n,m}, f\rangle = 0$, pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$.

3.a) On rappelle que g_m a été définie par la formule (1). Montrer qu'il existe A borélien avec $\lambda_1(A^c) = 0$ et telle que $g_m(x) = 0$ pour tout $x \in A$.

3.b) Montrer que pour tout $x \in A$, f_x est nulle λ_1 presque partout.

3.c) En déduire que $f = 0$ dans H.

3.d) Conclure : Montrer que $(e_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ est une base hilbertienne de H.

4. On pose $h(x, y) = xy$. Montrer que $h \in H$ et calculer $\langle e_{n,m}, h\rangle$, pour $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$.

5. En appliquant une égalité du cours à h, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.