L3 Mathématiques et Economie ou Informatique **8 janvier 2025**
2024–2025 **8H**

CT 1 : Topologie et Théorie de la mesure

Durée: 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (10 points) :

1. Donner la définition de la tribu produit.
2. Énoncer le théorème de Fubini (pour l'intégrale de Lebesgue).
3. Énoncer le théorème de convergence dominée L^p.
4. Énoncer le théorème de Riesz-Fischer.
5. Énoncer l'inégalité de Jensen.
6. Énoncer l'inégalité de Bessel.
7. Énoncer le théorème d'approximation de Weierstrass.

Exercice 1 (4 points + Bonus : 2 points) Soit $H = L^2([-\pi, \pi], \frac{1}{2\pi}\lambda; \mathbb{C})$. Soit $e_n(x) = exp(inx)$. On rappelle que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de H. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 1_{[0,\pi[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \pi[\\ 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

1. Montrer que $f \in H$ et calculer $||f||_2$.
2. Calculer les produits scalaires $\langle e_n, f\rangle$
3. Rappeler une formule pour f en terme des $(\langle e_n, f\rangle)$.
4. En utilisant une formule du cours que l'on précisera, montrer que:
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4} .$$
5. En déduire que la famille $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}$ est sommable et calculer sa somme.
6. **Bonus:(2 points)** Montrer que la famille suivante $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre base hilbertienne de H, avec:
$$s_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{2}\sin(kx) & \text{si } n = 2k+1 \\ \sqrt{2}\cos(kx) & \text{si } n = 2k > 0 \end{cases}$$

Exercice 2 (6 points + Bonus : 3 points) On fixe $p, q, r \in [1, +\infty[$ vérifiant $p \geq q$ et :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \tag{1}$$

On pose $s = p - r$ et on fixe des constantes $C, D \in [0, +\infty[$. On remarque que (1) équivaut à

$$\frac{r}{q} = \frac{s}{p}. \tag{2}$$

et donc $p \geq q, r \geq 1$ impliquent $s \geq 1$ (inégalités qu'on pourra utiliser sans démonstration). On définit

$$A = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2 : y \geq \frac{1}{x}\},$$

et $g : A \to \mathbb{R}$ par $g(x, y) = Cx^s + Dy^r$.

1. Montrer que A est convexe.
2. Montrer que g est convexe sur A.
3. Calculer le cône normal $N_A((x, y))$ en un point de la frontière
$$F = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2 : y = \frac{1}{x}\}$$
de A (on ne demande PAS de vérifier que F est la frontière de A).
4. Montrer que g atteint son minimum sur A en un point de F et que ce minimum vaut:
$$m = C\left(\frac{rD}{sC}\right)^{s/(r+s)} + D\left(\frac{sC}{rD}\right)^{r/(r+s)}.$$
5. Montrer que $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \ln(x)$ est concave.
6. En déduire que, pour tout $a, b \geq 0$:
$$\frac{(ab)^r}{r} \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$
7. **Bonus : 1.5 points** Soient $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, Y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
On pose $C = \dfrac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{p}$ et $D = \dfrac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{q}$, vérifier que $m = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{r/p}\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{r/q}}{r}$.
8. **Bonus : 1.5 points** Déduire des questions précédentes que:
$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i y_i|^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}$$
9. De quelle inégalité du cours l'inégalité du 8. est-elle un cas particulier ?