L3 Mathématiques et Economie ou Informatique **8 janvier 2025**
2024–2025 **8H**

Correction du CT 1 : Topologie et Théorie de la mesure

Durée: 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Exercice 1 (4 points + Bonus : 2 points) Soit $H = L^2([-\pi,\pi], \frac{1}{2\pi}\lambda; \mathbb{C})$. Soit $e_n(x) = exp(inx)$. On rappelle que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de H. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 1_{[0,\pi[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,\pi[\\ 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

1. (1 point) Montrer que $f \in H$ et calculer $||f||_2$.

   Solution:

   H est l'espace des fonctions mesurables h telle que $\int_{[-\pi,\pi]} |h(t)|^2 d\lambda(t) < +\infty$.

   On commence donc par remarquer que f est l'indicatrice de $A = [0,\pi[$, et $A = [0,\pi] \cap]-\pi,\pi[$ est l'intersection d'un fermé et d'un ouvert, donc l'intersection de 2 boréliens, donc un borélien. Donc h est mesurable comme indicatrice d'une fonction mesurable.

   On calcule donc $\int_{[-\pi,\pi]} |f(t)|^2 d\lambda(t) = \int_{[0,\pi[} 1 d\lambda(t) = \pi < +\infty$. D'où

   $$||f||_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} |f(t)|^2 d\lambda(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2. (0.5 point) Calculer les produits scalaires $\langle e_n, f\rangle$

   Solution: On applique la définition du produit scalaire:

   $$\langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \overline{e_n(t)} f(t) d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,\pi[} exp(-int) d\lambda(t).$$

   Comme la fonction $t \mapsto exp(-int)$ est continue bornée (sur l'intervalle bornée $[0,\pi[$ donc intégrable au sens de Riemann), son intégrale de Riemann coïncide avec celle de Lebesgue et on peut la calculer en distinguant 2 cas:

   (a) Si $n = 0$ alors

   $$\langle e_0, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,\pi[} 1 d\lambda(t) = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

   (b) Si $n \neq 0$

   $$\langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2\pi}[\frac{e^{-int}}{-in}]_0^\pi = \frac{1-(-1)^n}{2\pi i n}.$$

3. (0.5 point) Rappeler une formule pour f en terme des $(\langle e_n, f\rangle)$.

Solution: D'après le théorème des bases, on a

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n\langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2}e_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1-(-1)^n}{2\pi i n} e_n.$$

4. (1 point) En utilisant une formule du cours que l'on précisera, montrer que:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}\ .$$

Solution: L'égalité de Parseval pour la base hilbertienne de H: $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ s'écrit:

$$||f||_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle e_n, f\rangle|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left|\frac{1-(-1)^n}{2\pi i n}\right|^2.$$

Or, on a vu à la question 1 que $||f||_2^2 = \frac{1}{2}$ et aussi:

$$\left|\frac{1-(-1)^n}{2\pi i n}\right|^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \frac{1}{(\pi n)^2} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

Donc, en résumant on obtient:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi^2(2n+1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

soit le résultat voulu:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}\ .$$

5. (1 point) En déduire que la famille $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Solution: Par sommation par paquet (cas positif), on décompose la somme sur les termes positifs et négatifs, et on trouve que la série est de même nature que la série de Riemann: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ qui est convergente, donc la famille est sommable.

Par sommation par paquet (cas positif), on décompose la somme en la somme sur les pairs et les impairs:

$$A = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{A}{4}.$$

Donc la somme voulue A est (par la question précédente):

$$\frac{3A}{4} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

d'où $A = \frac{\pi^2}{3}$.

6. **Bonus:(2 points)** Montrer que la famille suivante $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre base hilbertienne de H, avec:
$$s_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{2}\sin(kx) & \text{si } n = 2k+1 \\ \sqrt{2}\cos(kx) & \text{si } n = 2k > 0 \end{cases}$$

   Solution:

   On a $e_0 = s_0$ et par les formules d'Euler pour $n > 0$:
$$e_n = \frac{s_{2n} + is_{2n+1}}{\sqrt{2}}, \qquad e_{-n} = \frac{s_{2n} - is_{2n+1}}{\sqrt{2}}.$$

   en inversement, on a:
$$s_{2n} = \frac{e_n + e_{-n}}{\sqrt{2}}, \qquad s_{2n+1} = \frac{e_n - e_{-n}}{i\sqrt{2}}.$$

   En particulier $(e_n, e_{-n}) = (s_{2n}, s_{2n+1})$ et donc $(s_n, n \in \mathbb{N}) = (e_n, n \in \mathbb{Z})$ et donc cet espace est dense dans H vu que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base de H.

   Il reste à voir l'orthonormalité. Mais en utilisant la base des e_n, on obtient:
$$||s_{2n}||_2^2 = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = 1 = ||s_{2n+1}||_2^2$$

   $\langle s_n, s_m\rangle = 0$ pour les parties entières $\lfloor n/2 \rfloor \neq \lfloor m \rfloor$ et enfin,
$$\langle s_{2k}, s_{2k+1}\rangle = \frac{1}{2i} - \frac{1}{2i} = 0.$$

   EN bilan, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une famille orthonormée qui engendre un espace dense, donc c'est une base hilbertienne.

Exercice 2 (6 points + Bonus : 3 points) On fixe $p, q, r \in [1, +\infty[$ vérifiant $p \geq q$ et :
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \tag{1}$$

On pose $s = p - r$ et on fixe des constantes $C, D \in [0, +\infty[$. On remarque que (1) équivaut à
$$\frac{r}{q} = \frac{s}{p}. \tag{2}$$
et donc $p \geq q, r \geq 1$ impliquent $s \geq 1$ (qu'on pourra utiliser librement.
On définit
$$A = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2 \colon y \geq \frac{1}{x}\},$$
et $g : A \to \mathbb{R}$ par $g(x, y) = Cx^s + Dy^r$.

1. (1 point) Montrer que A est convexe.

   Solution:

   On pose $f(x,y) = \frac{1}{x} - y$ qui est définie sur le convexe ouvert $]0,+\infty[^2$ (comme produit d'intervalles ouverts). f est C^2 comme fraction rationnelle à dénominateur non nul (sur $]0,+\infty[^2$). On peut donc utiliser le test différentiel de convexité, en calculant la hessienne:

   $$\text{Hess } f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   qui est diagonale donc à valeur propre positive. Donc f est convexe et $A = f^{-1}(]-\infty, 0])$ est donc convexe comme image réciproque de $]-\infty, 0]$ par une fonction convexe.

2. (0.5 point) Montrer que g est convexe sur A.

   Solution:

   On montre, comme pour f, que g est convexe sur le convexe ouvert $]0,+\infty[^2$. Explicitement $g(x,y) = C\exp(s\ln(x)) + D\exp(r\ln(y))$ est C^2 par somme et composée d'exp et de ln. On calcule la Hessienne

   $$\text{Hess } g(x,y) = \begin{pmatrix} Cs(s-1)x^{s-2} & 0 \\ 0 & Dr(r-1)y^{r-2} \end{pmatrix}$$

   qui est diagonale donc à valeur propre positive (car $s, r \geq 1, C, D \geq 0$). Donc, g est convexe.

3. (1 point) Calculer le cône normal $N_A((x,y))$ en un point de la frontière

   $$F = \{(x,y) \in]0,+\infty[^2 \colon y = \frac{1}{x}\}$$

   de A (on ne demande PAS de vérifier que F est la frontière de A).

   Solution: **Méthode 1**: On utilise une légère extension du théorème vu en cours (personne ne s'est rendu compte de la difficulté, c'est la façon de corriger la méthode utilisée par la plupart d'entre vous qui oublie que f n'est pas définie sur $\mathbb{R}^2$, méthode que j'ai donc compté juste).

   Théorème 1 *Soient $g_1, ..., g_n$ des fonctions convexes C^1 définies sur $O \to \mathbb{R}$ avec $O \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert convexe tel qu'il existe $x_0 \in O$ avec $g_i(x_0) < 0$ pour tout i.*

   Soit la contrainte :

   $$C = \{x \in O : \forall i \in \{1, ..., n\}, g_i(x) \leq 0\}.$$

   Soit $x \in C$ tel que:

   (a) les l premières contraintes sont actives, c'est à dire: $g_1(x) = ... = g_l(x) = 0$

   (b) les autres contraintes ne sont pas actives, c'est à dire $g_{l+1}(x) < 0, ...g_n(x) < 0$

   Si $l = 0$, on a $N_C(x) = \{0\}$ et sinon, le cône normal à C en x est donné par

   $$N_C(x) = \left\{ \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \nabla g_i(x), \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

On pose $O =]0, +\infty[^2$ qui est un ouvert convexe.

$$A = \{(x, y) \in O : f(x, y) \leq 0\}$$

est de la forme voulue pour appliquer cette version du théorème de détermination du cône normal vu $f(1, 2) = -1 < 0$. Un point $(x, y) \in F$ est par définition un point où l'unique contrainte est active, donc, comme $\nabla f(x, y) = (-\frac{1}{x^2}, -1)$, on obtient

$$N_A((x, \frac{1}{x})) = \{\lambda \nabla f(x, \frac{1}{x}), \lambda \geq 0\} = \{-\lambda(\frac{1}{x^2}, 1), \lambda \geq 0\}$$

Méthode 2: On peut aussi utiliser le théorème vu en cours, mais c'est plus compliqué... (pas réaliste durant le temps de l'examen) On réécrit d'abord A sous la forme:

$$A = \{(x, y) \in O : \frac{1}{xy} - 1 \leq 0\}$$

sauf que cela ne corrige pas le problème de domaine car $\frac{1}{xy}$ n'est pas non plus défini sur $\mathbb{R}^2$. Sauf que la région qui nous intéresse est quand la fonction vaut 1 ou moins. On pose donc une fonction qui va donner la même inégalité mais en repoussant la singularité (par exemple) à $-1/2$. On remarque que

$$\begin{aligned}
xy \geq 1 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2}) = xy + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4} \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{5}{4} \\
\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2}) \geq \frac{x + \frac{1}{2}}{2} + \frac{y + \frac{1}{2}}{2} + \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow 0 \geq f_4(x, y) := \frac{1}{2y + 1} + \frac{1}{2x + 1} + \frac{3}{(2y + 1)(2x + 1)} - 1 \quad \text{pour } x, y \geq -0.5
\end{aligned}$$

Soit aussi $f_2(x, y) = -x$, $f_3(x, y) = -y$, on obtient:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x, y) \leq 0, f_2(x, y) \leq 0, f_4(x, y) \leq 0\}.$$

On va maintenant remplacer f_4 par une fonction convexe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On commence par définir ainsi

$$g_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2x} & \text{si } x \geq 0 \\ e^{-2x+2x^2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

pour poser $g_3(x, y) = g_1(x)g_1(y)$ (comme s'accordant avec $g_4(x, y) = \frac{1}{(2y+1)(2x+1)}$ sur $[0, +\infty[^2$)

On note que g_1 est dérivable à droite et à gauche et comme ces dérivées s'accordent et sont continues, donc g_1 est C^1 et:

$$g_1'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(1+2x)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ (-2 + 4x)e^{-2x+2x^2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

de même en appliquant à g_1' on trouve que g_1 est C^2 de dérivée seconde:

$$g_1''(x) = \begin{cases} \frac{8}{(1+2x)^3} & \text{si } x \geq 0 \\ ((-2 + 4x)^2 + 4)e^{-2x+2x^2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Comme c'est une dérivée seconde est positive, (comme les carrés, exponentielles et cubes de nombres positifs) on déduit que g_1 est convexe sur $\mathbb{R}$. Comme la dérivée première est négative, g_1 est aussi décroissante.

Enfin, par composée de g_1, projections et produit, g_3 est aussi C^2 et explicitement on a:

$$g_3(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(2y+1)(2x+1)} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ \frac{e^{-2y+2y^2}}{2x+1} & \text{si } x \geq 0, y \leq 0 \\ \frac{e^{-2x+2x^2}}{2y+1} & \text{si } x \leq 0, y \geq 0 \\ e^{-2x+2x^2-2y+2y^2} & \text{si } x \leq 0, y \leq 0 \end{cases}$$

Par dérivée des produits, on obtient le gradient:

$$\nabla g_3(x,y) = (g_1'(x)g_1(y), g_1'(y)g_1(x))$$

Et la hessienne est :

$$\begin{aligned}
\text{Hess}g_3(x,y) &= \begin{pmatrix} g_1''(x)g_1(y) & g_1'(x)g_1'(y) \\ g_1'(x)g_1'(y) & g_1(x)g_1''(y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{8}{(2y+1)(2x+1)^3} & \frac{4}{(2y+1)^2(2x+1)^2} \\ \frac{4}{(2y+1)^2(2x+1)^2} & \frac{8}{(2x+1)(2y+1)^3} \end{pmatrix} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ e^{-2y+2y^2} \begin{pmatrix} \frac{8}{(2x+1)^3} & -2\frac{(-2+4y)}{(2x+1)^2} \\ -2\frac{(-2+4y)}{(2x+1)^2} & \frac{(-2+4y)^2+4}{2x+1} \end{pmatrix} & \text{si } x \geq 0, y \leq 0 \\ e^{-2x+2x^2} \begin{pmatrix} \frac{(-2+4x)^2+4}{2y+1} & -2\frac{(-2+4x)}{(2y+1)^2} \\ -2\frac{(-2+4x)}{(2y+1)^2} & \frac{8}{(2y+1)^3} \end{pmatrix} & \text{si } x \leq 0, y \geq 0 \\ e^{-2x+2x^2-2y+2y^2} \begin{pmatrix} ((-2+4x)^2+4) & (-2+4x)(-2+4y) \\ (-2+4x)(-2+4y) & ((-2+4y)^2+4) \end{pmatrix} & \text{si } x \leq 0, y \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que le 1er coefficient $r = r(x,y)$ de chaque matrice est positif (en utilisant les conditions de positivités de chaque domaine pour les termes qui contiennent des puissances impaires), il reste à voir que le déterminant est aussi positif et celui-ci est:

$$\det(\text{Hess}g_3(x,y)) = \begin{cases} \frac{48}{(2y+1)^4(2x+1)^4} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ \frac{4(-2+4y)^2+32}{(2x+1)^4} e^{-4y+4y^2} & \text{si } x \geq 0, y \leq 0 \\ \frac{4(-2+4x)^2+32}{(2y+1)^4} e^{-4x+4x^2} & \text{si } x \leq 0, y \geq 0 \\ e^{-4x+4x^2-4y+4y^2}(4(-2+4x)^2+4(-2+4y)^2+16) & \text{si } x \leq 0, y \leq 0 \end{cases}$$

Comme tous les déterminants et r sont positifs, g_3 est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

On peut donc poser $f_3(x,y) = g_1(x) + g_1(y) + 3g_3(x,y) - 1$ qui est donc convexe comme combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes. et on a $f_3(x,y) = f_4(x,y)$ pour $x \geq 0, y \geq 0$ et donc

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x,y) \leq 0, f_2(x,y) \leq 0, f_3(x,y) \leq 0\}.$$

On peut maintenant appliquer le théorème du cours (identique au Thm 1 avec $O = \mathbb{R}^2$) à ce A.

4. (1 point) Montrer que g atteint son minimum sur A en un point de F et que ce minimum vaut:

$$m = C\left(\frac{rD}{sC}\right)^{s/(r+s)} + D\left(\frac{sC}{rD}\right)^{r/(r+s)}.$$

Solution:

Comme g est convexe C^1, par le théorème de minimisation d'une fonction convexe avec contrainte convexe, g atteint un minimum sur $(x, 1/x) \in A$ si et seulement si $-\nabla g(x, 1/x) \in N_A((x, \frac{1}{x}))$.

Or $\nabla g(x, y) = (Csx^{s-1}, Dry^{r-1})$, donc on cherche $\lambda \geq 0$ tel que

$$-(Csx^{s-1}, Drx^{1-r}) = -\lambda(\frac{1}{x^2}, 1).$$

Ce système a une unique solution $\lambda = Drx^{1-r} = Csx^{s+1}$ donc vu $x > 0$ $x^p = x^{s+r} = \frac{Dr}{Cs}$ soit, l'unique solution en x est

$$x = \left(\frac{Dr}{Cs}\right)^{1/p}.$$

On a donc $\left(\left(\frac{Dr}{Cs}\right)^{1/p}, \left(\frac{Cs}{Dr}\right)^{1/p}\right) \in F$ est un point où g atteint un minimum (global) qui a donc pour valeur:

$$m = g(\left(\frac{Dr}{Cs}\right)^{1/p}, \left(\frac{Cs}{Dr}\right)^{1/p}) = C\left(\frac{rD}{sC}\right)^{s/(r+s)} + D\left(\frac{sC}{rD}\right)^{r/(r+s)}.$$

5. (0.5 point) Montrer que $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \ln(x)$ est concave.

Solution:

h est C^2 et sa dérivée seconde est $h''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ d'où par critère différentiel de convexité, $-h$ est convexe et donc h est concave.

6. (1 point) En déduire que, pour tout $a, b \geq 0$:

$$\frac{(ab)^r}{r} \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Solution: L'inégalité est évidente si $a = 0$ ou $b = 0$ vu que $ab = 0$ et le membre de droite est positif, donc il suffit de la montrer pour $a, b > 0$.

On applique la concavité avec $\lambda = \frac{r}{p} \in [0, 1]$

$$\ln\left(\frac{a^p r}{p} + \frac{b^q r}{q}\right) = h\left(\frac{a^p r}{p} + \frac{b^q r}{q}\right) \geq \frac{r}{p} h\left(a^p\right) + \frac{r}{q} h\left(b^q\right) = r\ln(ab) = \ln((ab)^r)$$

En passant à exp, croissante, on obtient l'inégalité voulue:

$$(ab)^r \leq \frac{a^p r}{p} + \frac{b^q r}{q}.$$

7. **Bonus : 1.5 point** Soient $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, Y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

   On pose $C = \dfrac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{p}$ et $D = \dfrac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{q}$, vérifier que $m = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{r/p}\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{r/q}}{r}$.

   Solution:

   On note $C = \dfrac{||X||_p^p}{p}$ et $D = \dfrac{||Y||_q^q}{q}$, donc en appliquant la formule du 5:

$$m = \frac{||X||_p^p}{p}\left(\frac{rp||Y||_q^q}{sq||X||_p^p}\right)^{s/(r+s)} + \frac{||Y||_q^q}{q}\left(\frac{sq||X||_p^p}{rp||Y||_q^q}\right)^{r/(r+s)}.$$

   Par (2) (pour le changement d'exposant et la simplification dans les puissances), on a:

$$m = \frac{||X||_p^p}{p}\left(\frac{||Y||_q^q}{||X||_p^p}\right)^{r/q} + \frac{||Y||_q^q}{q}\left(\frac{||X||_p^p}{||Y||_q^q}\right)^{r/p} = \frac{||X||_p^p}{p}\left(\frac{||Y||_q^r}{||X||_p^s}\right) + \frac{||Y||_q^{q(1-r/p)}}{q}||X||_p^r.$$

   d'où en utilisant (1):

$$m = \frac{||X||_p^{p-s}}{p}||Y||_q^r + \frac{||Y||_q^{q(1-r/p)}}{q}||X||_p^r = \frac{||X||_p^r}{p}||Y||_q^r + \frac{||Y||_q^r}{q}||X||_p^r = \frac{||X||_p^r||Y||_q^r}{r}.$$

8. **Bonus : 1.5 points** Déduire des questions précédentes que:

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_iy_i|^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}$$

   Solution:

   En sommant l'inégalité du 6, appliquée à $a = x|x_i|, b = y|y_i|$ pour $x, y > 0$, on obtient:

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^n (xy)^r|x_iy_i|^r \leq \frac{x^p}{p}\sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{y^q}{q}\sum_{i=1}^n |y_i|^q = x^pC + y^qD$$

   avec les notations de la question précédente. Pour $(x, y) \in C$ atteignant le minimum de g, on obtient

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^n |x_iy_i|^r \leq \frac{1}{r}\sum_{i=1}^n (xy)^r|x_iy_i|^r \leq m = \frac{||X||_p^r||Y||_q^r}{r}$$

   ce qui est l'inégalité voulue.

9. (1 point) De quelle inégalité du cours est-ce un cas particulier ?

   Solution: C'est un cas particulier de l'inégalité de Hölder pour la mesure de comptage sur $[\![1, n]\!]$. En effet, on a pour $x : [\![1, n]\!] \to \mathbb{R}$

$$\int |x|^p d\nu = \sum_{i=1}^n |x_i|^p.$$