**L3 Mathématiques et Economie ou Informatique** **8 janvier 2025**
**2024–2025** **10H15**

# CT 2 : Topologie et Théorie de la mesure

Durée: 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
**LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES**

---

**Exercice 1 (5 points)**
On rappelle que $\lambda_2$ est la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$. Soit

$$h(x,y) = (x^2+y^2)exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right)$$

1. Montrer que $h$ est mesurable sur $\mathbb{R}^2$ (ou, autrement dit, que $h$ est borélienne).
2. Calculer l'intégrale:
$$\int_{[0,+\infty[^2} h d\lambda_2$$
3. En déduire la valeur de l'intégrale suivante:
$$\int_{[0,+\infty[}\int_{[0,+\infty[} x^2 exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right) d\lambda(x)d\lambda(y).$$

**Exercice 2 (8 points + Bonus : 3 points)** On rappelle que $\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
Soient $f, g$ des fonctions, soit positives, soit $\lambda$-intégrables sur $T = [0,+\infty[$. On rappelle que

$$||f||_1 = \int_T |f(t)|d\lambda(t).$$

On définit la convolution de $f, g$ par:

$$f * g(t) = \int_{[0,t]} f(t-s)g(s)d\lambda(s).$$

1. **(Bonus : 3 points)** Montrer que la formule $h(s,t) = f(t-s)g(s)1_{[0,t]}(s)$ définit une fonction borélienne $h : T^2 \to \mathbb{R}$.
2. Si $f$ et $g$ sont positives, montrer que $f * g$ est mesurable et que
$$||f * g||_1 = ||f||_1||g||_1.$$
3. On suppose dans cette question que $f$ est continue et vérifie $f(0) = 0$ et $g$ est $\lambda$-intégrable sur $T$. Montrer que $f * g$ est bien définie et continue sur $T$.

4. Montrer que si $f$ et $g$ sont toutes les deux $\lambda$-intégrables sur $T$, l'intégrale donnant $f * g(t)$ est définie pour presque partout $t$ dans $T$ et que $f * g$ est intégrable sur $T$.

**Exercice 3 (7 points)**
Soient $1 \leq p < q < +\infty$ and $\alpha > 0$.
On rappelle que $\ell^p(\mathbb{N}^2)$ est l'espace vectoriel des familles de puissance $p$ sommable sur $\mathbb{N}^2$ et qu'il coïncide avec $\ell^p(\mathbb{N}^2) = L^p(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2), \nu)$ pour la mesure de comptage $\nu$ .

1. Soit $u_{n,m} = \frac{1}{(n+m+1)^\alpha}$. Pour quel $\alpha$ la famille $(u_{n,m})_{n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est elle sommable ?

2. Pour quel $\alpha$ a-t-on $(u_{n,m}) \in \ell^p(\mathbb{N}^2)$ ?

3. Montrer que $\ell^q(\mathbb{N}^2) \not\subset \ell^p(\mathbb{N}^2)$. Montrer que la boule unité fermée
$$B_p = \{u \in \ell^p(\mathbb{N}^2) : ||u||_p \leq 1\}$$
de $\ell^p(\mathbb{N}^2)$ est inclus dans la boule unité fermée
$$B_q = \{u \in \ell^q(\mathbb{N}^2) : ||u||_q \leq 1\}$$
de $\ell^q(\mathbb{N}^2)$.

4. Montrer que pour tout $v \in \ell^p(\mathbb{N}^2)$ on a aussi $v \in \ell^q(\mathbb{N}^2)$ et:
$$||v||_q \leq ||v||_p.$$