L3 Mathématiques et Economie ou Informatique **8 janvier 2025**
2024–2025 **10H15**

Correction du CT 2 : Topologie et Théorie de la mesure

Durée: 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Exercice 1 (5 points)
On rappelle que λ_2 est la mesure de Lebesgue la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$. Soit

$$h(x,y) = (x^2+y^2)exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right)$$

1. (1 point) Montrer que h est mesurable sur $\mathbb{R}^2$ (ou, autrement dit, que h est borélienne).

   Solution:

   h est continue comme produit et composée de polynômes et exp donc h est borélienne.

2. (3 points) Calculer l'intégrale:
$$\int_{[0,+\infty[^2} hd\lambda_2$$

   Solution:

   h est mesurable positive, donc on peut appliquer un changement de variable en coordonnée polaire $\varphi :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 - \{0\}\times[0,+\infty[$. On rappelle que $\phi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Il est crucial d'identifier l'image du domaine d'intégration $\varphi^{-1}(]0,+\infty[^2) =]0,+\infty[\times]0,\pi/2[$ (formellement, on applique d'abord que $\lambda_2([0,+\infty[^2 -]0,+\infty[^2) = 0$ et aussi ENSUITE le théorème de Fubini-Tonneli pour passer d'une intégrale par rapport à λ_2 à une intégrale double).

$$\begin{aligned}\int_{[0,+\infty[^2} hd\lambda_2 &= \int_{]0,+\infty[^2} hd\lambda_2 = \int_{[0,+\infty[} d\lambda(r)\int_{]0,\pi/2[} d\lambda(\theta) r^3 exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{]0,+\infty[} d\lambda(r) r^3 exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\end{aligned}$$

   Comme la fonction est continue positive, l'intégrale de Lebesgue coïncide avec celle de Riemann d'où par le changement de varialbe $u = r^2$ ($du = 2rdr$):

$$\int_{[0,+\infty[^2} hd\lambda_2 = \frac{\pi}{4}\int_{]0,+\infty[} duu\exp\left(-\frac{u}{2}\right) = \frac{\pi}{4}[-2u\exp\left(-\frac{u}{2}\right) - 4\exp\left(-\frac{u}{2}\right)]_0^\infty = \pi$$

3. (1 point) En déduire la valeur de l'intégrale suivante:

$$\int_{[0,+\infty[}\int_{[0,+\infty[} x^2 exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right) d\lambda(x)d\lambda(y).$$

Solution: Par Fubuni-tonelli (appliqué à la fonction positive continue donc borélienne $(x,y) \mapsto x^2 exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right)$ sur l'espace produit $[0,+\infty[^2$ avec la Mesure de Lebesgue σ-finie, on a:

$$A = \int_{[0,+\infty[}\int_{[0,+\infty[} x^2 exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right) d\lambda(x)d\lambda(y) = \int_{[0,+\infty[^2} x^2 exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right) d\lambda_2(x,y)$$

Par le changement de variable $(y,x) = (x,y)$

$$\begin{aligned} A &= \int_{[0,+\infty[}\int_{[0,+\infty[} x^2 exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right) d\lambda(x)d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,+\infty[}\int_{[0,+\infty[} y^2 exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right) d\lambda(x)d\lambda(y). \end{aligned}$$

donc $A + A = \int_{[0,+\infty[^2} h d\lambda_2 = \pi$ soit $A = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 (8 points + Bonus : 3 points) On rappelle que λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soient f, g des fonctions, soit positives, soit λ-intégrables sur $T = [0,+\infty[$. On rappelle que

$$||f||_1 = \int_T |f(t)| d\lambda(t).$$

On définit la convolution de f, g par:

$$f * g(t) = \int_{[0,t]} f(t-s)g(s)d\lambda(s).$$

1. **(Bonus : 3 points)** Montrer que la fonction $h(s,t) = f(t-s)g(s)1_{[0,t]}(s)$ est borélienne.

   Solution: Montrons que la fonction $h(s,t) = f(t-s)g(s)1_{[0,+\infty[}(t-s)$ est borélienne (remarquons qu'on a écrit $1_{[0,t]}(s) = 1_{[0,+\infty[}(t-s)$ car les deux formules sont égales à 1 si et seulement si $s \le t$).

   Comme un produit de fonctions mesurables est mesurable et que g est mesurable, il suffit de montrer que H définie par $H(s,t) = f(t-s)1_{[0,+\infty[}(t-s)$ est mesurable. Comme $(t,s) \mapsto (t-s)$ est continue donc borélienne, et que la composée de fonction mesurable est mesurable, il suffit de voir que

$$F(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \ge 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

   définit une fonction mesurable $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vu que $H(s,t) = F(t-s)$.

Or pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$F^{-1}(A) = \begin{cases} f^{-1}(A) & \text{si } 0 \notin A \\ f^{-1}(A) \cup]-\infty, 0[& \text{si } 0 \in A \end{cases}$$

et $f^{-1}(A)$ est borélien de T vu f borélienne, donc borélien de A (par description des boréliens induits venant des ouverts induits) et comme $]-\infty, 0[$ est ouvert donc borélien, il en va aussi de leur union, et dans tous les cas $F^{-1}(A)$ est borélien, et donc F borélienne, comme voulue.

2. (3 points) Si f et g sont positives, montrer que $f * g$ est mesurable et que

$$||f * g||_1 = ||f||_1 ||g||_1.$$

Solution:

On applique le théorème de Fubini-Tonelli à h borélienne (par le 1) positive (pour f et g positives). Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu produit, h est mesurable pour cette tribu, donc on peut appliquer Fubini-Tonelli, pour la mesure σ-finie λ, on obtient que $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} h(s,t) d\lambda(s) = f * g(t)$ est mesurable (positive) et:

$$\begin{aligned} ||f * g||_1 = \int_T f * g(t) d\lambda(t) &= \int_T \int_T h(s,t) d\lambda(s) d\lambda(t) = \int_T \int_T f(t-s) g(s) 1_{[0,t]}(s) d\lambda(t) d\lambda(s) \\ &= \int_T g(s) \int_T f(t-s) 1_{[s,+\infty[}(t) d\lambda(t) d\lambda(s) \end{aligned}$$

par le changement de variable $t' = t - s \geq 0$ (pour $t \in [s, +\infty[$) , on obtient:

$$\begin{aligned} ||f * g||_1 &= \int_T g(s) \left(\int_T f(t') d\lambda(t') \right) d\lambda(s) \\ &= ||f||_1 \int_T g(s) d\lambda(s) = ||f||_1 ||g||_1. \end{aligned}$$

3. (3 points) Si f est continue et vérifie $f(0) = 0$ et g est λ-intégrable sur T, montrer que $f * g$ est bien définie et continue sur T.

Solution:

On considère: l'intégrale à paramètre suivante

$$f * g(t) = \int_T h(s,t) d\lambda(s).$$

Remarquons que $h(s,t) = f((t-s)_+) g(s)$ pour

$$(t-s)_+ = (t-s) 1_{[0,t]}(s) = \begin{cases} (t-s) & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases}$$

car si $t \geq s$, on a $h(s,t) = f(t-s)g(s) = f((t-s)_+)g(s)$ et si $t < s$, on a $h(s,t) = 0 = f(0)g(s) = f((t-s)_+)g(s)$.

On en déduit que pour $s \geq 0$, on a $t \mapsto h(s,t)$ est continue par composée de f et $t \mapsto (t-s)_+ = \max(t-s, 0)$. De plus par produit de la fonction mesurable g et d'une fonction continue donc borélienne, $s \mapsto h(s,t)$ est mesurable.

Pour appliquer le théorème de continuité sur $T \times [0, M]$ avec condition de domination, il suffit donc d'obtenir la domination suivante pour tout $(s,t) \in T \times [0, M[$:

$$|h(s,t)| = |f((t-s)_+)g(s)| \leq \sup_{t \in [0,M]} |f(t)||g(s)|$$

En effet, comme f est continue sur le compact $[0, M]$, f est bornée sur cet intervalle par le théorème de Weierstrass, d'où l'existence de la borne $\sup_{t\in[0,M]} |f(t)| < +\infty$. La domination g est intégrable par hypothèse et ne dépend pas du paramètre t, elle est donc admissible pour le théorème.

Le théorème de continuité avec condition de domination conclut donc que $f * g$ est (bien définie et) continue sur $[0, M]$. Comme M est arbitraire, on déduit la continuité sur T.

4. (2 points) Montrer que si f et g sont toutes les deux λ-intégrables sur T, l'intégrale donnant $f * g(t)$ est définie presque partout sur T et que $f * g$ est intégrable sur T.

Solution:
On applique le théorème de Fubuni à h. Il faut donc voir que h est λ_2-intégrable dans ce cas. On sait déjà que h est mesurable, et il reste à noter que:

$$\int_{T^2} |h(s,t)| d\lambda_2(s,t) = \int_{T^2} |f|(t-s)|g|(s) d\lambda_2(s,t) = |||f| * |g|||_1 = ||f||_1 ||g||_1 < +\infty$$

par la question 1. La conclusion demandée fait partie de celle du théorème de Fubini, puisque $f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} h(s,t) d\lambda(s)$ est l'intégrale de h par rapport à une coordonnée qui est presque partout définie et λ-intégrable.

Exercice 3 (8 points)
Soient $1 \leq p < q < +\infty$ and $\alpha > 0$.
On rappelle que $\ell^p(\mathbb{N}^2)$ est l'espace vectorielle des fammilles de puissance p sommable sur $\mathbb{N}^2$ et qu'il coïncide avec $\ell^p(\mathbb{N}^2) = L^p(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2), \nu)$ pour la mesure de comptage ν .

1. (3 points) Soit $u_{n,m} = \frac{1}{(n+m+1)^\alpha}$. Pour quel α la suite $(u_{n,m})$ est elle sommable ?

   Solution:

   On veut savoir quand la somme suivante est finie:

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} |u_{n,m}| = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{(n+m+1)^\alpha}$$

   On applique le théorème de sommation par paquet pour la partition $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \Lambda_N$ avec $\Lambda_N = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 : N = n+m\}$, on obtient:

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{(n+m+1)^\alpha} = \sum_{N\in\mathbb{N}} \sum_{(n,m)\in\Lambda_N} \frac{1}{(N+1)^\alpha}$$

or $\Lambda_N = \{(n, N-n) : n \in [\![0, N]\!]\}$ d'où $Card(\Lambda_N) = N+1$ et donc:

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{(n+m+1)^\alpha} = \sum_{N\in\mathbb{N}} \frac{Card(\Lambda_N)}{(N+1)^\alpha} = \sum_{N\in\mathbb{N}} \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}$$

Finalement, par la série de Riemann, cette somme converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ soit $\alpha > 2$ donc c'est la condition pour la sommabilité de $(u_{n,m})$ par l'égalité précédente.

2. (1 point) Pour quel α a-t-on $(u_{n,m}) \in \ell^p(\mathbb{N}^2)$?

   Solution: Comme à la question précédente, (en remplaçant α par αp, on a

   $$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} |u_{n,m}|^p = \sum_{N\in\mathbb{N}} \frac{1}{(N+1)^{\alpha p-1}}$$

   donc $(u_{n,m}) \in \ell^p(\mathbb{N}^2)$ si et seulement si $\alpha p > 2$ soit $\alpha > \frac{2}{p}$.

3. (1 point) Montrer que $\ell^q(\mathbb{N}^2) \not\subset \ell^p(\mathbb{N}^2)$.

   Solution:

   Vu $p < q$, on a $\frac{2}{p} > \frac{2}{q}$ donc on peut prendre $\frac{2}{p} > \alpha > \frac{2}{q}$, et donc par la question précédente $(u_{n,m}) \in \ell^q(\mathbb{N}^2)$ mais $(u_{n,m}) \notin \ell^p(\mathbb{N}^2)$ et donc $\ell^q(\mathbb{N}^2) \not\subset \ell^p(\mathbb{N}^2)$.

4. (2 points) Montrer que la boule unité fermée $B_p = \{u \in \ell^p(\mathbb{N}^2) : ||u||_p \leq 1\}$ de $\ell^p(\mathbb{N}^2)$ est inclus dans la boule unité fermée $B_q = \{u \in \ell^q(\mathbb{N}^2) : ||u||_q \leq 1\}$ de $\ell^q(\mathbb{N}^2)$.

   Solution:

   Soit $u \in B_p$, on a $|u_{n,m}|^p \leq ||u||_p \leq 1$ donc $|u_{n,m}| \leq 1$. Par décroissance en p de $|u_{n,m}|^p = \exp(p\ln(|u_{n,m}|))$ (vu exp croissante et $\ln(|u_{n,m}|) \leq 0$), on a $|u_{n,m}|^q \leq |u_{n,m}|^p$, donc en passant à la somme:

   $$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} |u_{n,m}|^q \leq \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} |u_{n,m}|^p = ||u||_p^p \leq 1$$

   d'où $||u||_q^q \leq 1$ ce qui donne $u \in B_q$.

5. (1 point) Montrer que pour tout $v \in \ell^p(\mathbb{N}^2)$:

   $$||v||_q \leq ||v||_p.$$

   Solution:

   On prend $v \in \ell^p(\mathbb{N}^2)$, on peut supposer $v \neq 0$ car sinon, l'inégalité est $0 \leq 0$. Par séparation, si $v \neq 0$, on a $||v||_p \neq 0$, d'où on considère $w = \frac{v}{||v||_p} \in B_p$. Or par la question précédente, on a $w \in B_q$, d'où par homogénité:

   $$\frac{||v||_q}{||v||_p} = ||w||_q \leq 1$$

   ce qui donne exactement l'inégalité voulue (par positivité de la norme):

   $$||v||_q \leq ||v||_p.$$