L3 : Mathématiques et Économie 2023–2024 **8 janvier 2024**

Examen : Topologie et théorie de la mesure

Durée : 2 heures

LES DOCUMENTS ET LES GADGETS ÉLECTRONIQUES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Questions de cours : (4 points)

1. Donner quatres familles génératrices (distinctes) des boréliens de $\mathbb{R}$.
2. Énoncer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.
3. Énoncer l'inégalité de Jensen.
4. Énoncer le théorème de projection sur un convexe fermé (en dimension infinie).

Exercice 1 (5 points) Soient $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ considéré comme espace métrique avec la distance induite par la norme euclidienne

$$||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_2)$, où λ_2 est la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\Omega)$. On définit pour $\alpha > 0$, $f_\alpha : \Omega \to [0, +\infty[$ par :

$$f_\alpha(x,y) = \frac{1}{||(x,y)||_2^\alpha}.$$

1. Montrer que f_α est intégrable sur Ω par rapport à λ_2 si et seulement si $\alpha < \alpha_0$ pour un nombre $\alpha_0 \in]0, +\infty[$ que l'on précisera.
2. Montrer que tout $\alpha < 1/2$, $f_\alpha \in L^4(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_2)$.
3. Est-ce que $f_0 + f_1$ appartient à $L^4(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_2)$? (justifier)
4. Soit $\alpha_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. Trouver la limite de la suite $u_n = ||f_{\alpha_n}||_4^4$.

Exercice 2 (3 points) Soit $\Omega = \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ et $\mathbf{P}$ la mesure sur $\mathcal{P}(\Omega)$ définie pour $A \subset \mathbb{N}$ par :

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n \in A} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

1. Calculer la tribu $\mathcal{T} = \sigma(\{0\}, \{1\})$ engendrée par les deux ensembles $A = \{0\}$, et $B = \{1\}$.
2. Soit H l'espace de Hilbert (réel) $L^2(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$.
   Donner une formule pour le produit scalaire de H en terme d'une somme de série.
3. Soit $K = L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{T}$-mesurables de carré intégrable. Montrer qu'on définit une base hilbertienne (f_0, f_1, f_2) de K par :

$$f_0(n) = 1_{\{0\}}(n) e^{\lambda/2}, \qquad f_1(n) = 1_{\{1\}}(n) \frac{e^{\lambda/2}}{\sqrt{\lambda}}, \qquad f_2(n) = 1_{[\![2,+\infty[\![}(n) \frac{e^{\lambda/2}}{\sqrt{e^\lambda - 1 - \lambda}}.$$

4. Montrer que K est fermé et calculer la projection orthogonale P sur H.

Exercice 3 (8 points + Bonus : 5 points)
Soit $H = L^2([-\pi, \pi], \mu)$ l'espace de Hilbert complexe des fonctions de carré intégrable sur $[-\pi, \pi]$ pour la probabilité $\mu = \frac{1}{2\pi}\lambda$ (pour λ la mesure de Lebesgue) de produit scalaire et normes définies pour $f, g \in H$ par :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) d\mu(t), \quad ||f||_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 d\mu(t)}.$$

On rappelle que $e_n(x) = \exp(inx)$ définit une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de H.
On se donne $k(x) = \frac{1}{1+\sin^2(x)}$ et on pose

$$T(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k(x-y)f(y)d\mu(y)$$

1. Soit $f \in H$, f est elle μ-intégrable sur $]-\pi, \pi[$? (justifier).
2. Soit $f \in H$, montrer que $T(f)(x)$ est bien définie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ et définit une fonction bornée $x \mapsto T(f)(x)$.
   En déduire que $T(f) \in H$.
3. Montrer que $T(f)$ est une fonction C^1 sur $]-\pi, \pi[$.
4. Montrer que
   $$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |k(x-y)||f(y)|d\mu(y)d\mu(x) < +\infty.$$
5. En appliquant un théorème de Fubini, montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:
   $$\langle e_n, T(f)\rangle = \langle e_n, k\rangle\langle e_n, f\rangle.$$
6. Donner une expression de $||T(f)||_2^2$ comme somme d'une série.
7. En déduire que $T : H \to H$ est une application linéaire continue et que sa norme subordonnée vérifie $|||T||| \leq 1$.
8. Soit
   $$T_n(f) = \sum_{j=-n}^{n} \langle e_j, k\rangle\langle e_j, f\rangle e_j.$$
   Montrer que $T_n(f)$ converge vers $T(f)$ dans H.
9. Montrer que $\langle e_n, k\rangle$ tend vers 0 pour $n \to +\infty$ et $n \to -\infty$.
10. **Bonus : 2 points** En déduire que $|||T_n - T|||$ converge vers 0.
11. **Bonus : 3 points** Montrer que l'adhérence $\overline{T(B)}$ est compact. (Indication : on pourra commencer par montrer la compacité de $\overline{T_n(B)}$.)