L3 : Mathématiques et Économie 2023–2024 **8 janvier 2023**

Correction de l'Examen : Topologie et théorie de la mesure

Questions de cours : (4 points + 0.5 point Bonus) (cf. polycopié)

1. Donner quatres familles génératrices (distinctes) des boréliens de $\mathbb{R}$. (1 point)
2. Énoncer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. (1 point + Bonus : 0.25 si la convergence dans L^1 est mentionnée)
3. Énoncer l'inégalité de Jensen. (1 point)
4. Énoncer le théorème de projection sur un convexe fermé (en dimension infinie). (1 point + Bonus : 0.25 si la constante de Lipschitz 1 est mentionné)

Exercice 1 (5 points) Soient $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ considéré comme espace métrique avec la distance induite par la norme euclidienne $||(x, y)||_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. On considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_2)$, où λ_2 est la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne. On définit pour $\alpha > 0$, $f_\alpha : \Omega \to [0, +\infty[$ par :

$$f_\alpha(x, y) = \frac{1}{||(x, y)||_2^\alpha}.$$

1. (2 points) Montrer que f_α est intégrable sur Ω par rapport à λ_2 si et seulement si $\alpha < \alpha_0$ pour un nombre $\alpha_0 \in]0, +\infty[$ que l'on précisera.

   Solution :

   Par composé d'une norme avec une puissance $(x, y) \mapsto ||(x, y)||_2^\alpha$ est continue, et par division à dénominateur non-nulle (sur Ω), f_α est continue donc borélienne sur Ω. Vu que f_α est positive, elle est intégrable si et seulement si son intégrale est finie :. On la calcule par changement de variable en coordonnées polaires en passant au domaine $V = \Omega -]-\infty, 0] \times \{0\}$ vu que $\lambda_2(\Omega - V) \leq \lambda(\{0\}) = 0$.

   $$\int_\Omega f_\alpha(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_V f_\alpha(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{r^\alpha} r dr d\theta.$$

   Comme les fonctions sont continues positives, on est ramené à une intégrale au sens de Riemann. Par les intégrales de Riemann, l'intégrale en r converge si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ soit $\alpha < \alpha_0 = 2$ et on a (même si ce n'est pas demandé) :

   $$\int_\Omega f_\alpha(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_0^{2\pi} [\frac{r^{2-\alpha}}{2 - \alpha}]_0^1 d\theta = \frac{2\pi}{2 - \alpha}. \quad (1)$$

2. (1 point) Montrer que tout $\alpha < 1/2$, $f_\alpha \in L^4(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_2)$.

   Solution : Comme on a vu que f_α est borélienne, $f_\alpha \in L^4(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_2)$ si et seulement si :

   $$\int_\Omega f_\alpha^4 d\lambda = \int_\Omega f_{4\alpha} d\lambda < +\infty?$$

   soit si et seulement si f_α est intégrable ce qui revient à $4\alpha < \alpha_0 = 2$ par la première question, donc si et seulement si $\alpha < 1/2$, comme voulu.

3. (1 point) Est-ce que $f_0 + f_1$ appartient à $L^4(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_2)$? (justifier)

   Solution :

   Comme $L^4(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_2)$ est un espace vectoriel (par l'inégalité de Minkowski), si $f_0 + f_1$ appartenait à L^4, vu qu'on vient de voir $f_0 \in L^4$, on aurait aussi $f_1 = f_0 + f_1 - f_0 \in L^4$, ce qui implique $f_1 \in L^4$. Par contraposée, comme on vient de voir que $f_1 \notin L^4$, on obtient $f_0 + f_1 \notin L^4$. (on peut aussi raisonner par l'absurde, mais un raisonnement par contraposé suffit ici).

Solution 2 : par positivité Par positivité des fonctions et monotonie de la puissance et de l'intégrale, on a :

$$\int_\Omega f_1^4 d\lambda \leq \int_\Omega (f_0 + f_1)^4 d\lambda$$

Or on vient de voir $f_1 \notin L^4$, donc on obtient $f_0 + f_1 \notin L^4$ (par contraposée de la propriété de domination : si $f_0 + f_1$ était dans L^4, on aurait aussi $f_1 \in L^4$ par domination).

4. (1 point) Soit $\alpha_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. Trouver la limite de la suite $u_n = ||f_{\alpha_n}||_4^4$.
   Solution :
   On a $u_n = ||f_{\alpha_n}||_4^4 = \int_\Omega f_{4\alpha_n} d\lambda$.
   Or $f_{4\alpha_n}$ est une suite positive croissante (car $||(x,y)||_2^{-4\alpha} = exp(-4\alpha \ln(||(x,y)||_2))$ est croissante en α u $\ln(||(x,y)||_2 < 0)$. Donc par le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$u_n = ||f_{\alpha_n}||_4^4 = \int_\Omega f_{4\alpha_n} d\lambda \to \int_\Omega f_2 d\lambda = +\infty.$$

   Le calcul de l'intégrale vient de la non intégrabilité de f_2 vu au 1.
   Autre Solution (moins intéressante) : Si vous avez calculé (1), vous pouvez calculer la suite explicitement $u_n = \frac{\pi n}{2} \to +\infty$ (la limite est alors facile).

Exercice 2 (3 points) Soit $\Omega = \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ et $\mathbf{P}$ la mesure sur $\mathcal{P}(\Omega)$ définie pour $A \subset \mathbb{N}$ par :

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n \in A} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

1. (1 point) Calculer la tribu $\mathcal{T} = \sigma(\{0\}, \{1\})$ engendrée par les deux évènements $A = \{0\}$, et $B = \{1\}$.
   Solution : A et B ne forment pas une parition de Ω il faut les compléter avec $C = (A \cup B)^c \in \mathcal{T}$ (par stabilité par union et complémentaire. Donc $\mathcal{T} = \sigma(A, B, C)$ et par le cours pour la tribu engendré par une partition finie, on obtient :

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, A, B, C, A^c, B^c, C^c, \Omega\} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, [\![2, +\infty[\![, N^*, N - \{1\}, \{0, 1\}, \mathbb{N}\}.$$

2. (0.5 point) Soit H l'espace de Hilbert (réel) $L^2(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$. Donner une formule pour le produit scalaire de H en terme de somme de série. *Solution :* Pour deux suite u, v, on a par définition puis théorème de transfert :

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u_n v_n dP(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

3. (1 point) Soit $K = L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ montrer qu'on définit une base hilbertienne (f_0, f_1, f_2) de K par :

$$f_0(n) = 1_{\{0\}}(n) e^{\lambda/2}, \qquad f_1(n) = 1_{\{1\}}(n) \frac{e^{\lambda/2}}{\sqrt{\lambda}}, \qquad f_2(n) = 1_{[\![2,+\infty[\![}(n) \frac{e^{\lambda/2}}{\sqrt{e^\lambda - 1 - \lambda}}.$$

   Comme les supports de f_0, f_1, f_2 sont disjoints, les trois fonctions sont clairement orthogonales, et sont proportionnelles aux indicatrice de A, B, C donc sont dans K.

En particulier $1_A, 1_B, 1_C \in V := \mathbf{Vect}(f_0, f_1, f_2)$, donc aussi $1 = 1_A + 1_B + 1_C \in V$, d'où $1_{A^c} = 1 - 1_A, 1_{B^c} = 1 - 1_B, 1_{B^c} = 1 - 1_C \in V$. Donc toutes les indicatrices d'évènements de $\mathcal{T}$ sont dans V et toute fonction $\mathcal{T}$-mesurable est étagée (vu la tribu fini) est combinaison linéaire de telles indicatrices donc $K \subset V$ et finalement $K = V$. IL reste donc à vérifier que les f_i sont normalisées, en utilisant la formule du produit scalaire de la question précédente.

4. (0.5 point) Montrer que K est fermé et calculer la projection orthogonale P sur H.
Solution : K est de dimension 3 donc complet donc fermé. Par la formule du cours, on a
$$P_K(x) = \sum_{i=0}^{2} \langle f_i, x \rangle f_i.$$

Exercice 3 (8 points + Bonus : 7 points)

Soit $H = L^2([-\pi,\pi],\mu)$ l'espace de Hilbert complexe des fonctions de carré sommable sur $[-\pi,\pi]$ pour la probabilité $\mu = \frac{1}{2\pi}\lambda$ (pour λ la mesure de Lebesgue) de produit scalaire et normes définies pour $f, g \in H$ par :
$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) d\mu(t), \quad ||f||_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 d\mu(t)}.$$
On rappelle que $e_n(x) = \exp(inx)$ définit une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de H.
On se donne $k(x) = \frac{1}{1+\sin^2(x)}$ et on pose
$$T(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k(x-y) f(y) d\mu(y)$$

1. (1 point) Soit $f \in H$, f est elle intégrable sur $]-\pi,\pi[$? (justifier).
Solution :
Comme $([-\pi,\pi],\mu)$ est un espace de probabilité, on a vu en cours que $L^2([-\pi,\pi],\mu) \subset L^1([-\pi,\pi],\mu)$, donc tout $f \in H$ est bien intégrable.
On rappelle la preuve par l'inégalité de Hölder avec $p = q = 1/2$ (qui coïncide avec Cauchy-Schwarz), on a :
$$\int_{[-\pi,\pi]} |f| d\mu \leq \sqrt{\int_{[-\pi,\pi]} |f|^2 d\mu \int_{[-\pi,\pi]} 1 d\mu} = ||f||_2 ||1||_2 = ||f||_2 < +\infty$$
(vu $||1||_2 = \sqrt{\mu([-\pi,\pi])} = 1$)

2. (1.5 points) Soit $f \in H$, montrer que $x \mapsto T(f)(x)$ est une fonction bornée, en déduire que $T(f) \in H$.
Solution : En bornant explicitement k par 1, on obtient la borne explicite.
$$|T(f)(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |k(x-y)||f(y)| d\mu(y) \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| d\mu(y) \leq ||f||_2.$$
On a donc $T(f) \in L^\infty([-\pi,\pi],\mu)$. Vu que pour une probabilité, $L^\infty([-\pi,\pi],\mu) \subset L^2([-\pi,\pi],\mu)$, on déduit que $T(f) \in H$.

3. (1.5 points) Montrer que $T(f)$ est une fonction C^1 sur $]-\pi,\pi[$. (Indication : on pourra utiliser un théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre).
Solution :
On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation avec condition de domination appliqué à $h(x,y) = k(x-y) f(y)$.

(a) h est mesurable en y for produit de f intégrable et $y \mapsto k(x-y)$ continue (donc borélienne).

(b) h est C^1 en x comme k de dérivée :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = k'(x-y)f(y) = -\frac{2\sin(x-y)\cos(x-y)}{(1+\sin^2(x-y))^2}f(y).$$

(c) (1 point + 0.5 Bonus) On a les dominations suivantes pour h et sa dérivée partielle, indépendante du paramètre x (vu $|k'(x)| \leq 2$) :

$$|h(x,y)| \leq |f(y)|, \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq 2|f(y)|.$$

Comme f est intégrable, les dominations sont bien intégrables.

Le théorème s'applique et on déduit que $T(f)$ est C^1 de dérivée :

$$T(f)'(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k'(x-y)f(y)d\mu(y).$$

4. (0.5 point + 0.5 Bonus pour une inégalité explicite) Montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |k(x-y)||f(y)|d\mu(y)d\mu(x) < +\infty.$$

Solution : Il suffit de borner k par 1, pour obtenir :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |k(x-y)||f(y)|d\mu(y)d\mu(x) \leq \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|d\mu(y)d\mu(x) = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|d\mu(y) < +\infty.$$

5. (1 point + 0.5 Bonus pour l'énoncé du Thm.) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\langle e_n, T(f)\rangle = \langle e_n, k\rangle\langle e_n, f\rangle.$$

Solution : $(x,y) \mapsto k(x-y)f(y)$ est borélienne par produit de f borélienne avec une fonction continue. Par la question précédente, elle est intégrable, donc, comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est la tribu produit, on peut appliquer le théorème de Fubini pour calculer.

$$\begin{aligned}\langle e_n, T(f)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} exp(-inx)k(x-y)f(y)d\mu(y)d\mu(x)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)exp(-iny)\int_{-\pi}^{\pi} exp(-in(x-y))k(x-y)d\mu(x)d\mu(y).\end{aligned}$$

Or, en utilisant un changement de variable $z = x-y$, puis par Chasles et par 2π périodicité :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} exp(-in(x-y))k(x-y)d\mu(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-y}^{\pi-y} exp(-inx)k(x)d\mu(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-y}^{-\pi} exp(-inx)k(x)d\mu(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi-y} exp(-inx)k(x)d\mu(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi-y}^{\pi} exp(-inx)k(x)d\mu(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi-y} exp(-inx)k(x)d\mu(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} exp(-inx)k(x)d\mu(x) = \langle e_n, k\rangle.\end{aligned}$$

On obtient donc en réintroduisant dans l'intégrale double :

$$\begin{aligned}\langle e_n, T(f)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)exp(-iny)\langle e_n, k\rangle d\mu(y)\\ &= \langle e_n, k\rangle \int_{-\pi}^{\pi} f(y)exp(-iny)d\mu(y) = \langle e_n, k\rangle\langle e_n, f\rangle.\end{aligned}$$

6. (0.5 point) Donner une expression de $||T(f)||_2^2$ comme somme d'une série.
Solution :
Par l'égalité de Parseval, vu que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de H :

$$||T(f)||_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle e_n, T(f)\rangle|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle e_n, k\rangle\langle e_n, f\rangle|^2.$$

7. (1 point) En déduire que $T : H \to H$ est une application linéaire continue et $|||T||| \leq 1$.
Solution : Comme T est clairement linéaire par linéarité de l'intégrale (sur L^1 donc par restriction, ici aussi sur L^2), il suffit de voir qu'elle est bornée sur la boule unité. Or $|\langle e_n k\rangle >| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |k(x)|d\mu(x) \leq 1$, donc en bornant terme à terme dans la série de la question précédente et en utilisant de nouveau l'égalité de Parseval dans le membre de droite, on obtient :

$$||T(f)||_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle e_n, k\rangle\langle e_n, f\rangle|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle e_n, f\rangle|^2 = ||f||^2.$$

Donc T est bien linéaire continue et en passant au sup sur la boule unité, on obtient :

$$|||T||| = \sup_{||f||_2\leq 1} ||T(f)||_2 \leq \sup_{||f||_2\leq 1} ||f||_2 = 1.$$

8. (1 point) Soit $T_n(f) = \displaystyle\sum_{j=-n}^{n} \langle e_j, k\rangle\langle e_j, f\rangle e_j$. Montrer que $T_n(f)$ converge vers $T(f)$ dans H.
Solution : Par le théorème des bases, on sait que

$$T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle e_n, T(f)\rangle e_j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \langle e_j, k\rangle\langle e_j, f\rangle e_j,$$

donc la différence est :

$$T(f) - T_n(f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}-[\![-n,n]\!]} \langle e_j, k\rangle\langle e_j, f\rangle e_j,$$

En appliquant de nouveau l'égalité de Parseval :

$$||T(f) - T_n(f)|| = \sum_{j\in\mathbb{Z}-[\![-n,n]\!]} |\langle e_j, k\rangle\langle e_j, f\rangle|^2 \to_{n\to\infty} 0,$$

et la limite est 0 comme limite du reste d'une série convergente.

9. (Bonus : 1 point) Montrer que $\langle e_n, k\rangle$ tend vers 0 pour $n \to +\infty$ et $n \to -\infty$.
*Solution :*On intègre par partie $(u' = exp(-inx), v = k(x))$ en se ramenant à une intégrale de Riemann, pour $n \neq 0$:

$$2\pi\langle e_n, k\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} k(x)exp(-inx)dx = [\frac{exp(-inx)}{-in}k(x)]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} k'(x)\frac{exp(-inx)}{in}dx$$

Puis on borne par intégalité triangulaire, vu les inégalités déjà utilisées $||k||_\infty \leq 1, ||k'||_\infty \leq 1$:

$$2\pi|\langle e_n, k\rangle| \leq \frac{2}{n} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{n} dx \leq \frac{2}{n}(1+2\pi) \to_{n\to\pm\infty} 0.$$

On en déduit : la limite voulue.

10. **Bonus : 2 points** En déduire que $|||T_n - T|||$ converge vers 0.

Solution : On reprend l'égalité de Parseval :

$$\begin{aligned} ||T_n - T(f)||_2^2 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}-[\![-n,n]\!]} |\langle e_n, k\rangle\langle e_n, f\rangle|^2 \leq \sup_{j\in\mathbb{Z}-[\![-n,n]\!]} |\langle e_n, k\rangle|^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle e_n, f\rangle|^2 \\ &\leq \sup_{j\in\mathbb{Z}-[\![-n,n]\!]} |\langle e_n, k\rangle|^2 ||f||^2. \end{aligned}$$

En prenant le sup sur la borne unité :

$$|||T_n - T||| \leq \sup_{j\in\mathbb{Z}-[\![-n,n]\!]} |\langle e_j, k\rangle| \to_{n\to\infty} 0$$

avec la limite venant de la question précédente.

11. **Bonus : 3 points** Montrer que l'adhérence $\overline{T(B)}$ est compact. (Indication : on pourra commencer par montrer la compacité de $\overline{T_n(B)}$.) *Solution :*

On a $T_n : H \to \mathrm{Vect}\{e_j : j \in [\![-n,n]\!]\} =: F_n$ et F_n est clairement de dimension $2n+1$, puisque $(e_j)_{j\in[\![-n,n]\!]}$ en est une famille libre et génératrice.

Comme T_n est linéaire continue, l'image de la boulde unité $T_n(B)$ est borné, et donc son adhérence $\overline{T_n(B)}$ est fermé borné dans F_n de dimension finie, donc compact. **Attention, ce raisonnement ne s'applique pas directement à T, qui n'est pas de rang fini (on rappelle que le rang est la dimension de l'image)**.

On montre maintenant que $\overline{T(B)}$ est compact.

Soit $u_n \in \overline{T(B)}$, il existe $T(v_n) \in T(B)$ tel que $||u_n - T(v_n)|| \leq 1/n$ pour $v_n \in B$ (par caractérisation séquentielle de l'adhérence).

Considérons $T_0(v_n) \in \overline{T_0(B)}$. C'est une suite d'un compact donc on peut extraire une suite $v_{\phi_0(n)}$ telle que $T_0(v_{\phi_0(n)})$ converge.

Par induction, on construit $(v_{\phi_m(n)})$ extraite de $(v_{\phi_{m-1}(n)})$ telle que $T_m(v_{\phi_m(n)})$ converge.

On applique alors un argument diagonal, en considérant $(v_{\phi_m(m)})$. Comme pour tout M, $T_M(v_{\phi_m(m)})$ est asymptotiquement (pour $m \geq M$) extraite de $T_M(v_{\phi_M(m)})$ donc converge, donc est de Cauchy.

Finalement, on montre que la suite $(u_{\phi_m(m)})$ est de Cauchy donc converge dans H (donc aussi dans le fermé $\overline{T(B)}$).

EN effet, pour $n \geq m$, on a $||u_{\phi_m(m)} - u_{\phi_n(n)}||_2 \leq ||u_{\phi_m(m)} - T(v_{\phi_m(m)})||_2 + ||T_M(v_{\phi_m(m)}) - T_M(v_{\phi_n(n)})||_2 + ||T(v_{\phi_n(n)}) - u_{\phi_n(n)}||_2 + 2||T - T_M||_\infty \leq \frac{2}{m} + ||T_M(v_{\phi_m(m)}) - T_M(v_{\phi_n(n)})||_2 + 2||T - T_M||_\infty$.

Et on peut prendre M assez grand pour que $2||T - T_M||_\infty \leq 1/m$ puis m assez grand pour que le terme du milieu soit arbitrairement petit (vu $T_M(v_{\phi_m(m)})$ de Cauchy), d'où la conclusion.