L3 : Double Licence Mathématiques et Economie **18 octobre 2023**
2023–2023

Partiel : Théorie de la mesure et topologie

Durée : 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (6 points) :

1. Donner la définition d'une fonction uniformément continue.
2. Énoncer les propriétés topologiques des fermés.
3. Énoncer la caractérisation de la complétude en terme de séries (avec les définitions des notions de convergence de séries utilisées).
4. Donner la définition d'une tribu.

Exercice 1 (5 points) Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels sur lequel on définit $d : \mathbb{N}^2 \to \{0,1\}$ par :

$$d(n,m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = m \\ 1 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}$.

On considère $F = C_b^0(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $(\mathbb{N}, d)$ vers $\mathbb{R}$ muni de sa norme sup :

$$||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Soit $E \subset F$ l'ensembles des suites de termes de série absoluement convergente :

$$E = \Big\{(x_n) \in F : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty\Big\}.$$

2. Est-ce que F est complet ? (justifier)
3. On considère $x_n = \frac{1}{n}$ et $x = (x_n)$. Montrer que $x \in \overline{E}$.
4. Est-ce que E est complet (avec la norme $||\cdot||_\infty$) ? (justifier)

Exercice 2 (9 points+ Bonus 1 point) On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x, y) = \frac{(x+1)^3}{3} + \frac{(y-1)^2}{2}$$

sur l'ensemble $C := \{(x, y) \in [0, +\infty[^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Montrer que C est convexe.
2. Est-ce que C est compact ? (justifier)
3. Calculer l'intérieur de C. (justifier) Montrer que $c = (0, 1) \in Fr(C)$ est sur la frontière de C.
4. Prouver que f est convexe sur C.
5. Est-ce que f est strictement convexe sur C ? (justifier)
6. Montrer qu'il existe une unique solution du problème de minimisation de f sur C.
7. Soit $c = (0, 1)$. Calculer le cône normal $N_C(c)$.
8. **(Bonus :1 point)** Trouver où f atteint son minimum sur C.

Exercice 3 (2 points)
Est-ce que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$ est connexe ? connexe par arc ? (justifier)