L3 : Double Licence Mathématiques et Economie **18 octobre 2023**
2023–2023

Partiel : Théorie de la mesure et topologie

Durée : 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (6 points) : cf cours.

Exercice 1 (6 points) Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels sur lequel on définit $d : \mathbb{N}^2 \to \{0,1\}$ par :

$$d(n,m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = m \\ 1 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

1. (1.5 points) Montrons que d est une distance sur $\mathbb{N}$.

Solution : Tout d'abord on remarque que d est bien positive, puisque à valeur dans $\{0,1\}$. On doit montrer les trois axiomes pour une distance (la même définition donnerait la distance discrète sur tout ensemble !)

— (séparation) Dans la définition, on voit que $d(n,m) = 0$ implique qu'on est dans le cas $n = m$.

— (symétrie) $d(n,m) = d(m,n)$ est évident sur la définition puisque l'égalité ou la différence qui détermine les cas sont des relations symétriques.

— (Inégalité triangulaire) C'est le plus pénible car il faut faire beaucoup de cas :
Si $n \neq m$, on a trois cas

$$d(n,m) = 1 \leq \begin{cases} 1 = 0 + 1 = d(n,l) + d(l,m) & \text{si } l = n \\ 1 = 1 + 0 = d(n,l) + d(l,m) & \text{si } l = m \\ 2 = 1 + 1 = d(n,l) + d(l,m) & \text{si } m \neq l \neq n \end{cases}$$

Si $n = m$, on a $d(n,m) = 0 \leq d(n,l) + d(l,m)$ quelque soit les valeurs de la somme (vu qu'elles sont toutjours positives)
On a donc bien vérifié tous les cas.

On considère $F = C_b^0(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $(\mathbb{N}, d)$ vers $\mathbb{R}$ muni de sa norme sup :

$$||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Soit $E \subset F$ l'ensembles des suites de termes de série absoluement convergente :

$$E = \Big\{(x_n) \in F : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty\Big\}.$$

2. (1 point) Est-ce que F est complet ? (justifier)
Solution : Comme $\mathbb{R}$ est complet, F est un espace de fonctions continues bornées sur un espace métrique à valeur dans un e.v.n. complet, donc par le cours, F est complet.

3. (2 points) On considère $x_n = \frac{1}{n}$ (pour $n > 0$, disons $x_0 = 0$) et $x = (x_n)$. Montrons que $x \in \overline{E}$ par caractérisation séquentielle.
   Solution : La suite $y_n = x1_{[\![1,n]\!]}$ est finie donc absolument convergente donc $y_n = x1_{[\![1,n]\!]} \in E$. Or $y_n - x = (0, \cdots, 0, 1/n, 1/n+1, \cdots)$ donc $||y_n - x||_\infty = \frac{1}{n} \to 0$. Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, on déduit que $x \in \overline{E}$.
4. (1.5 points) Est-ce que E est complet (avec la norme $||\cdot||_\infty$) ? (justifier)
   Solution : Comme x de la question n'est pas une série convergente (série de Riemann avec $\alpha = 1$), on a $x \notin E$ donc $E \neq \overline{E}$ n'est pas fermé dans F. Or tout complet d'une espace métrique est fermé, donc E n'est PAS complet.

Exercice 2 (10 points) On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x,y) = \frac{(x+1)^3}{3} + \frac{(y-1)^2}{2}$$

sur l'ensemble $C := \{(x,y) \in [0,+\infty[^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. (1 point) Montrons que C est convexe.
   Solution : $A = [0,+\infty[^2$ est convexe comme produit d'intervalles. Soit $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ qui est C^2 de hessienne $2I_2$ positive donc g convexe, donc $g^{-1}(]-\infty,0])$ est convexe. Par intersection de convexes, $C = A \cap g^{-1}(]-\infty,0])$ est convexe.
2. (1.5 points) Est-ce que C est compact ? (justifier)
   Solution : On a $x^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ donc $(x,y) \in C$ implique $x \in [0,1]$ et de même $y \in [0,1]$, donc $C \subset [0,1]^2 = B$ est borné.
   On a aussi
   $$C = C \cap [0,1]^2 = [0,1]^2 \cap A \cap g^{-1}(]-\infty,0]) = B \cap g^{-1}(]-\infty,0]).$$
   Comme g (même fonction polynomiale qu'au 1) est continue et $]-\infty,0]$ fermé, $g^{-1}(]-\infty,0])$ est fermé par image réciproque d'un fermé par g continue. Or B est la boule fermé de centre $(0.5, 0.5)$ et de rayon (0.5) pour la norme infini, donc c'est un fermé. C est donc fermé par intersections de fermés.
   Enfin, C est fermé et borné en dimension 2 (finie) donc C est compact.
3. **(2 points)** Calculer l'intérieur de C. (justifier)
   Solution : On pose
   $$O = \{(x,y) \in]0,1[^2 \colon x^2 + y^2 < 1\} =]0,1[^2 \cap g^{-1}(]-\infty,0[).$$
   $]0,1[^2$ est une boule ouverte pour la norme infinie, donc un ouvert et $g^{-1}(]-\infty,0[)$ est ouvert par image réciproque d'un intervalle ouvert par g continue (toujours la même fonction qu'au 1) . Donc par intersection FINIE, O est ouvert et est clairement contenue dans C donc comme l'intérieur est le plus grand ouvert ayant cette propriété, on a $O \subset Int(C)$.
   Montrons que $C - O \subset Int(C)^c = \overline{C^c}$.
   Il faut d'abord décomposer $C - O = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ avec
   $$A_1 = \{0\} \times [0,1], A_2 = [0,1] \times \{0\}, A_3 = \{(x,y) \in]0,1[^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$$

- $(0, y-1/n) \in C^c$ pour tout y, donc par caractérisation séquentielle de l'adhérence $(0, y-1/n) \to (0, y) \in \overline{C^c}$ donc $A_1 \subset \overline{C^c}$
- $(x-1/n, 0) \in C^c$ pour tout x, donc par caractérisation séquentielle de l'adhérence $(x-1/n, 0) \to (x, 0) \in \overline{C^c}$ donc $A_2 \subset \overline{C^c}$
- Enfin, pour $(x, y) \in A_3$ $(x+1/n)^2 + y^2 > x^2 + y^2 = 1$ donc $(x+1/n, y) \in C^c$ donc par caractérisation séquentielle de l'adhérence $(x+1/n, y) \to (x, y) \in \overline{C^c}$ donc $A_3 \subset \overline{C^c}$.

En bilan, $C - O \subset Int(C)^c$ donc $O = Int(C)$.

4. **(1 point)** Prouvons que f est convexe sur C.
Solution : Comme f est polynomiale donc $\mathcal{C}^2$, on calcule la hessienne. On a
$$\nabla f(x, y) = ((x+1)^2, y-1).$$
Sa hessienne est $Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x+1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonale à coefficients positifs pour $x > -1$ (donc à valeurs propres strictement positives) donc positive sur $]-1, +\infty[\times\mathbb{R}$ **ouvert**. Par caractérisation différentielle de la convexité [1], f est convexe sur $]-1, +\infty[\times\mathbb{R}$ et donc a fortiori sur C.
5. **(0.5 points)** Est-ce que f est strictement convexe sur C ? *Solution :* Oui, car la hessienne est définie positive sur $]-1, +\infty[\times\mathbb{R}$, donc f est strictement convexe sur $]-1, +\infty[\times\mathbb{R}$, donc sur C.
6. **(1 point)** Montrons qu'il existe une unique solution du problème de minimisation de f sur C.
Solution : f est continue sur C compact par le 2. donc f atteint son minimum, cela donne l'existence d'une solution. f est strictement convexe donc a au plus un minimum (unicité de la solution).
7. **(2 points)**Soit $c = (0, 1)$. Calculons le cône normal $N_C(c)$.
Solution : On trouve les contraintes décrivant C, on pose $g_1(x, y) = -x$, $g_2(x, y) = -y$, linéaires donc convexes
$$C = \{(x, y) : g_1(x, y) \leq 0, g_2(x, y) \leq 0, g(x, y) \leq 0, \}$$
On a g_1, g_2, g convexes $\mathcal{C}^1$, et $g_1(c) = 0, g_2(c) = -1 < 0, g(c) = 1 + 0 - 1 = 0$ donc g_1 et g sont les contraintes actives en c. Par le théorème de calcul du cône normal, on déduit :
$$N_C(c) = \mathbb{R}_+\{\nabla g_1(c)\} + \mathbb{R}_+\{\nabla g(c)\} = \mathbb{R}_+\{(-1, 0)\} + \mathbb{R}_+\{(0, 2)\}.$$
8. **(1 point)** Trouvons où f atteint son minimum sur C.
Solution : Il suffit de calculer $-\nabla f(c) = -((0+1)^2, (1-1)) = (-1, 0) = \nabla g_1(c) \in N_C(c)$. Par le théorème de minimisation d'une fonction convexe sur C, f atteint son minimum global en $c \in C$.

1. Il est crucial de se placer sur un OUVERT

Exercice 3 (2 points)
Est-ce que l'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$ est connexe ? connexe par arc ? (justifier)

Solution : Soit $O_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$, $O_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
Comme $xy > 1$ implique $xy \neq 0$ donc $x \neq 0$, on a $U = (U \cap O_1) \cup (U \cap O_2)$.
Posons $p(x, y) = x$ linéaire (en dim finie) donc continue donc $O_1 = p^{-1}(]-\infty, 0[)$ et $O_2 = p^{-1}(]0, +\infty[)$ sont ouverts par images réciproques d'intervalles ouverts par h continue. Donc, par description des ouverts induits, $(U \cap O_1)$ et $(U \cap O_2)$ sont des ouverts de U. [2]
De plus $(-1, -2) \in O_1 \cap U$, et $(1, 2) \in O_2 \cap U$ donc $O_i \cap U$ sont des ouverts non-vides disjoints partitionnant O qui n'est donc PAS connexe et a fortiori pas connexe par arc (0.5 point pour l'utilisation de la contraposée de l'implication "connexe par arc implique connexe".)

2. On peut vérifier ici que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et donc que ce sont aussi des ouverts de $\mathbb{R}^2$, mais on en n'a pas besoin.