

Partiel: Théorie de la mesure et topologie

Durée: 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (5 points) :

1. Donner la définition d'une tribu.
2. Énoncer le théorème de stabilité des fonctions mesurables par limites.
3. Énoncer le théorème d'interversion série-intégrale dans le cas intégrable.
4. Énoncer le théorème de dérivation successive.

Exercice 1 (4 points) On définit $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = t^n \exp(-t^4)$$

1. Montrer que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour la mesure de Lebesgue λ .
2. Calculer (en justifiant) la limite de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(t) d\lambda(t).$$

Exercice 2 (4 points) Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^2 \exp\left(-\frac{x}{t}\right) dt$$

1. Montrer que F est bien définie et égale à l'intégrale de Lebesgue:

$$F(x) = \int_{[0,2]} \exp\left(-\frac{x}{t}\right) d\lambda(t).$$

2. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$.
3. En déduire que pour tout $x > 0$:

$$F''(x) = \frac{\exp(-x/2)}{x}.$$

Exercice 3 (5 points) On définit les fonctions $G :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \cos(xt) e^{-t^3} dt.$$

$$G(t) = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{t}} dx,$$

1. Montrer que F est bien définie et continue sur \mathbb{R}
2. Montrer que G est bien définie sur $]0, +\infty[$

Exercice 4 (7 points) Soit l'espace $E = (\ell^1(\mathbb{N}^2), \|\cdot\|_1)$ des familles sommables sur \mathbb{N}^2 à valeur réelle. On rappelle et on pourra utiliser que **E est un espace vectoriel normé complet** (cas particulier du théorème de Riesz-Fischer).

On définit le sous espace vectoriel de $\ell^1(\mathbb{N})$:

$$F := \{(x_n) \in \ell^1(\mathbb{N}) : (nx_n) \in \ell^1(\mathbb{N})\}$$

On définit l'application $\Delta : F \rightarrow \ell^1(\mathbb{N})$ par :

$$\Delta((x_n)_{n \geq 0}) = ((n+1)x_n)_{n \geq 0}.$$

1. Montrer que Δ est bien définie et linéaire.
2. Montrer que $\Delta : (F, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$ n'est pas continue.
3. On définit pour $x = (x_n)_{n \geq 0} \in F$:

$$N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|x_n|.$$

Montrer que N est une norme sur F .

4. On définit $I : F \rightarrow E = \ell^1(\mathbb{N}^2)$ par :

$$I((x_n)_{n \geq 0}) = (x_{n+m})_{n,m \geq 0}.$$

Montrer que $I : (F, N) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ est une isométrie.

5. On définit $f_{n,m,p,q} : E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_{n,m,p,q}((y_{n,m})_{n,m \geq 0}) = y_{n,m} - y_{p,q}.$$

Montrer que $f_{n,m,p,q} : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

6. Montrer que l'image de l'application I est donnée par:

$$Im(I) = \bigcap_{(n,m,p) \in \mathbb{N}^3} f_{n,m,p,n+m-p}^{-1}(\{0\}).$$

7. Montrer que (F, N) est complet.