L3 Mathématiques et Economie ou Informatique **22 novembre 2024**
2024–2025

Partiel: Théorie de la mesure et topologie

Durée: 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (5 points) :

1. Donner la définition d'une tribu.
2. Énoncer le théorème de stabilités des fonctions mesurables par limites.
3. Énoncer le théorème d'interversion série-intégrale dans le cas intégrable.
4. Énoncer le théorème de dérivation successive.

Exercice 1 (4 points) On définit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = t^n exp\big(-t^4\big)$$

1. Montrer que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour la mesure de Lebesgue λ.
2. Calculer (en justifiant) la limite de

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t) d\lambda(t).$$

Exercice 2 (4 points) Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^2 exp\big(-\frac{x}{t}\big) dt$$

1. Montrer que F est bien définie et égale à l'intégrale de Lebesgue:

$$F(x) = \int_{[0,2]} exp\big(-\frac{x}{t}\big) d\lambda(t).$$

2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
3. En déduire que pour tout $x > 0$:

$$F''(x) = \frac{\exp(-x/2)}{x}.$$

Exercice 3 (7 points) Soit l'espace $E = (\ell^1(\mathbb{N}^2), ||\cdot||_1)$ des familles sommables sur $\mathbb{N}^2$ à valeur réelle. On rappelle et on pourra utiliser que E **est un espace vectoriel normé complet** (cas particulier du théorème de Riesz-Fischer).
On définit le sous espace vectoriel de $\ell^1(\mathbb{N})$:

$$F := \{(x_n) \in \ell^1(\mathbb{N}) : (nx_n) \in \ell^1(\mathbb{N})\}$$

On définit l'application $\Delta : F \to \ell^1(\mathbb{N})$ par :

$$\Delta((x_n)_{n\geq 0}) = ((n+1)x_n)_{n\geq 0}.$$

1. Montrer que Δ est bien définie et linéaire.
2. Montrer que $\Delta : (F, ||\cdot||_1) \to (\ell^1(\mathbb{N}), ||\cdot||_1)$ n'est pas continue.
3. On définit pour $x = (x_n)_{n\geq 0} \in F$:
$$N(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|x_n|.$$
Montrer que N est une norme sur F.
4. On définit $I : F \to E = \ell^1(\mathbb{N}^2)$ par :
$$I((x_n)_{n\geq 0}) = (x_{n+m})_{n,m\geq 0}.$$
Montrer que $I : (F, N) \to (E, ||\cdot||_1)$ est une isométrie.
5. On définit $f_{n,m,p,q} : E \to \mathbb{R}$ par
$$f_{n,m,p,q}((y_{n,m})_{n,m\geq 0}) = y_{n,m} - y_{p,q}.$$
Montrer que $f_{n,m,p,q} : (E, ||\cdot||_1) \to \mathbb{R}$ est continue.
6. Montrer que l'image de l'application I est donnée par:
$$Im(I) = \bigcap_{(n,m,p)\in\mathbb{N}^3} f^{-1}_{n,m,p,n+m-p}(\{0\}).$$
7. Montrer que (F, N) est complet.