L3 Mathématiques et Economie ou Informatique **22 novembre 2024**
2024–2025

Correction du Partiel: Théorie de la mesure et topologie

Durée: 1 heure 30

Question de Cours (5 points, cf. cours) :

Exercice 1 (4 points) On définit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = t^n exp\big(- t^4\big)$$

1. Montrer que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour la mesure de Lebesgue λ.

   Solution:

   f_n est continue sur $[0, +\infty[$ comme produit de polynôme et d'exponentielle. On montre qu'elle est Riemann-intégrable. Comme $t^2 f_n(t) = t^{n+2} exp\big(- t^4\big) \to_{t\to\infty} 0$ (par croissance comparée), on a $f_n(t) = o(\frac{1}{t^2})$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt < +\infty$ (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), donc par comparaison, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$. Comme dans le cas positif, l'intégrale de Riemann coïncide avec celle de Lebesgue, on conclut que f_n intégrable sur $[0, +\infty[$ pour la mesure de Lebesgue λ.

2. Calculer (en justifiant) la limite de

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} f_n(t) d\lambda(t).$$

   Solution: Attention t^n n'est pas croissante sur $[0, 1]$ donc on ne peut pas appliquer le TCM directement.

   Méthode 1: On remarque que $\int_{[0,\infty[} f_n(t) d\lambda(t) \geq \int_{]1,\infty[} f_n(t) d\lambda(t)$ car $f_n 1_{[0,\infty[} \geq f_n 1_{]1,\infty[}$ car f_n positive et par monotonie de l'intégrale.

   Or $f_n(t)$ est croissante sur $]1, +\infty[$ positive mesurable (car continue), et converge simplement vers $+\infty$ donc par TCM:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]1,\infty[} f_n(t) d\lambda(t) = \int_{]1,\infty[} \lim_{n\to\infty} f_n(t) d\lambda(t) = \int_{]1,\infty[} +\infty d\lambda(t) \geq \int_{]1,\infty[} 1 d\lambda(t) = +\infty$$

   d'où $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} f_n(t) d\lambda(t) = +\infty$.

   Méthode 2: On applique le lemme de Fatou, vu que f_n sot mesurable positive, donc:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} f_n(t) d\lambda(t) \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} f_n(t) d\lambda(t) \geq \int_{[0,\infty[} \liminf_{n\to\infty} f_n(t) d\lambda(t)$$

Or $f_n(t)$ converge simplement vers:

$$f(t) = \lim_n f_n(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 1 \\ e^{-1} & si\ t = 1 \\ +\infty & si\ t > 1 \end{cases}$$

et on obtient donc (vu que la lim inf est la limite simple quand celle-ci existe):

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} f_n(t) d\lambda(t) \geq \int_{[0,\infty[} f(t) d\lambda(t) \geq \int_{]1,\infty[} +\infty d\lambda(t) = +\infty$$

d'où $\limsup_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} f_n(t) d\lambda(t) = \liminf_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} f_n(t) d\lambda(t) = +\infty$ et donc la limite existe et vaut $+\infty$

Exercice 2 (4 points) Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^2 exp\big(-\frac{x}{t}\big) dt$$

1. Montrer que F est bien définie et égale à l'intégrale de Lebesgue:

$$F(x) = \int_{[0,2]} exp\big(-\frac{x}{t}\big) d\lambda(t).$$

Solution:

On pose $f(x,t) = exp\big(-\frac{x}{t}\big)$. f continue (on peut dire aussi directement C^∞ ou C^2 pour la question suivante) sur sur $]0,+\infty[^2$ par composée de exp, polynôme et d'un quotient à dénominateur non-nul (vu $t > 0$).

Comme f est positive continue, donc f est mesurable et son intégrale de Riemann existe et coïncide avec son intégrale de Lebesgue.

De plus $|f(x,t)| \leq 1$ et 1 est intégrable sur $[0,2]$ donc par domination, f est intégrable sur $[0,2]$ et donc F est bien définie (et même $F(x) \in [0,2]$)

2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

Solution:

On pose $f(x,t) = exp\big(-\frac{x}{t}\big)$.

f est C^∞ sur $]0,+\infty[^2$ par composée de exp, polynôme et d'un quotient à dénominateur non-nul (vu $t > 0$).

On calcule la dérivées partielles:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = -\frac{1}{t} exp\big(-\frac{x}{t}\big).$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) = \frac{1}{t^2} exp\big(-\frac{x}{t}\big).$$

On a déjà dominé f à la question 1 (par une fonction intégrable ne dépendant pas de x), on considère $x_0 > 0$ et pour $x > x_0$, on a :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| \leq \frac{1}{t} exp\big(- \frac{x_0}{t}\big) =: g(t).$$
$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)\right| \leq \frac{1}{t^2} exp\big(- \frac{x_0}{t}\big) =: h(t).$$

g, h sont indépendantes de x et il reste à voir qu'elles sont intégrables pour que ce soit une domination satisfaisante. Or $g(t) = th(t) \leq 2h(t)$ pour $t \in [0, 2]$, donc par domination, il suffit de voir h intégrable.

Or, en passant à l'intégrale de Riemann (cas positif), le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ donne $du = \frac{-dt}{t^2}$ d'où pour $i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned}\int_0^2 h(t)dt = \int_0^2 \frac{dt}{t^2} \exp\big(- \frac{x_0}{t}\big)dt = \int_{1/2}^{\infty} \exp\big(- x_0 u\big)du \\ = [\frac{- \exp\big(- x_0 u\big)}{x_0}]_{1/2}^{\infty} = \frac{exp\big(- x_0/2\big)}{x_0} < +\infty \end{aligned} \tag{1}$$

Comme on a obtenu une domination de f et ses deux dérivées partielles par h intégrable sur [0,2] uniformément sur $]x_0, +\infty[$, on peut appliquer le théorème de dérivation successive sur $]0, 2[\times]x_0, +\infty[$ et il implique que h est $\mathcal{C}^2$ et que $F''(x) = \int_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)dt$.

3. En déduire que pour tout $x > 0$:

$$F''(x) = \frac{\exp(-x/2)}{x}.$$

Solution:

On a obtenu

$$F''(x) = \int_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)dt = \int_0^2 \frac{1}{t^2} exp\big(- \frac{x}{t}\big)dt = \frac{\exp(-x/2)}{x}.$$

en calculant comme pour (1) avec x au lieu de x_0.

Exercice 3 (7 points) On rappelle et on pourra utiliser que l'espace $E = (\ell^1(\mathbb{N}^2), ||\cdot||_1)$ des familles sommables sur $\mathbb{N}^2$ est un espace vectoriel normé complet (cas particulier du théorème de Riesz-Fischer). On définit le sous espace vectoriel de $\ell^1(\mathbb{N})$:

$$F := \{(x_n) \in \ell^1(\mathbb{N}) : (nx_n) \in \ell^1(\mathbb{N})\}$$

On définit l'application $\Delta : F \to \ell^1(\mathbb{N})$ par :

$$\Delta((x_n)_{n\geq 0}) = ((n+1)x_n)_{n\geq 0}.$$

1. Montrer que Δ est bien définie et linéaire.

   Solution: pour $x = (x_n) \in F \subset \ell^1(\mathbb{N})$, on a $y = (nx_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$. **Comme $\ell^1(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel**, $\Delta((x_n)_{n\geq 0}) = x + y \in \ell^1(\mathbb{N})$.

   La linéarité est évidente (en chaque coordonnée, c'est une multiplication par un scalaire).

2. Montrer que $\Delta : (F, ||\cdot||_1) \to (\ell^1(\mathbb{N}), ||\cdot||_1)$ n'est pas continue.

   Solution: **Comme Δ est linéaire**, elle est continue si et seulement si elle est bornée sur la boule unité. On montre donc qu'elle n'est pas bornée sur cette boule. On prend $\delta^m = (\delta^m_n)$ la suite définie par $\delta^m_n = 1_{\{m\}}(n)$. On a donc $||\delta^m||_1 = 1$ et $\Delta(\delta^m) = (m+1)\delta^m$, donc $||\Delta(\delta^m)||_1 = m+1 \to \infty$ donc Δ n'est pa bornée sur la boule unité, donc pas continue.

3. On définit pour $x \in F$:

$$N((x_n)_{n\geq 0}) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|x_n|.$$

   Montrer que N est une norme sur F. *Solution:*

   On remarque que $N(x) = ||\Delta(x)||_1$. On vérifie les 4 conditions:

   0) N est positive comme somme de termes positives et **finie** (ce qui est le plus délicat ici) car $\Delta(x) \in \ell^1(\mathbb{N})$ (cf question 1, condition Δ bien définie).
   1) (Séparation) On a $N(x) \geq ||x||_1 \geq 0$ car $(n+1) \geq 1$ donc $N(x) = 0$ implique $||x||_1 = 0$ d'où $x = 0$ vu le fait que $||\cdot||_1$ est une norme.
   2) (homogénéité) On utilise que Δ est linéaire puis que $||\cdot||_1$ est une norme (donc vérifie l'homogénéité):

$$N(\lambda x) = ||\Delta(\lambda x)||_1 = ||\lambda\Delta(x)||_1 = |\lambda| \; ||\Delta(x)||_1 = |\lambda| \; N(x)$$

   3) (inégalité triangulaire) On utilise que Δ est linéaire puis que $||\cdot||_1$ est une norme (donc vérifie l'inégalité triangulaire):

$$N(x+y) = ||\Delta(x+y)||_1 = ||\Delta(x)+\Delta(y)||_1 \leq ||\Delta(x)||_1+||\Delta(y)||_1 = N(x)+N(y).$$

4. On définit $I : F \to E = \ell^1(\mathbb{N}^2)$ par :

$$I((x_n)_{n\geq 0}) = (x_{n+m})_{n,m\geq 0}.$$

   Montrer que $I : (F, N) \to (E, ||\cdot||_1)$ est une isométrie.

   Solution:

   Par définition, on a :

$$||I((x_n)_{n\geq 0})||_1 = \sum_{n,m\geq 0} |x_{n+m}|$$

On applique donc le théorème de sommation par paquet que la décomposition $\mathbb{N}^2 = \cup_{N\geq 0}\Lambda_N$ avec $\Lambda_N = \{(n,m) \in \mathbb{N} : N = n+m\}$. On a $Card(\Lambda_N) = N+1$ car les paires sont déterminées par $n \in [\![0,N]\!]$. On obtient:

$$||I((x_n)_{n\geq 0})||_1 = \sum_{N\geq 0}\sum_{N=n+m}|x_N| = \sum_{N\geq 0}(N+1)|x_N| = N((x_n)_{n\geq 0})$$

ce qui est l'isométrie voulue.

5. On définit $f_{n,m,p,q} : E \to \mathbb{R}$ par

$$f_{n,m,p,q}((y_{n,m})_{n,m\geq 0}) = y_{n,m} - y_{p,q}.$$

Montrer que $f_{n,m,p,q} : (E, ||\cdot||_1) \to \mathbb{R}$ est continue. *Solution:* On voit que $f_{n,m,p,q}$ est 2-lipschitzienne. En effet, par l'inégalité triangulaire:

$$\begin{aligned}|f_{n,m,p,q}(x) - f_{n,m,p,q}(y)| &= |y_{n,m} - y_{p,q} - (x_{n,m} - x_{p,q})| \leq |y_{n,m} - x_{n,m}| + |y_{p,q} - x_{p,q}| \\ &\leq ||y-x||_1 + ||y-x||_1 = 2||y-x||_1.\end{aligned}$$

Commentaire (en dehors de la preuve): En fait on peut voir en séparant le cas $(n,m) = (p,q)$ qu'elle est même 1-lipschitzienne (et comme elle est linéaire, on aurait aussi pu montrer qu'elle est bornée sur la boule unité, mais ce n'est pas vraiment plus court ici).

6. Montrer que l'image de l'application I est donné par:

$$Im(I) = \bigcap_{(n,m,p)\in\mathbb{N}^3} f^{-1}_{n,m,p,n+m-p}(\{0\}).$$

Solution: On doit montrer que

$$Im\ I = \{(y_{n,m})_{n,m\geq 0} : \forall (n,m,p,q) : n+m = p+q \Rightarrow y_{n,m} = y_{p,q}\}$$

Notons A l'ensemble de droite, qui est l'intersection des noyaux voulues.

En effet, $\subset$ est évident que si $n+m = N = p+q$ et $x = (x_n)_{n\geq 0}$, $I(x)_{n,m} = x_N = I(x)_{p,q}$, donc $I(x) \in A$.

Pour $\supset$, soit $y \in A$, on appelle x_N la valeur commune de $x_N = y_{n,m}$ pour $n+m = N$. Par la même application de la sommation par paquet

$$||y||_1 = \sum_{n,m\geq 0}|y_{n,m}| = \sum_{N\geq 0}\sum_{N=n+m}|x_N| = \sum_{N\geq 0}(N+1)|x_N| = N((x_n)_{n\geq 0})$$

comme $||y||_1 < +\infty$ on a donc $(x_n)_{n\geq 0} \in F$ et $I(x) = y$.

7. Montrer que (F,N) est complet.

Solution: Comme I identifie (F,N) avec son image, il suffit de voir que ImI est complet. Comme E est complet (cf. rappel), il suffit de montrer que $Im(I)$ est fermé dans E, car un fermé d'un complet est complet. Mais on vient d'écrire $Im(I)$ comme intersection d'images réciproques de fermés $\{0\}$ par $f_{n,m}$ continue, donc $\Im(I)$ est bien fermé de E.