L3 Mathématiques et Economie ou Informatique 21/11/2025

2025-2026

Partiel : Théorie de la mesure et topologie

Durée : 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET
TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (5 points) :

1. Donner la définition de l'intégrale d'une fonction positive.
2. Énoncer le théorème de transfert.
3. Énoncer le théorème de convergence monotone.
4. Énoncer le théorème de continuité avec condition de domination.

Exercice 1 (4 points) On définit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = \frac{t^n}{n!} exp\big(- \sqrt{t}\big)$$

1. Montrer que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour la mesure de Lebesgue λ.
2. Calculer (en justifiant) la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(t)\, d\lambda(t).$$

Exercice 2 (5 points) Soit $\lambda = \lambda_1$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On définit les fonctions $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $G :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \int_0^1 \cos(xt) e^{-x^3} dx, \qquad G(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-\frac{t^2}{x}} d\lambda(t).$$

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $0 < a < b$. Montrer que G est C^1 sur $]a, b[$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire que G est C^1 sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 (6 points) Soit l'espace $E = (C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On rappelle et on pourra utiliser que E est un espace vectoriel normé. On note $P(x) = x$ la fonction identité sur $\mathbb{R}$.

On définit le sous espace vectoriel de E :

$$F := \{f \in C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : Pf \in C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$$

On définit l'application (de multiplication) $m_P : F \to C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par :

$$m_P(f) = Pf.$$

1. Montrer que m_P est bien définie et linéaire.

2. Montrer que $m_P : (F, ||\cdot||_\infty) \to (C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ n'est pas continue.

3. On définit pour $f \in F$:

$$N(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \max(1, |x|)|f(x)|.$$

Montrer que N est une norme sur F.

4. On définit $I : F \to E^2 = C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ par :

$$I(f) = (f, Pf).$$

Montrer que $I : (F, N) \to E^2$ est une isométrie. (On munit E^2 de la norme produit $||(f, g)|| = \max(||f||_\infty, ||g||_\infty)$)

5. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, l'application $G_x : E^2 \to \mathbb{R}$ par

$$G_x(f, g) = g(x) - xf(x).$$

Montrer que $G_x : (E^2, ||\cdot||) \to \mathbb{R}$ est continue.

6. Montrer que l'image de l'application I est donnée par :

$$Im(I) = \bigcap_{x\in\mathbb{R}} G_x^{-1}(\{0\}).$$

7. Montrer que (F, N) est complet.