L3 Mathématiques et Economie ou Informatique 21/11/2025

2025-2026

Correction du Partiel

Question de Cours (5 points) : cf cours

Exercice 1 **(4 points)** On définit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = \frac{t^n}{n!} exp\big(-\sqrt{t}\big)$$

1. Montrer que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour la mesure de Lebesgue λ.

   Solution :

   f_n est continue comme composée et produit d'un polynôme, d'une exponentielle et de racine carré sur $[0, +\infty[$. Elle est donc continue positive donc son intégrale de Lebesgue coïncide avec son intégrale de Riemann. Par ailleurs $f_n(t)t^2 \to_{n\to\infty} 0$ par croissance comparée, donc $f_n(t) = O(1/t^2)$ en $+\infty$, donc par domination à une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), f_n est intégrable au sens de Riemann sur $[0, +\infty[$ donc intégrable sur $[0, +\infty[$ pour la mesure de Lebesgue λ.

2. Calculer (en justifiant) la somme de la série
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(t) d\lambda(t).$$

   Solution :

   On calcule d'abord la limite simple de la série de fonction :
$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = exp(t - \sqrt{t})$$

   On applique le théorème d'interversion série intégrale dans le cas positif et on obtient :
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(t) d\lambda(t) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) d\lambda(t) = +\infty.$$
   car $f(t) \to_{t\to\infty} \infty$ par croissance comparée, donc l'intégrale diverge très grossièrement.

Exercice 2 (5 points) Soit $\lambda = \lambda_1$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On définit les fonctions $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $G :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \int_0^1 \cos(xt) e^{-x^3} dx, \qquad G(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-\frac{t^2}{x}} d\lambda(t).$$

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

   Solution : On applique le théorème de dérivation successive pour $k = 0$. $f(x,t) = \cos(xt)e^{-x^3}$ est continue (C^0) sur $]0,1[\times\mathbb{R}$. et est dominé par $|f(x,t)| \leq 1$ qui ne dépend pas de t et est intégrable sur $]0,1[$ (d'intégrale 1) donc par le théorème de dérivation successive (cas $k = 0$), donc $F(t) = \int_0^1 \cos(xt)e^{-x^3} d\lambda(x)$ est C^0 sur $\mathbb{R}$. Enfin, comme on intègre une fonction continue (par morceau) sur un segment, l'intégrale de Lebesgue coïncide bien avec l'intégrale de Riemann de l'énoncé.

2. Soit $0 < a < b$. Montrer que G est C^1 sur $]a,b[$ et calculer sa dérivée.

   Solution : On applique le théorème de dérivation successive pour $k = 1$. On pose

   $$g(t,x) = e^{-\frac{t^2}{x}}$$

   g est une fonction C^1 sur $]0,+\infty[^2$ par composée d'une fraction rationnelle à dénominateur non nul avec exp.

   On calcule donc sa dérivée partielle :

   $$\frac{\partial}{\partial x} g(t,x) = \frac{t^2}{x^2} e^{-\frac{t^2}{x}}.$$

   On se place sur $x \in]a,b[$ pour avoir $\frac{t^2}{x^2} \leq \frac{t^2}{a^2}$ et $e^{-\frac{t^2}{x}} \leq e^{-\frac{t^2}{b}}$. On domine donc, pour tout $(t,x) \in]0,+\infty[\times]a,b[$:

   $$|g(t,x)| \leq e^{-\frac{t^2}{b}} = \phi_0(t)$$
   $$\left|\frac{\partial}{\partial x} g(t,x)\right| \leq \frac{t^2}{a^2} e^{-\frac{t^2}{b}} = \phi_1(t)$$

   Or ϕ_0 et ϕ_1 sont continue sur $]0,+\infty[$ et $t^2\phi_i(t) \to_{t\to\infty} 0$ par croissance comparée, donc par domination à une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), ϕ_i sont des dominations intégrables indépendantes de x.

On applique le théorème de dérivation successive pour $k = 1$ sur $]0, +\infty[\times]a, b[$ et on conclut donc que G est C^1 sur $]a, b[$ de dérivée :

$$G'(x) = \int_{[0,+\infty[} \frac{t^2}{x^2} e^{-\frac{t^2}{x}} d\lambda(t).$$

3. En déduire que G est C^1 sur $]0, +\infty[$. **Solution :** Par localité du caractère C^1, G est C^1 sur tout $]a, b[\subset]0, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[= \bigcup_{0<a<b}]a, b[$.

Exercice 3 (6 points) Soit l'espace $E = (C^0_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On rappelle et on pourra utiliser que E est un espace vectoriel normé. On note $P(x) = x$ la fonction identité sur $\mathbb{R}$.

On définit le sous espace vectoriel de E :

$$F := \{f \in C^0_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : Pf \in C^0_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$$

On définit l'application (de multiplication) $m_P : F \to C^0_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par :

$$m_P(f) = Pf.$$

1. Montrer que m_P est bien définie et linéaire.

Solution : Pour $f \in F$, on a, par définition de F, $m_P(f) = Pf \in C^0_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc $m_P : F \to E$ est bien définie. Attention, le produit d'une fonction bornée par P, qui n'est pas bornée, n'est pas forcément bornée (par exemple $1 \notin F$), ce n'est donc que la définition de F qui assure que m_P est bien défini, et on ne pourra pas prendre n'importe quelle fonction bornée, par exemple pour la suite au 2.

La linéarité est assez évidente (en chaque coordonnée, c'est une multiplication de deux fonctions) ;

$$\begin{aligned} m_P(\lambda f + g)(x) &= x.(\lambda f(x) + g(x)) \\ &= x.(\lambda f(x) + g(x)) = (\lambda x.f(x) + x.g(x)) = (\lambda m_P(f) + m_P(g))(x). \end{aligned}$$

2. Montrer que $m_P : (F, ||\cdot||_\infty) \to (C^0_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ n'est pas continue.

Solution : Comme m_P est linéaire, elle est continue si et seulement si elle est bornée sur la boule unité. On montre donc qu'elle n'est pas bornée sur cette boule. On prend

$$f_n(t) = max(1 - |t - n|, 0) = \begin{cases} t - n + 1 & \text{si } t \in]n-1, n[\\ -t + n + 1 & \text{si } t \in]n, n+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a donc $||f_n||_\infty = f_n(n) = 1$ (car f_n est croissante jusqu'à n puis décroissante).

On a $|tf_n(t)| \leq (n+1)||f_n||_\infty$ vu f_n nulle en dehors de $]n-1, n+1[$ soit $Pf_n \in E$ donc $f_n \in F$.

Enfin, $||m_P(f_n)||_\infty \geq f_n(n)P(n) = n$ donc $||m_P(f_n)||_\infty \geq n \to \infty$ donc m_P n'est pas bornée sur la boule unité (de F pour $||\cdot||_\infty$), donc pas continue.

3. On définit pour $f \in F$:

$$N(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \max(1, |x|)|f(x)|.$$

Montrer que N est une norme sur F.

Solution :

0. $N(f) \geq 0$ par sup de produit de nombre positif et surtout $N(f) < +\infty$ car, pour $f \in F$, Pf est bornée bisons par $||Pf||_\infty < +\infty$ et f est bornée par $||f||_\infty < +\infty$, donc pour tout x :

   $$\max(1, |x|)|f(x)| = \max(|f(x)|, |xf(x)|) \leq \max(||f||_\infty, ||Pf||_\infty)$$

   donc en passant au sup : $N(f) \leq \max(||f||_\infty, ||Pf||_\infty) < +\infty$

   Notez que cela donne $N(f) = ||\max(|f|, |Pf|)||_\infty$ qu'on va utiliser ensuite.
1. (Séparation) Si $N(f) = 0$, alors pour tout x, $|f(x)| \leq \max(1, |x|)|f(x)| \leq 0$, donc $f = 0$.
2. (homogénéité) :

   $$\begin{aligned} N(\lambda f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \max(1, |x|)|\lambda f(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \max(1, |x|)|\lambda||f(x)| \quad \text{car } |\cdot| \text{ } \textit{homogène} \\ &= \||\lambda| \max(f, Pf)\|_\infty \\ &= |\lambda|\| \max(f, Pf)\|_\infty \quad \text{car } ||\cdot||_\infty \text{ } \textit{homogène}. \end{aligned}$$

3. (inégalité triangulaire) : Comme $|\cdot|$ vérifie l'inégalité triangulaire on a

   $$\max(|f+g|, |Pf+Pg|) \leq \max(|f|+|g|, |Pf|+|Pg|) \leq \max(|f|, |Pf|)+\max(|g|, |Pg|)$$

   D'où en passant au sup et utilisant que $||\cdot||_\infty$ est une norme :

   $$\begin{aligned} N(f+g) = \|\max(|f+g|, |Pf+Pg|)\|_\infty &\leq \|\max(|f|, |Pf|) + \max(|g|, |Pg|)\|_\infty \\ &\leq \|\max(|f|, |Pf|)\|_\infty + \|\max(|g|, |Pg|)\|_\infty = N(f) + N(g). \end{aligned}$$

4. On définit $I : F \to E^2 = C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ par :

$$I(f) = (f, Pf).$$

Montrer que $I : (F, N) \to E^2$ est une isométrie. (On munit E^2 de la norme produit $||(f, g)|| = \max(||f||_\infty, ||g||_\infty)$)

Solution :

Par définition, on a :

$$||I(f)|| = ||(f, Pf)|| = \max(||f||_\infty, ||Pf||_\infty) = \max(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \sup_{x\in\mathbb{R}} |x||f(x)|) = N(f)$$

par commutation des sup et max, ce qui est l'isométrie voulue.

5. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, l'application $G_x : E^2 \to \mathbb{R}$ par

$$G_x(f, g) = g(x) - xf(x).$$

Montrer que $G_x : (E^2, || \cdot ||) \to \mathbb{R}$ est continue. *Solution :* Clairement, G_x est linéaire, il suffit donc de montrer qu'elle est bornée sur la boule unité, soit donc $(f, g) \in E$, avec $||(f, g)|| \leq 1$, donc $|f(x)|, |g(x)| \leq 1$ et donc, par l'inégalité triangulaire :

$$|G_x(f, g)| = |g(x) - xf(x)| \leq |g(x)| + |x||f(x)| \leq 1 + |x|.$$

ce qui est la borne voulue (qui dit $|||G_x||| \leq 1 + |x|$).

6. Montrer que l'image de l'application I est donnée par :

$$Im(I) = \bigcap_{x\in\mathbb{R}} G_x^{-1}(\{0\}).$$

Solution : Soit

$$A = \bigcap_{x\in\mathbb{R}} G_x^{-1}(\{0\}) = \{(f, g) \in E^2 : \forall x g(x) - xf(x) = 0\}$$

Clairement $Im(I) \subset A$ car pour $f \in F$, $I(f) = (f, Pf)$ avec $g = Pf \in E$ donc $I(f) = (f, Pf) \in A$.

Réciproquement, si $(f, g) \in A$, on a $\forall x g(x) = xf(x) = P(x)f(x)$, donc $(f, g) = (f, Pf)$ et $g = Pf \in E$ donc $f \in F$ et $(f, g) = I(f)$ ce qui dit $Im(I) \supset A$.

7. Montrer que (F, N) est complet.

*Solution :*Comme I identifie (F, N) avec son image, il suffit de voir que ImI est complet. Comme E^2 est complet parce que E est complet par le cours et qu'un produit de complets est complet, il suffit de montrer que $Im(I)$ est fermé dans E^2, car un fermé d'un complet est complet. Mais on vient d'écrire $Im(I)$ comme intersection d'images réciproques de fermés $\{0\}$ par G_x continue, donc $Im(I)$ est bien fermé de E^2.