Feuille d'exercices numéro 1
Ensembles dénombrables, Familles sommables.

Rappels, Dénombrabilité

Exercice 1 (injectivité, surjectivité) Soit $f : X \to Y$.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) f est injective ;
   (b) $\forall A \subset X,\ f^{-1}(f(A)) = A$;
   (c) $\forall x \in X,\ f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) f est surjective ;
   (b) $\forall B \subset Y,\ f(f^{-1}(B)) = B$;
   (c) $\forall y \in Y,\ f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$.

Exercice 2 (fonctions indicatrices) Rappelons que si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ la fonction indicatrice 1_A de A est définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer $1_\emptyset$ et 1_Ω.
2. Pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ calculer $1_A^{-1}(B)$.
3. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Calculer en fonction de 1_A et 1_B les fonctions suivantes : 1_{A^c}, $1_{A\cap B}$, $1_{A\cup B}$ et $1_{A\Delta B}$ (dans le cas particulier $A \cap B = \emptyset$ et dans le cas général).
4. Soit (A_n) une suite de $\mathcal{P}(\Omega)$ et soit $A = \bigcup_n A_n$.
   (a) Montrer que la suite (A_n) est croissante si et seulement si la suite (1_{A_n}) est croissante. Montrer que dans ce cas (1_{A_n}) converge (simplement) vers 1_A.
   (b) Si les A_n sont d.d.d. (deux à deux disjoints), montrer que $1_A = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{A_n}$.

Exercice 3 Parmi les assertions suivantes : lesquelles sont VRAIES et lesquelles sont FAUSSES ? (Prouver les ou réfuter les selon le cas).

1. L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.
2. L'ensemble des nombres pairs est dénombrable.
3. $[a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$ est dénombrable.
4. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. $\mathbb{R}$ est dénombrable.
6. $\mathbb{C}$ est dénombrable.
7. $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ est dénombrable.

Familles sommables

Exercice 4 Étudier la sommabilité et calculer la somme éventuelle de la famille $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ avec

$$u_k = \frac{(-1)^{|k|}}{(|k|+1)^2}.$$

Indication : on pourra utiliser $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 5 Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(i+j+1)^3}$.

Exercice 6 Trouver pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la famille suivante est sommable : $\displaystyle\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(k^2+l^2)^\alpha}$.

Exercice 7 Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries complexes absolument convergentes. On pose

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q.$$

1. Montrer que $\sum c_n$ est absolument convergente et calculer sa somme.
2. Application : On prend $a_n = z^n = b_n$ avec $|z| < 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$.

Exercices suplémentaires

Exercice 8 Soit E un ensemble infini et D un ensemble au plus dénombrable disjoint de E.

1. Montrer qu'il existe une injection $f : \mathbb{N} \to E$.
2. Montrer qu'il existe une bijection $\mathrm{Im}(f) \cup D$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer qu'il existe une bijection de $E \cup D$ sur E.

Exercice 9

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficient dans $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
2. Est ce que l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficient dans $\mathbb{R}$ est dénombrable ?

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la famille de terme $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

1. Soit $(I'_m)_{m\geq 0}$ la partition de $\mathbb{N}^*$ donné par $I_m = \{2m+2, 4m+1, 4m+3\}$ et $v'_m = \displaystyle\sum_{n\in I'_m} u_n$.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{m\geq 0} v'_m$ converge vers un nombre $v' < 0$.
2. Soit $(I''_m)_{m\geq 0}$ la partition de $\mathbb{N}^*$ donné par $I_m = \{2m+1, 4m+2, 4m+4\}$ et $v''_m = \displaystyle\sum_{n\in I''_m} u_n$.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{m\geq 0} v''_m$ converge vers un nombre $v'' > 0$.
3. En déduire que la famille $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas sommable.
4. Remontrer ce résultat en utilisant un autre résultat du cours.