Université Claude Bernard
L3 Topologie et Théorie de la Mesure

Mathématiques
2024-2025

**Feuille d'exercices numéro 2**
**Correction partielle**

**Exercice 1** **Norme produit** (cf. TD)

**Exercice 2** (cf. TD)

**Exercice 3** (cf. TD)

**Exercice 4** (cf. TD)

**Exercice 5** ($\star$) Correction de 2021-2022 exercice 8
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_correctionpartiellemas.pdf`

**Exercice 6**
(cf TD.)

## Ouverts, fermés.

**Exercice 7** (cf TD.)

**Exercice 8**

1. Donnons un exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.
   *Correction* : Les ouverts $]-1/n, 1/n[= B(0, 1/n)$ ont pour intersection $\bigcap_{n\geq 1} ]-1/n, 1/n[= \{0\}$ qui est un fermé non vide du connexe $\mathbb{R} \neq \{0\}$ donc n'est pas ouvert.
2. Donnons un exemple d'une union de fermés qui n'est pas un fermé.
   *Correction* :
   $]0, 1[= \bigcup_{x\in]0,1[} \{x\}$ est une union de singleton (boules fermés de rayons 0) donc de fermés, mais $]0, 1[$ est un ouvert non-vide du connexe $\mathbb{R} \neq ]0, 1[$ donc $]0, 1[$ est n'est pas fermé.

**Exercice 9** ($\star$)
Correction de 2021-2022 exercice 12
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_correctionpartiellemas.pdf`

**Exercice 10** (cf TD.)

**Exercice 11**

1. Calculer l'adhérence et l'intérieure de $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
   *Correction* : Montrons que $\overline{A} = [0, 1]$. En effet, pour $x \in ]0, 1[$ on prend $x_n = \frac{\lfloor nx\rfloor}{n}$. Or la partie entière vérifie $nx \leq \lfloor nx\rfloor < nx + 1$, donc $x \leq x_n < x + 1/n$ donc par le théorème des gendarmes $x_n \to x$. Or $x_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n$ et pour n assez grand, $x_n \in ]0, 1[$, donc $x_n \in A$. Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, on déduit $x \in \overline{A}$. Donc $\overline{A} \supset A \cup ]0, 1[= [0, 1]$. De plus $[0, 1]$ fermé, et contient $A$ donc comme $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant $A$, on a $\overline{A} \subset [0, 1]$. En bilan, $\overline{A} = [0, 1]$.

Montrons que $\overline{A^c} = \mathbb{R}$ donc $Int(A) = \emptyset$. Il suffit de voir $A \subset \overline{A^c}$. IL suffit d'utiliser que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc aussi $A^c$ qui le contient.
Remontrons le. Pour $x \in A$, on a $x + \frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$ (car $\sqrt{2}$ est irrationnel, on peut aussi le remplacer par n'importe quel irrationnel, par exemple $\pi$). On a $x + \frac{\sqrt{2}}{n} \to x$ donc par caractérisation séquentielle de l'adhérence, on déduit $x \in \overline{A^c}$.

2. Donner un exemple de partie $A$ de $\mathbb{R}$ tel que les 7 ensembles :

$$A, \overline{A}, \mathrm{Int}(A), \mathrm{Int}(\overline{A}), \overline{\mathrm{Int}(A)}, \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(A)}), \overline{\mathrm{Int}(\overline{A})}$$

soient tous distincts

*Correction* : On prend $A = ]-1, 0[\cup]0, 1[\cup(\mathbb{Q}\cap]3, 4[) \cup \{2\}$. On l'a construit en prenant 3 zone, une zone dense d'intérieur vide grâce à l'intersection avec, une valeur isolé du complémentaire $\{0\}$ qui va aussi être ajouté de l'adhérence, une valeur isolé $\{2\}$ qui va disparaître de l'intérieur tout en restant identique dans l'adhérence. ON va voir que ses 3 comportements différents suffisent à avoir les 7 ensembles distincts.
Montrons $\overline{A} = [-1, 1] \cup [3, 4] \cup \{2\} = A \cup \{-1, 0, 1\} \cup [3, 4]$. C'est clairement un fermé (union finie de boules fermées) qui contient $A$ (d'où $\subset$). De plus, $A$ contient $-1 + 1/n\ to - 1 \in \overline{A}$, $1/n \to 0 \in \overline{A}$ et $1 - 1/n \to 1 \in \overline{A}$, $3 + 1/n \to 3 \in \overline{A}$,$4 - 1/n \to 4 \in \overline{A}$. De même soit $\lambda \in ]3, 4[$, on a $\lambda_n \in \mathbb{Q}$ tendant vers $\lambda$ (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) d'où comme $]3, 4[$ ouvert, $\lambda_n \in ]3, 4[\cap\mathbb{Q} \subset A$ pour $n$ assez grand.
Montrons $Int(A) = ]-1, 0[\cup]0, 1[$. c'est un ouvert (union de boules ouvertes) contenue dans $A$ donc il suffit de voir $Int(A) \subset ]-1, 0[\cup]0, 1[ \iff \overline{A^c} \supset ]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty[ = A^c \cup \{2\} \cup (\mathbb{Q}\cap]3, 4[)$ Or $A^c$ contient $2 + 1/n \to 2 \in \overline{A^c}$ et si $p \in ]3q, 4q[$ $p, q \in \mathbb{N}$ $p/q + \sqrt{2}/n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\cap]3, \infty[ \subset A^c$ et donc $p/q + \sqrt{2}/n \to p/q \in \overline{A^c}$.
On a de même, $\overline{Int(A)} = [-1, 1]$, $Int(\overline{A}) = ]-1, 1[\cup]3, 4[$, $Int(\overline{Int(A)}) = ]-1, 1[$, $\overline{Int(\overline{A})} = [-1, 1] \cup [3, 4]$.
Tous les ensembles voulus sont différents. (pour expliquer, on a utiliser les $\mathbb{Q}$ pour que tous les ensembles commençant par un intérieur ne contienne par $]3, 4[$ et ceux commençant par un adhérence le contienne. On a utiliser $\{2\}$ (resp $\{0\}$) dans $A$ (resp. $A^c$) pour différencier $\overline{A}$ et quelqu'un passé par un intérieur $\overline{Int(\overline{A})}$ (resp $Int(A)$ et quelqu'un passé par une adhérence $Int(\overline{Int(A)}) = ]-1, 1[$)

3. Que dire du rapport de $\mathrm{Int}(\overline{A})$, et $\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})})$ ? De même, que dire du rapport de $\overline{\mathrm{Int}(A)}$ et $\overline{\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(A)})}$ ?

*Correction* : Montrons que $\mathrm{Int}(\overline{A}) = \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})})$. (l'autre égalité $\overline{\mathrm{Int}(A)} = \overline{\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(A)})}$ se montre en prenant $A = B^c$ et en appliquant la première à $B$)
Par les résultats généraux $\mathrm{Int}(\overline{A}) \subset \overline{\mathrm{Int}(\overline{A})}$ donc c'est un ouvert contenu dans $\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})}$ donc $\mathrm{Int}(\overline{A}) \subset \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})})$.
Il s'agit de vérifier l'inclusion réciproque. Or $\mathrm{Int}(\overline{A}) \subset \overline{A}$ donc en prenant l'adhérence $(\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Enfin en prenant l'intérieur : $\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})}) \subset \mathrm{Int}(\overline{A})$.

**Exercice 12**

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, $A$ et $B$ deux parties non vides de $E$. On suppose que $A$ est ouvert. Montrons que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ et que cette inclusion peut ne pas être vrai si $A$ n'est pas ouvert.

*Correction* : Soit $x \in A \cap \overline{B}$, par caractérisation séquentielle $x_n \in B$ avec $x_n \to x$. Or $A$ ouvert, donc $B(x, \epsilon) \subset A$ pour un certain $\epsilon > 0$. et pour $n$ assez grand, $x_n \in B(x, \epsilon)$ donc $x \in A \cap B$. Encore par caractérisation séquentielle, on en déduit que $x \in \overline{A \cap B}$.

Par exemple, $A = \{1\}, B = ]0, 1[, \overline{B} = [0, 1]$ donc $A \cap \overline{B} = \{1\}$ mais $A \cap B = \emptyset = \overline{A \cap B}$

**Exercice 13**

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, $A$ et $B$ deux parties denses dans $E$. On suppose que $A$ est ouvert. Montrons que $A \cap B$ est dense dans $E$.

*Correction* : On a $\overline{B} = E$. On utilise l'exo précédent : $A = A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

donc en passant à l'adhérence : $E = \overline{A} \subset \overline{A \cap B} \subset E$ d'où égalité.

**Exercice 14**

Montrons que dans un espace vectoriel normé, un sous espace vectoriel propre n'est jamais ouvert.

*Correction* : Un sev $F \subset E$ contient 0, si $F$ est ouvert, alors $B(x, r) \subset F$ pour $r > 0$. mais pour tout $x \neq 0$ $y = \frac{xr}{2||x||} \in B(x, r) \subset F$ donc par stabilité des e.v. par multiplication par un scalaire, on a :

$x = \frac{2||x||y}{x} \in F$ donc $E = F$. Par contraposée, si $F \neq E$, alors $F$ n'est pas ouvert.

## Continuité uniforme

**Exercice 15** (cf. TD)

**Exercice 16** (cf. TD)

**Exercice 17** (cf. TD)

**Exercice 18** (cf. TD)

**Exercice 19** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $X$ une partie de $E$ et $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que la somme $f + g$ et le produit $fg$ sont également des fonctions continues.

Correction de 2021-2022 exercice 21

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_correctionpartiellemas.pdf`

Cela montre que somme et produit sont continues, et en composant avec $(f, g)$ on obtient la continuité de la somme $f + g$ et du produit $fg$.

**Exercice 20** Montrer que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Correction de 2021-2022 exercice 23

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_correctionpartiellemas.pdf`

**Exercice 21** Montrer qu'une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Correction de 2021-2022 exercice 25

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_correctionpartiellemas.pdf`

**Exercice 22** Soit $(X,d)$ un espace métrique. On désigne par $E$ l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions $f\colon X \to \mathbb{R}$ qui sont *bornées*, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$.

Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\colon x \in X\} \ .$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $E$.
2. Montrer que pour toute suite $(f_n)$ d'éléments de $E$ et $f \in E$, on a l'équivalence

$$((f_n) \text{ converge uniformément vers } f) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0 \ .$$

3. Montrer que les fonctions continues appartenant à $E$ forment un fermé de $E$. Que dire des fonctions uniformément continues appartenant à $E$ ?

Correction de 2021-2022 exercice 26

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_correctionpartiellemas.pdf`

**Exercice 23** Soit $(X,d)$ un espace métrique. Soit $A$ une partie non-vide et $d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$.

1. Montrer que $d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
   *Solution* : Si $d(x,A) = 0$, par définition de l'inf, il existe $a_n \in A$ $d(x,a_n) \leq 1/n$, c'est à dire $a_n \to x$, donc $x \in \overline{A}$.
   Réciproquement on a vu en cours que si $x \in \overline{A}$ il existe une suite vérifiant la même propriété, et ceci montre $d(x,A) = 0$.
2. Montrer que $x \mapsto d(x,A)$ est 1-lipshitzienne. (cf TD 2 ex 5.2)
3. Est-elle uniformément continue ? (Oui par 2 et le cours)

**Exercice 24** Soit $E$ l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$. On considère l'application $\mu : E \to E$ définie par

$$\mu(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ pour } f \in E \text{ et } x \in [0,1].$$

1. Montrer que $\mu$ est bien définie et que $\mu$ est une application linéaire continue.
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$f_n(t) = n(1-t)^{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } t \in [0,1].$$

   Pour chaque $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\mu(f_n)\|_1$.
3. En déduire la norme de $\mu$.

## Exercices supplémentaires.

**Exercice 25**

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) muni de la norme $||.||_2$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts, lesquels sont fermés ? Calculer les intérieurs, adhérences, frontières.

1. $D = \mathbb{Q}^2 \cap ([0,1]\times]1,2[)$,

2. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy < 1\}$,
3. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1, x \neq 0\}$,
4. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 1/n, y = 1/m, n > 0, m > 0\}$,
5. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y+z \geq 0\}$,
6. $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x > 0, y \geq 0, z \in ]1,2[ \cup \{-1/n, \ n \in \mathbb{N}\}\}$,
7. $J = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Q} \ : \ x > 0, y \geq 0\}$,

*Correction :*

1. $D = \mathbb{Q}^2 \cap ([0,1] \times ]1,2[)$ n'est ni ouvert ni fermé. Mq $\overline{D} = D_2 := [0,1] \times [1,2]$.
   D'abord $D_2 = \overline{B_{||\cdot||_\infty}((1/2,3/2),1/2)}$ est une boule fermée donc un fermé contenant $D$ donc $\overline{D} \subset D_2$.
   Soit $D_1 = \mathbb{Q}^2 \cap (]0,1[ \times ]1,2[)$ est l'intersection d'un ensemble dense et de l'ouvert $]0,1[ \times ]1,2[= B_{||\cdot||_\infty}((1/2,3/2),1/2)$. Par l'exercice 12, on a $]0,1[ \times ]1,2[= \overline{\mathbb{Q}^2 \cap (]0,1[ \times ]1,2[)} \subset \overline{D_1}$.
   Il reste donc à voir que la frontière $\{0,1\} \times [1,2] \cup [0,1] \times \{1,2\} \subset \overline{D}$ comme à l'exo 10.3 $D \ni (x, 1+\frac{1}{n}) \to (x,1), D \ni (x, 2-\frac{1}{n}) \to (x,2)$ pour $x \in [0,1]$ donc par caractérisation séquentielle $[0,1] \times \{1,2\} \subset \overline{D}$.
   $D \ni (1-\frac{1}{n}, y) \to (1,y), D \ni (\frac{1}{n}, y) \to (0,y)$ pour $y \in ]1,2]$ donc par caractérisation séquentielle $\{0,1\} \times ]1,2[ \subset \overline{D}$. On a donc
   $$\{0,1\} \times [1,2] \cup [0,1] \times \{1,2\} = \{0,1\} \times ]1,2[ \cup [0,1] \times \{1,2\} \subset \overline{D}.$$
   En bilan, on a bien $D_2 \subset \overline{D}$ et donc $D_2 = \overline{D}$.
   $Int(D) = \emptyset$ car $D^c$ est dense dans $\mathbb{R}^2$ car il contient $(\sqrt{2} + \mathbb{Q})^2$ qui est dense. La frontière est $\overline{D} - Int(D) = [0,1] \times [1,2]$.
2. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy < 1\} = f^{-1}(]-\infty,1[)$ est ouvert car $f : (x,y) \to xy$ est continue comme polynôme et car $]-\infty,1[$ est ouvert. De même, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \leq 1\} = f^{-1}(]-\infty,1])$ est un fermé qui contient $E$, donc aussi le plus petit fermé $\overline{E}$ qui contient $E$ : $\overline{E} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \leq 1\}$
   Réciproquement $w_n = (x, (1-1/n)1/x) \in E$ et $w_n \to (x, 1/x)$ $(x \neq 0)$ donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \leq 1\} = E \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = 1\} \subset \overline{E}$ d'où égalité. $Fr(E)$ est donc l'hyperbole d'équation $xy = 1$.
3. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1, x \neq 0\}$ (la boule unité pour la norme 2 privée de l'axe des ordonnés) n'est pas fermé car soit $x \in [-1,1]$ $u_n = (1/n, x(1-1/n)) \in F$ (car $(1/n)^2 + (x-x/n)^2 \leq (1-1/n)^2 + (1/n)^2 = 1 + 2/n^2 - 2/n \leq 1$ vu $n^2 \geq n$ pour $n$ entier) et $u_n \to (0,x) \notin F$. On n'a donc de plus $\{0\} \times [-1,1] \subset \overline{F}$. Or $F \cup \{0\} \times [-1,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1\} = B_{F,2}(0,1)$ est un fermé contenant $F$ donc contenant $\overline{F}$. C'est donc $\overline{F} = B_{F,2}(0,1)$ vu l'autre inclusion juste montrée.
   Par ailleurs $F$ n'est pas ouvert car pour tout $x,y$ tel que $x \neq 0$ et $x^2+y^2 = 1$, $u_n = (x(1+/n), y(1+/n)) \notin F$ (car $(x(1+/n))^2 + (y(1+/n))^2 = (1+/n)^2 > 1$) mais $u_n \to (x,y) \in F$. Ainsi $(x,y) \in \overline{F^c} \cap F$ donc $F^c$ n'est pas fermé et $F$ n'est pas ouvert. De plus $F - \{(x,y) \ : \ x^2+y^2 = 1, x \neq 0\} = B_2(0,1) \cap \{(x,y), x \neq 0\}$ est l'intersection de deux ouverts donc est ouvert et est contenu dans $F$ donc est contenu dans l'intérieur de $F$. Or On vient de voir que $\{(x,y) \ : \ x^2+y^2 = 1, x \neq 0\}$ n'est pas dans l'intérieur de $F$ d'où $Int(F) = F - \{(x,y) : x^2+y^2 = 1, x \neq 0\}$.
   Enfin, On peut déduire $Fr(F) = \overline{F} - Int(F) = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y) : x = 0\}$.

4. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 1/n, y = 1/m, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$, $Int(G) = \emptyset$ car $G^c \supset (\mathbb{Q}^2)^c \ni (1/n + \sqrt{2}/p, 1/m) \to_{p\to\infty} (1/n, 1/m)$ donc $G^c$ est dense dans $\mathbb{R}^2$.
   Montrons que $\overline{G} = (\{0\} \cup \{(1/n) n \in \mathbb{N}\})^2$ En effet, $T := \{0\} \cup \{(1/n) n \in \mathbb{N}\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ (même compact par le TD 2 exo 5) car son complémentaire est $]-\infty, 0[\cup]1, \infty[\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]1/(n+1), 1/n[$ est ouvert comme union d'ouverts. Donc $T^2$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$ [1]
   On a donc $T^2$ est un fermé contenant $G$ on a donc montré $\overline{G} \subset T^2$. Pour l'inclusion inverse, il suffit de remarquer, par caractérisation séquentielle de l'adhérence, que les suites suivantes de $G$ converge vers les éléments de $T^2$ non dans $G$ : $(1/n, 1/m) \to_{n\to\infty} (0, 1/m), m \in \mathbb{N}, (1/n, 1/m) \to_{m\to\infty} (1/n, 0), n \in \mathbb{N}, (1/n, 1/n) \to (0, 0)$.
5. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y+z \geq 0\}$ est fermé car $f(x,y,z) = x+y+z$ est continue car linéaire et $H = f^{-1}([0, +\infty[)$. On montre comme pour $B$, $Int(H) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y+z > 0\}$.
6. $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x > 0, y \geq 0, z \in ]1,2[ \cup \{-1/n, \ n \in \mathbb{N}\}\}$, n'est pas fermé car pour $y_0 \geq 0, z_0 \in [1,2] \cup \{-1/n, \ n \in \mathbb{N}\}\}$ $u_m = (1/m, y_0, 1_{R_+}(z)(z_0 - 3/2)(1 - 1/m) + 3/2 + 1_{R_-}(z_0)z_0) \in I$ et $u_m \to (0, y_0, z_0) \notin I$. On obtient de plus par caractérisation séquentielle que $\{0\} \times \mathbb{R}_+ \times [1,2] \cup \{-1/n, \ n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{I}$.
   De même, pour $x_0 \geq 0, y_0 \geq 0$ $(x_0+1/n, y_0, 1+1/n), (x_0+1/n, y_0, 2-1/n), (x_0+1/n, y_0, -1/n)$ sont dans $I$ et tendent respectivement vers $(x_0, y_0, 1), (x_0, y_0, 2), (x_0, y_0, 0)$ qui ne sont pas dans $I$. En bilan on a donc obtenu $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0, y \geq 0, z \in [1,2] \cup \{0\} \cup \{-1/n, \ n \in \mathbb{N}\}\} \subset \overline{I}$. En fait on a égalité, car $Z = p_x^{-1}([0, \infty[) \cap p_y^{-1}([0, \infty[) \cap p_z^{-1}([1,2] \cup \{0\} \cup \{-1/n, \ n \in \mathbb{N}\})$ est fermé comme intersection de trois fermé,, chacun fermé comme image inverse par des applications continues (les projections $p_x, p_y, p_z$ de fermés $(([1,2] \cup \{0\} \cup \{-1/n, \ n \in \mathbb{N}\})^c = ]2, +\infty[\cup]0, 1[\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}] - 1/n, -1/(n+1)[\cup] - \infty, -1[$ est ouvert comme union d'ouverts).
7. $J = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Q} \ : \ x > 0, y \geq 0\}$ n'est ni ouvert ni fermé. Son adhérence est $\overline{J} = \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$ (qui est un fermé contenant $J$ tel que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$ on trouve une suite de rationnel $z_n \to z$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et on obtient $(x + 1/n, y, z_n) \in J$ qui tend vers $(x,y,z)$)
   $Int(J) = \emptyset$ car pour $(x,y,z) \in J$, $(x, y, z + \sqrt{2}/n) \notin J$ (car $\sqrt{2}$ non rationnel) et tend vers $(x,y,z)$ donc $J^c$ est dense dans $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 26** Soit $E$ un espace vectoriel et soient $||.||_1$ et $||.||_2$ deux normes sur $E$. On note $B_i(a,r)$ (resp. $B_{Fi}(a,r)$) la boule ouverte (resp. fermée) pour la norme $||.||_i$.

1. Montrer que : $B_{F1}(0,1) = B_{F2}(0,1) \iff (\forall x \in E, \ ||x||_1 = ||x||_2)$
   $\Leftarrow$ est évidente, mêmes normes implique mêmes boules.
   $\Rightarrow$ Si $x = 0$ l'égalité est évidente puisque le vecteur nul a toujours norme 0. Si $x \neq 0$, par séparation $||x||_1 \neq 0$ et $\frac{x}{||x||_1} \in B_{F1}(0,1) = B_{F2}(0,1)$, donc
   $$\left\|\frac{x}{||x||_1}\right\|_2 = \frac{||x||_2}{||x||_1} \leq 1$$
   donc $||x||_2 \leq ||x||_1$ et par symétrie $||x||_1 \leq ||x||_2$ d'où égalité.
2. Montrer que : $B_1(0,1) = B_2(0,1) \iff (\forall x \in E, \ ||x||_1 = ||x||_2)$
   $\Leftarrow$ est évidente, mêmes normes implique mêmes boules.
   $\Rightarrow$ en passant à l'adhérence par l'exercice 28, on obtient l'hypothèse du 1.

1. En effet, on rappelle la preuve du cours : soit $(u_n, v_n) \in T^2$ quelconque tendant vers $(u,v)$, vu $T$ fermé, on a donc $u_n \to u \in T$, $v_n \to v \in T$, donc $(u,v) \in T^2$ c'est à dire $T^2$ fermé par caractérisation séquentielle.

**Exercice 27**

Soit $X := \{(-1)^n + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^*\}$. L'ensemble $X$ est-il un ouvert de $\mathbb{R}$ ? Déterminer $\overline{X}$.

**Exercice 28**

Correction de 2021-2022 exercice 13

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_correctionpartiellemas.pdf`