

Feuille d'exercices numéro 2

Correction partielle

Exercice 1 **Norme produit** (cf. TD)

Exercice 2 (cf. TD)

Exercice 3 (cf. TD)

Exercice 4 (cf. TD)

Exercice 5 (★) Correction de 2021–2022 exercice 8

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/
lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:
topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_
correctionpartiellemas.pdf`

Exercice 6

(cf TD.)

Ouverts, fermés.

Exercice 7 (cf TD.)

Exercice 8

1. Donnons un exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.

Correction : Les ouverts $] -1/n, 1/n[= B(0, 1/n)$ ont pour intersection $\bigcap_{n \geq 1}] -1/n, 1/n[= \{0\}$ qui est un fermé non vide du connexe $\mathbf{R} \neq \{0\}$ donc n'est pas ouvert.

2. Donnons un exemple d'une union de fermés qui n'est pas un fermé.

Correction :

$]0, 1[= \bigcup_{x \in]0, 1[} \{x\}$ est une union de singleton (boules fermés de rayons 0) donc de fermés, mais $]0, 1[$ est un ouvert non-vide du connexe $\mathbf{R} \neq]0, 1[$ donc $]0, 1[$ n'est pas fermé.

Exercice 9 (*)

Correction de 2021–2022 exercice 12

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_correctionpartiellemas.pdf

Exercice 10 (cf TD.)

Exercice 11

1. Calculer l'adhérence et l'intérieure de $A = \mathbf{Q} \cap [0, 1]$.

Correction : Montrons que $\overline{A} = [0, 1]$. En effet, pour $x \in]0, 1[$ on prend $x_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Or la partie entière vérifie $nx \leq \lfloor nx \rfloor < nx + 1$, donc $x \leq x_n < x + 1/n$ donc par le théorème des gendarmes $x_n \rightarrow x$. Or $x_n \in \mathbf{Q}$ pour tout n et pour n assez grand, $x_n \in]0, 1[$, donc $x_n \in A$. Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, on déduit $x \in \overline{A}$. Donc $\overline{A} \supset A \cup]0, 1[= [0, 1]$. De plus $[0, 1]$ fermé, et contient A donc comme $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A , on a $\overline{A} \subset [0, 1]$. En bilan, $\overline{A} = [0, 1]$.

Montrons que $\overline{A^c} = \mathbf{R}$ donc $\text{Int}(A) = \emptyset$. Il suffit de voir $A \subset \overline{A^c}$. IL suffit d'utiliser que $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$ donc aussi A^c qui le contient.

Remontrons le. Pour $x \in A$, on a $x + \frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbf{Q}$ (car $\sqrt{2}$ est irrationnel, on peut aussi le remplacer par n'importe quel irrationnel, par exemple π). On a $x + \frac{\sqrt{2}}{n} \rightarrow x$ donc par caractérisation séquentielle de l'adhérence, on déduit $x \in \overline{A^c}$.

2. Donner un exemple de partie A de $\mathbf{R}$ tel que les 7 ensembles :

$$A, \overline{A}, \text{Int}(A), \text{Int}(\overline{A}), \overline{\text{Int}(A)}, \text{Int}(\overline{\text{Int}(A)}), \overline{\text{Int}(\overline{A})}$$

soient tous distincts

Correction : On prend

$A =]-1, 0[\cup]0, 1[\cup (\mathbf{Q} \cap]3, 4[) \cup \{2\}$. On l'a construit en

prenant 3 zones, une zone dense d'intérieur vide grâce à l'intersection avec $\mathbf{Q}$, une valeur isolée du complémentaire $\{0\}$ qui va aussi être ajouté de l'adhérence, une valeur isolé $\{2\}$ qui va disparaître de l'intérieur tout en restant identique dans l'adhérence. ON va voir que ses 3 comportements différents suffisent à avoir les 7 ensembles distincts.

Montrons

$\bar{A} = [-1, 1] \cup [3, 4] \cup \{2\} = A \cup \{-1, 0, 1\} \cup [3, 4]$. C'est clairement un fermé (union finie de boules fermées) qui contient A (d'où $\subset$). De plus, A contient $-1 + 1/n \rightarrow -1 \in \bar{A}$, $1/n \rightarrow 0 \in \bar{A}$ et $1 - 1/n \rightarrow 1 \in \bar{A}$, $3 + 1/n \rightarrow 3 \in \bar{A}$, $4 - 1/n \rightarrow 4 \in \bar{A}$. De même soit $\lambda \in]3, 4[$, on a $\lambda_n \in \mathbf{Q}$ tendant vers λ (par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$) d'où comme $]3, 4[$ ouvert, $\lambda_n \in]3, 4[\cap \mathbf{Q} \subset A$ pour n assez grand.

Montrons $\text{Int}(A) =]-1, 0[\cup]0, 1[$. c'est un ouvert (union de boules ouvertes) contenue dans A donc il suffit de voir $\text{Int}(A) \subset]-1, 0[\cup]0, 1[\iff \bar{A}^c \supset]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty[= A^c \cup \{2\} \cup (\mathbf{Q} \cap]3, 4[)$ Or A^c contient $2 + 1/n \rightarrow 2 \in \bar{A}^c$ et si $p \in]3q, 4q[$ $p, q \in \mathbf{N}$ $p/q + \sqrt{2}/n \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \cap]3, \infty[\subset A^c$ et donc $p/q + \sqrt{2}/n \rightarrow p/q \in \bar{A}^c$.

On a de même, $\overline{\text{Int}(A)} = [-1, 1]$,
 $\text{Int}(\bar{A}) =]-1, 1[\cup]3, 4[$, $\text{Int}(\overline{\text{Int}(A)}) =]-1, 1[$,
 $\overline{\text{Int}(\bar{A})} = [-1, 1] \cup [3, 4]$.

Tous les ensembles voulus sont différents. (pour expliquer, on a utilisé les $\mathbb{Q}$ pour que tous les ensembles commençant par un intérieur ne contiennent pas $]3, 4[$ et ceux commençant par un adhérence le contiennent. On a utilisé $\{2\}$ (resp $\{0\}$) dans A (resp. A^c) pour différencier $\overline{A}$ et quelqu'un passé par un intérieur $\overline{\text{Int}(\overline{A})}$ (resp $\text{Int}(A)$ et quelqu'un passé par une adhérence $\text{Int}(\overline{\text{Int}(A)}) =]-1, 1[$)

3. Que dire du rapport de $\text{Int}(\overline{A})$, et $\overline{\text{Int}(\overline{A})}$? De même, que dire du rapport de $\overline{\text{Int}(A)}$ et $\overline{\text{Int}(\overline{\text{Int}(A)})}$?

Correction : Montrons que $\text{Int}(\overline{A}) = \overline{\text{Int}(\overline{A})}$.

(l'autre égalité $\overline{\text{Int}(A)} = \overline{\text{Int}(\overline{\text{Int}(A)})}$ se montre en prenant $A = B^c$ et en appliquant la première à B)

Par les résultats généraux $\text{Int}(\overline{A}) \subset \overline{\text{Int}(\overline{A})}$ donc c'est un ouvert contenu dans $\overline{\text{Int}(\overline{A})}$ donc

$$\text{Int}(\overline{A}) \subset \overline{\text{Int}(\overline{A})}.$$

Il s'agit de vérifier l'inclusion réciproque. Or

$\text{Int}(\overline{A}) \subset \overline{A}$ donc en prenant l'adhérence

$\overline{\text{Int}(\overline{A})} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Enfin en prenant l'intérieur :

$$\text{Int}(\overline{\text{Int}(\overline{A})}) \subset \text{Int}(\overline{A}).$$

Exercice 12

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties non vides de E . On suppose que A est ouvert. Montrons que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ et que cette inclusion

peut ne pas être vrai si A n'est pas ouvert.

Correction : Soit $x \in A \cap \overline{B}$, par caractérisation séquentielle $x_n \in B$ avec $x_n \rightarrow x$. Or A ouvert, donc $B(x, \epsilon) \subset A$ pour un certain $\epsilon > 0$. et pour n assez grand, $x_n \in B(x, \epsilon)$ donc $x \in A \cap B$. Encore par caractérisation séquentielle, on en déduit que $x \in \overline{A \cap B}$.

Par exemple, $A = \{1\}$, $B =]0, 1[$, $\overline{B} = [0, 1]$ donc $A \cap \overline{B} = \{1\}$ mais $A \cap B = \emptyset = \overline{A \cap B}$

Exercice 13

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties denses dans E . On suppose que A est ouvert. Montrons que $A \cap B$ est dense dans E .

Correction : On a $\overline{B} = E$. On utilise l'exo précédent :
 $A = A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

donc en passant à l'adhérence : $E = \overline{A} \subset \overline{A \cap B} \subset E$
d'où égalité.

Exercice 14

Montrons que dans un espace vectoriel normé, un sous espace vectoriel propre n'est jamais ouvert.

Correction : Un sev $F \subset E$ contient 0 , si F est ouvert,

alors $B(x, r) \subset F$ pour $r > 0$. mais pour tout $x \neq 0$
 $y = \frac{xr}{2\|x\|} \in B(x, r) \subset F$ donc par stabilité des e.v. par
multiplication par un scalaire, on a :

$x = \frac{2\|x\|y}{x} \in F$ donc $E = F$. Par contraposée, si $F \neq E$,
alors F n'est pas ouvert.

Continuité uniforme

Exercice 15 (cf. TD)

Exercice 16 (cf. TD)

Exercice 17 (cf. TD)

Exercice 18 (cf. TD)

Exercice 19 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, X
une partie de E et $f, g: X \rightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues.
Montrer que la somme $f + g$ et le produit fg sont
également des fonctions continues.

Correction de 2021–2022 exercice 21

[https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/
lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:
topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_
correctionpartiellemas.pdf](https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_correctionpartiellemas.pdf)

Cela montre que somme et produit sont continues, et en composant avec (f, g) on obtient la continuité de la somme $f + g$ et du produit fg .

Exercice 20 Montrer que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Correction de 2021–2022 exercice 23

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_13:topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_correctionpartiellemas.pdf

Exercice 21 Montrer qu'une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Correction de 2021–2022 exercice 25

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_13:topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_correctionpartiellemas.pdf

Exercice 22 Soit (X, d) un espace métrique. On désigne par E l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ qui sont **bornées**, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$.

Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_{\infty}$ est une norme sur E .
2. Montrer que pour toute suite (f_n) d'éléments de E et $f \in E$, on a l'équivalence

$$((f_n) \text{ converge uniformément vers } f) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0.$$

3. Montrer que les fonctions continues appartenant à E forment un fermé de E . Que dire des fonctions uniformément continues appartenant à E ?

Correction de 2021–2022 exercice 26

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_correctionpartiellemas.pdf

Exercice 23 Soit (X, d) un espace métrique. Soit A une partie non-vide et $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

1. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

Solution : Si $d(x, A) = 0$, par définition de l'inf, il existe $a_n \in A$ $d(x, a_n) \leq 1/n$, c'est à dire $a_n \rightarrow x$, donc $x \in \overline{A}$.

Réciproquement on a vu en cours que si $x \in \overline{A}$ il existe une suite vérifiant la même propriété, et ceci montre $d(x, A) = 0$.

2. Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipshitzienne. (cf TD 2 ex 5.2)
3. Est-elle uniformément continue ? (Oui par 2 et le cours)

Exercice 24 Soit E l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_1)$. On considère l'application $\mu : E \rightarrow E$ définie par

$$\mu(f)(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ pour } f \in E \text{ et } x \in [0, 1].$$

1. Montrer que μ est bien définie et que μ est une application linéaire continue.
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$f_n(t) = n(1 - t)^{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } t \in [0, 1].$$

Pour chaque $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\mu(f_n)\|_1$.

3. En déduire la norme de μ .

Exercices supplémentaires.

Exercice 25

On considère le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ (ou $\mathbf{R}^3$) muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts, lesquels sont fermés ? Calculer les intérieurs, adhérences, frontières.

1. $D = \mathbf{Q}^2 \cap ([0, 1] \times]1, 2[),$
2. $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy < 1\},$
3. $F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq 0\},$
4. $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 1/n, y = 1/m, n > 0, m > 0\},$
5. $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z \geq 0\},$
6. $I = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y \geq 0, z \in]1, 2[\cup \{-1/n, n \in \mathbf{N}\}\},$
7. $J = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{Q} : x > 0, y \geq 0\},$

Correction :

1. $D = \mathbf{Q}^2 \cap ([0, 1] \times]1, 2[)$ n'est ni ouvert ni fermé. Mq $\overline{D} = D_2 := [0, 1] \times [1, 2].$

D'abord $D_2 = \overline{B_{\|\cdot\|_\infty}((1/2, 3/2), 1/2)}$ est une boule fermée donc un fermé contenant D donc $\overline{D} \subset D_2.$

Soit $D_1 = \mathbf{Q}^2 \cap (]0, 1[\times]1, 2[)$ est l'intersection d'un ensemble dense et de l'ouvert

$]0, 1[\times]1, 2[= B_{\|\cdot\|_\infty}((1/2, 3/2), 1/2).$ Par l'exercice 12, on a $]0, 1[\times]1, 2[= \overline{\mathbf{Q}^2 \cap (]0, 1[\times]1, 2[)} \subset \overline{D_1}.$

Il reste donc à voir que la frontière

$\{0, 1\} \times [1, 2] \cup [0, 1] \times \{1, 2\} \subset \overline{D}$ comme à l'exo 10.3

$D \ni (x, 1 + \frac{1}{n}) \rightarrow (x, 1), D \ni (x, 2 - \frac{1}{n}) \rightarrow (x, 2)$ pour

$x \in [0, 1]$ donc par caractérisation séquentielle

$[0, 1] \times \{1, 2\} \subset \overline{D}.$

$D \ni (1 - \frac{1}{n}, y) \rightarrow (1, y), D \ni (\frac{1}{n}, y) \rightarrow (0, y)$ pour $y \in]1, 2]$ donc par caractérisation séquentielle $\{0, 1\} \times]1, 2[\subset \overline{D}$. On a donc

$$\{0, 1\} \times [1, 2] \cup [0, 1] \times \{1, 2\} = \{0, 1\} \times]1, 2[\cup [0, 1] \times \{1, 2\} \subset \overline{D}$$

En bilan, on a bien $D_2 \subset \overline{D}$ et donc $D_2 = \overline{D}$.

$\text{Int}(D) = \emptyset$ car D^c est dense dans $\mathbf{R}^2$ car il contient $(\sqrt{2} + \mathbf{Q})^2$ qui est dense. La frontière est $\overline{D} - \text{Int}(D) = [0, 1] \times [1, 2]$.

2. $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy < 1\} = f^{-1}(]-\infty, 1[)$ est ouvert car $f : (x, y) \rightarrow xy$ est continue comme polynôme et car $] - \infty, 1[$ est ouvert. De même,

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy \leq 1\} = f^{-1}(]-\infty, 1])$ est un fermé qui contient E , donc aussi le plus petit fermé $\overline{E}$ qui contient $E : \overline{E} \subset \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy \leq 1\}$

Réciproquement $w_n = (x, (1 - 1/n)1/x) \in E$ et $w_n \rightarrow (x, 1/x)$ ($x \neq 0$) donc

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy \leq 1\} = E \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy = 1\} \subset \overline{E}$ d'où égalité. $\text{Fr}(E)$ est donc l'hyperbole d'équation $xy = 1$.

3. $F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq 0\}$ (la boule unité pour la norme 2 privée de l'axe des ordonnées) n'est pas fermé car soit $x \in [-1, 1]$

$u_n = (1/n, x(1 - 1/n)) \in F$ (car $(1/n)^2 + (x - x/n)^2 \leq (1 - 1/n)^2 + (1/n)^2 = 1 + 2/n^2 - 2/n \leq 1$ vu $n^2 \geq n$ pour n entier) et $u_n \rightarrow (0, x) \notin F$. On n'a donc de plus

$\{0\} \times [-1, 1] \subset \overline{F}$. Or

$F \cup \{0\} \times [-1, 1] = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} = B_{F,2}(0, 1)$ est un fermé contenant F donc contenant $\overline{F}$. C'est donc $\overline{F} = B_{F,2}(0, 1)$ vu l'autre inclusion juste montrée.

Par ailleurs F n'est pas ouvert car pour tout x, y tel que $x \neq 0$ et $x^2 + y^2 = 1$, $u_n = (x(1 + 1/n), y(1 + 1/n)) \notin F$ (car $(x(1 + 1/n))^2 + (y(1 + 1/n))^2 = (1 + 1/n)^2 > 1$) mais $u_n \rightarrow (x, y) \in F$. Ainsi $(x, y) \in \overline{F^c} \cap F$ donc F^c n'est pas fermé et F n'est pas ouvert. De plus

$F - \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\} = B_2(0, 1) \cap \{(x, y), x \neq 0\}$ est l'intersection de deux ouverts donc est ouvert et est contenu dans F donc est contenu dans l'intérieur de F . Or On vient de voir que

$\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\}$ n'est pas dans l'intérieur de F d'où $Int(F) = F - \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\}$.

Enfin, On peut déduire $Fr(F) = \overline{F} - Int(F) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) : x = 0\}$.

4. $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 1/n, y = 1/m, n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}\}$,
 $Int(G) = \emptyset$ car

$G^c \supset (\mathbf{Q}^2)^c \ni (1/n + \sqrt{2}/p, 1/m) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} (1/n, 1/m)$ donc G^c est dense dans $\mathbf{R}^2$.

Montrons que $\overline{G} = (\{0\} \cup \{(1/n) n \in \mathbf{N}\})^2$ En effet,
 $T := \{0\} \cup \{(1/n) n \in \mathbf{N}\}$ est fermé dans $\mathbf{R}$ (même compact par le TD 2 exo 5) car son complémentaire est $] - \infty, 0[\cup]1, \infty[\cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*}]1/(n+1), 1/n[$ est ouvert

comme union d'ouverts. Donc T^2 est fermé dans $\mathbf{R}^2$ ¹

On a donc T^2 est un fermé contenant G on a donc montré $\overline{G} \subset T^2$. Pour l'inclusion inverse, il suffit de remarquer, par caractérisation séquentielle de l'adhérence, que les suites suivantes de G converge vers les éléments de T^2 non dans G :

$$(1/n, 1/m) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} (0, 1/m), m \in \mathbf{N}, (1/n, 1/m) \rightarrow_{m \rightarrow \infty} (1/n, 0), n \in \mathbf{N}, (1/n, 1/n) \rightarrow (0, 0).$$

5. $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z \geq 0\}$ est fermé car $f(x, y, z) = x + y + z$ est continue car linéaire et $H = f^{-1}([0, +\infty[)$. On montre comme pour B , $\text{Int}(H) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z > 0\}$.

6. $I = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y \geq 0, z \in]1, 2[\cup \{-1/n, n \in \mathbf{N}\}\}$, n'est pas fermé car pour $y_0 \geq 0, z_0 \in [1, 2] \cup \{-1/n, n \in \mathbf{N}\}$ $u_m = (1/m, y_0, 1_{R_+}(z)(z_0 - 3/2)(1 - 1/m) + 3/2 + 1_{R_-}(z_0)z_0) \in I$ et $u_m \rightarrow (0, y_0, z_0) \notin I$. On obtient de plus par caractérisation séquentielle que $\{0\} \times \mathbf{R}_+ \times [1, 2] \cup \{-1/n, n \in \mathbf{N}\} \subset \overline{I}$.

De même, pour $x_0 \geq 0, y_0 \geq 0$ $(x_0 + 1/n, y_0, 1 + 1/n), (x_0 + 1/n, y_0, 2 - 1/n), (x_0 + 1/n, y_0, -1/n)$ sont dans I et tendent respectivement vers

$(x_0, y_0, 1), (x_0, y_0, 2), (x_0, y_0, 0)$ qui ne sont pas dans I . En bilan on a donc obtenu $Z := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 :$

1. En effet, on rappelle la preuve du cours : soit $(u_n, v_n) \in T^2$ quelconque tendant vers (u, v) , vu T fermé, on a donc $u_n \rightarrow u \in T, v_n \rightarrow v \in T$, donc $(u, v) \in T^2$ c'est à dire T^2 fermé par caractérisation séquentielle.

$x \geq 0, y \geq 0, z \in [1, 2] \cup \{0\} \cup \{-1/n, n \in \mathbf{N}\} \subset \bar{I}$. En fait on a égalité, car $Z = p_x^{-1}([0, \infty[) \cap p_y^{-1}([0, \infty[) \cap p_z^{-1}([1, 2] \cup \{0\} \cup \{-1/n, n \in \mathbf{N}\})$ est fermé comme intersection de trois fermés, chacun fermé comme image inverse par des applications continues (les projections p_x, p_y, p_z de fermés $(([1, 2] \cup \{0\} \cup \{-1/n, n \in \mathbf{N}\})^c =]2, +\infty[\cup]0, 1[\cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*}]-1/n, -1/(n+1)[\cup]-\infty, -1[$ est ouvert comme union d'ouverts).

7. $J = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{Q} : x > 0, y \geq 0\}$ n'est ni ouvert ni fermé. Son adhérence est $\bar{J} = \mathbf{R}_+^2 \times \mathbf{R}$ (qui est un fermé contenant J tel que pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}_+^2 \times \mathbf{R}$ on trouve une suite de rationnel $z_n \rightarrow z$ par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$ et on obtient $(x + 1/n, y, z_n) \in J$ qui tend vers (x, y, z))

$\text{Int}(J) = \emptyset$ car pour $(x, y, z) \in J$, $(x, y, z + \sqrt{2}/n) \notin J$ (car $\sqrt{2}$ non rationnel) et tend vers (x, y, z) donc J^c est dense dans $\mathbf{R}^3$.

Exercice 26 Soit E un espace vectoriel et soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E . On note $B_i(a, r)$ (resp. $B_{Fi}(a, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) pour la norme $\|\cdot\|_i$.

1. Montrer que :

$$B_{F1}(0, 1) = B_{F2}(0, 1) \iff (\forall x \in E, \|x\|_1 = \|x\|_2)$$

$\Leftarrow$ est évidente, mêmes normes implique mêmes boules.

$\Rightarrow$ Si $x = 0$ l'égalité est évidente puisque le vecteur nul a toujours norme 0. Si $x \neq 0$, par séparation $\|x\|_1 \neq 0$ et $\frac{x}{\|x\|_1} \in B_{F_1}(0, 1) = B_{F_2}(0, 1)$, donc

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 = \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \leq 1$$

donc $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ et par symétrie $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ d'où égalité.

2. Montrer que :

$$B_1(0, 1) = B_2(0, 1) \iff (\forall x \in E, \|x\|_1 = \|x\|_2)$$

$\Leftarrow$ est évidente, mêmes normes implique mêmes boules.

$\Rightarrow$ en passant à l'adhérence par l'exercice 28, on obtient l'hypothèse du 1.

Exercice 27

Soit $X := \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\}$. L'ensemble X est-il un ouvert de $\mathbf{R}$? Déterminer $\overline{X}$.

Exercice 28

Correction de 2021-2022 exercice 13

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_correctionpartiellemas.pdf