Université Claude Bernard | Mathématiques
L3 Topologie et Théorie de la Mesure | 2025-2026

Feuille d'exercices numéro 3

Complétude

Exercice 1 Soit $(E, ||\cdot||)$ un e.v.n., et $F \subseteq E$ un sous-espace de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E.

Exercice 2

Soit E un espace de Banach. Soit $A = (L(E,E), |||\cdot|||)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues sur E (munie de la norme subordonnée). Soit $f \in A$ vérifiant $|||f||| < 1$.

1. Soit $x \in A$, on pose $F_x(y) = f(y) + x$. Montrer que l'application F_x a un unique point fixe.
2. Vérifier que la norme subordonnée est sous-multiplicative, c'est à dire que pour tout $f, g \in A$:
$$|||f \circ g||| \leq |||f|||\ |||g|||$$
3. On considère la série $\sum_n f^n$ des composées de f définies par $f^0 = \mathrm{id}_E$ (l'application identité), $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$. Montrer que cette série est absolument convergente dans A.
4. En déduire que $\mathrm{id}_E - f$ admet un inverse de composition dans A, c'est à dire $g \in A$ tel que
$$g \circ (\mathrm{id}_E - f) = (\mathrm{id}_E - f) \circ g = \mathrm{id}_E$$
Quel est le lien entre $g(x)$ et le point fixe de F_x ?

Exercice 3

Soit E un espace de Banach. Soit $C = C_b^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ l'espace des applications C^1 bornées et de dérivées bornées $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

1. Soit $D : (C_b^1(]0, +\infty[, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty) \to (C_b^0(]0, +\infty[, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ défini par $D(f)(x) = f'(x)$. Montrer que D est une application linéaire non-continue. (Indication : considérer $f_n(x) = e^{-nx}$)
2. Pour rendre D continue, on considère la norme $||f||_{C^1} = \max(||f||_\infty, ||D(f)||_\infty)$. Montrer que cela définit une norme sur C et que $D : (C, ||\cdot||_{C^1}) \to (C_b^0(]0, +\infty[, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ est continue.
3. On pose $i(f) = (f, D(f))$ Montrer que $i : C \to (C_b^0(]0, +\infty[, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)^2$ définit une isométrie. En déduire que $(C, ||\cdot||_{C^1})$ est complet.

Exercice 4 On considère l'espace $E = \ell^1(\mathbb{N}) = \{a = (a_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : ||a||_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty\}$. On sait que $(E, ||\cdot||_1)$ est un espace vectoriel normé. Soit $a_n = (a_{n,m})_{m\geq 0} \in E$ la suite des coefficients d'une série absolument convergente dans E, c'est à dire : $\sum_{n=0}^{\infty} ||a_n||_1 < +\infty$.

On rappelle la version série du théorème de Fubini-Tonelli, pour toute série double (à coefficients positifs comme $|a_{n,m}|$), on peut intervertir les sommes :
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}| = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,m}| \in [0, +\infty].$$

1. Montrer que pour chaque $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n a_{n,m}$ converge dans $\mathbb{K}$, disons vers $b_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}$.
2. Montrer que $b = (b_m)_{m\geq 0} \in E$.

3. Montrer que $\left\|\sum_{i=0}^{n} a_i - b\right\|_1 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{i,m}|$. En déduire que $\left\|\sum_{i=0}^{n} a_i - b\right\|_1 \to_{n\to\infty} 0$.
4. En déduire que E est complet.

Exercice 5 On considère le système d'équations

$$\begin{cases} 4x = \sin(x+y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ 3y = 3 + 2\arctan(x-y). \end{cases} \tag{1}$$

1. Déterminer une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ soit solution de (1) si et seulement si (x,y) est un point fixe de f.
2. Montrer que f est contractante de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. On commencera par montrer les deux inégalités suivantes : pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a-b|$ et $|\arctan(a) - \arctan(b)| \leq |a-b|$.
3. Montrer que le système (1) admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 On considère l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R};\ f \text{ continue}\}$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ (cf TD 1 ex 5)

1. Montrer que $f_n(x) = x^n$ définit une suite de Cauchy de E.
2. E est-il complet ?

Compacité

Exercice 7 Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts dans $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^4 = 1\}\ , \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = x^3\}\ ,$$

$$C = \{(\cos t, \sin t) \colon t \in [0,1]\}\ , \quad D = \{(\cos t, \sin t) \colon t \in]0,1]\}\ , \quad E = \{(\cos t, \sin t) \colon t \in]0, 2\pi]\}.$$

Exercice 8 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme n_∞. Montrer que la boule fermée de centre 0 et rayon 1 n'est pas compacte. (Indication : on pourra démontrer que la suite (X^n) n'admet pas de sous-suite convergente.)

Exercice 9 Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé. On suppose que A est contenue dans la boule unité ouverte $B(0,1)$. Montrer qu'il existe $r < 1$ tel que A soit contenue dans $B_F(0,r)$.

Exercice 10 On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et on considère une partie non vide A de $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on définit

$$d(x,A) = \inf\{\|x-a\| \colon a \in A\}\ .$$

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,A) \leq d(y,A) + \|y-x\|$
2. En déduire que $x \mapsto d(x,A)$ est une fonction continue.
3. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que dans ce cas, $d(x,F) = 0$ si et seulement si $x \in F$.
4. Pour une partie non vide B de $\mathbb{R}^n$, on définit $d(A,B) = \inf\{\|b-a\| \colon a \in A, b \in B\}$. Montrer que $d(A,B) = \inf\{d(a,B) \colon a \in A\}$.
5. Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tels que
$$d(K,F) = \|b-a\|.$$
6. Ce dernier résultat est-il encore vrai si l'on suppose simplement K fermé ? (Indication : on pourra considérer les parties $A = \{(t, e^t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(t, -e^t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$.)

Exercice 11 Soit (X,d) un espace métrique, et (x_n) une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in X$. Montrer que l'ensemble $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

Exercice 12 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit f_n la fonction définie par $f_n(x) = f\left(\frac{\lfloor xn \rfloor}{n}\right)$. Montrer que f_n converge uniformément vers f. En déduire que les fonctions en escalier sont denses dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux $\mathcal{CM}([0,1], \mathbb{R})$.