

Feuille d'exercices numéro 3**Complétude**

Exercice 1 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., et $F \subseteq E$ un sous-espace de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E .

Exercice 2

Soit E un espace de Banach. Soit $A = (L(E, E), \|\cdot\|)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues sur E (munie de la norme subordonnée). Soit $f \in A$ vérifiant $\|f\| < 1$.

1. Soit $x \in A$, on pose $F_x(y) = f(y) + x$. Montrer que l'application F_x a un unique point fixe.
2. Vérifier que la norme subordonnée est sous-multiplicative, c'est à dire que pour tout $f, g \in A$:

$$\|f \circ g\| \leq \|f\| \|g\|$$

3. On considère la série $\sum_n f^n$ des composées de f définies par $f^0 = \text{id}_E$ (l'application identité),

$f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$. Montrer que cette série est absolument convergente dans A .

4. En déduire que $\text{id}_E - f$ admet un inverse de composition dans A , c'est à dire $g \in A$ tel que

$$g \circ (\text{id}_E - f) = (\text{id}_E - f) \circ g = \text{id}_E$$

Quel est le lien entre $g(x)$ et le point fixe de F_x ?

Exercice 3

Soit E un espace de Banach. Soit $C = C_b^1(]0, +\infty[, \mathbf{R})$ l'espace des applications C^1 bornées et de dérivées bornées $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$.

1. Soit

$D : (C_b^1(]0, +\infty[, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C_b^0(]0, +\infty[, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ défini par $D(f)(x) = f'(x)$. Montrer que D est une application linéaire non-continue. (Indication : considérer $f_n(x) = e^{-nx}$)

2. Pour rendre D continue, on considère la norme

$\|f\|_{C^1} = \max(\|f\|_\infty, \|D(f)\|_\infty)$. Montrer que cela définit une norme sur C et que

$D : (C, \|\cdot\|_{C^1}) \rightarrow (C_b^0(]0, +\infty[, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est continue.

3. On pose $i(f) = (f, D(f))$ Montrer que

$i : C \rightarrow (C_b^0(]0, +\infty[, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)^2$ définit une isométrie. En déduire que $(C, \|\cdot\|_{C^1})$ est complet.

Exercice 4 On considère l'espace

$E = \ell^1(\mathbf{N}) = \{a = (a_i) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} : \|a\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty\}$. On sait que

$(E, \|\cdot\|_1)$ est un espace vectoriel normé. Soit

$a_n = (a_{n,m})_{m \geq 0} \in E$ la suite des coefficients d'une série absolument convergente dans E , c'est à dire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_1 < +\infty.$$

On rappelle la version série du théorème de Fubini–Tonelli, pour toute série double (à coefficients positifs comme $|a_{n,m}|$), on peut intervertir les sommes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}| = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,m}| \in [0, +\infty].$$

1. Montrer que pour chaque $m \in \mathbf{N}$, la série $\sum_n a_{n,m}$ converge dans $\mathbf{K}$, disons vers $b_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}$.
2. Montrer que $b = (b_m)_{m \geq 0} \in E$.
3. Montrer que $\left\| \sum_{i=0}^n a_i - b \right\|_1 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{i,m}|$. En déduire que $\left\| \sum_{i=0}^n a_i - b \right\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
4. En déduire que E est complet.

Exercice 5 On considère le système d'équations

$$\begin{cases} 4x = \sin(x + y), \\ 3y = 3 + 2 \arctan(x - y). \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad (1)$$

1. Déterminer une fonction $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ soit solution de (1) si et seulement si (x, y) est un point fixe de f .
2. Montrer que f est contractante de $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. On commencera par montrer les deux inégalités suivantes : pour tout $a, b \in \mathbf{R}$,
 $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$ et
 $|\arctan(a) - \arctan(b)| \leq |a - b|$.
3. Montrer que le système (1) admet une unique solution dans $\mathbf{R}^2$.

Exercice 6 On considère l'espace

$E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}; f \text{ continue}\}$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ (cf TD 1 ex 5)

1. Montrer que $f_n(x) = x^n$ définit une suite de Cauchy de E .
2. E est-il complet ?

Compacité

Exercice 7 Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts dans $\mathbf{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^4 = 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y^2 = x^3\},$$

$$C = \{(\cos t, \sin t) : t \in [0, 1]\}, \quad D = \{(\cos t, \sin t) : t \in]0, 1]\},$$

Exercice 8 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$ muni de la norme n_∞ . Montrer que la boule fermée de centre 0 et rayon 1 n'est pas compacte. (Indication : on pourra démontrer que la suite (X^n) n'admet pas de sous-suite convergente.)

Exercice 9 Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé. On suppose que A est contenue dans la boule unité ouverte $B(0, 1)$. Montrer qu'il existe $r < 1$ tel que A soit contenue dans $B_F(0, r)$.

Exercice 10 On se place dans $\mathbf{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et on considère une partie non vide A de $\mathbf{R}^n$. Pour $x \in \mathbf{R}^n$ on définit

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}.$$

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$,
$$d(x, A) \leq d(y, A) + \|y - x\|$$
2. En déduire que $x \mapsto d(x, A)$ est une fonction continue.
3. Soit F un fermé non vide de $\mathbf{R}^n$. Montrer que dans ce cas, $d(x, F) = 0$ si et seulement si $x \in F$.
4. Pour une partie non vide B de $\mathbf{R}^n$, on définit
$$d(A, B) = \inf\{\|b - a\| : a \in A, b \in B\}.$$
 Montrer que
$$d(A, B) = \inf\{d(a, B) : a \in A\}.$$
5. Soit K un compact non vide de $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'il

existe $a \in K$ et $b \in F$ tels que

$$d(K, F) = \|b - a\|.$$

6. Ce dernier résultat est-il encore vrai si l'on suppose simplement K fermé ? (Indication : on pourra considérer les parties $A = \{(t, e^t) : t \in \mathbf{R}\}$ et $B = \{(t, -e^t) : t \in \mathbf{R}\}$ de $\mathbf{R}^2$.)

Exercice 11 Soit (X, d) un espace métrique, et (x_n) une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in X$. Montrer que l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

Exercice 12 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Soit f_n la fonction définie par $f_n(x) = f\left(\frac{\lfloor xn \rfloor}{n}\right)$. Montrer que f_n converge uniformément vers f . En déduire que les fonctions en escalier sont denses dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux $\mathcal{CM}([0, 1], \mathbf{R})$.