

Feuille d'exercices numéro 4

Ensembles et fonctions convexes

Exercice 1 Montrer que les ensembles C_i suivants sont convexes et trouver les cônes normaux $N_{C_i}(\theta)$ en $\theta = (0, 0)$:

1. $C_1 = [0, +\infty[\times \mathbb{R}$, 2. $C_2 = [0, +\infty[^2$, 3. $C_3 = [-1, 1]^2$, 4.
 $C_4 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \leq y\}$.

Exercice 2

1. Soient A, B deux convexes. Montrer que $A \cap B$ est convexe.
Est-ce que $A \cup B$ est convexe ?
2. Soit $A = \{0\} \cup]0, +\infty[^2$. Montrer que A est convexe dans $\mathbb{R}^2$ et calculer $T_A(\theta)$
3. Soit $B =]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$, calculer $T_B(\theta)$ et $T_{A \cap B}(\theta)$.
4. Soient A, B deux convexes généraux avec $c \in A \cap B$, trouver une relation entre $T_{A \cap B}(c)$ et $T_A(c) \cap T_B(c)$. (Pour une meilleure relation dans un cas particulier on pourra voir aussi l'exercice 20. 2)

Exercice 3 Montrer les inégalités suivantes, à l'aide de raisonnements de convexité :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.
2. $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.
3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.
4. $\forall x > -1, \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Exercice 4 Montrer que la fonction suivante croissante sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 5 Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = x^{2k}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

1. En calculant la dérivée seconde, montrer que f est strictement convexe sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Soient E, F des e.v. sur $\mathbb{R}$ et I un intervalle.

1. Soient $f : E \rightarrow I, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est convexe et g est convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et $A : F \rightarrow E$ linéaire, montrer que $f \circ A$ est convexe.
3. Montrer que $f(x, y) = (|2x + 3y| + |x - y|)^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$ pour $p \in [1, +\infty[$.

Exercice 7

1. Prouver que la fonction f définie par $f(x, y) = xy$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$, mais que les fonctions g, h définies par $g(x, y) = x^2 + y^2$ et $h(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ le sont.
2. Montrer que les trois fonctions suivantes sont séparément convexes en x (pour chaque y) et en y (pour chaque x).

$$i(x, y) = \exp(x + y), j(x, y) = \exp(xy), k(x, y) = \exp(x) + \exp(y).$$

Lesquelles sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8 Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $[-1, 1]^2$:

$$h_1(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{6}, h_2(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{12}, h_3(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{x^3}{3}, h_4(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

Exercice 9 Soit $f(x, y, z) = (2x + y)^2 + (2x + z)^2 - x^2$.

1. Montrer que les restrictions de f aux sous-espaces :

$C_1 = \{(x, y, 0), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, $C_2 = \{(x, 0, z), (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$, $C_3 = \{(0, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ sont convexes.

2. Est-ce que f est convexe sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10 (Tiré de l'examen 2025) On fixe $p, q, r \in [1, +\infty[$ vérifiant $p \geq q$ et :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \quad (1)$$

On pose $s = p - r$ et on fixe des constantes $C, D \in [0, +\infty[$. On remarque que (1) équivaut à

$$\frac{r}{q} = \frac{s}{p}. \quad (2)$$

et donc $p \geq q, r \geq 1$ impliquent $s \geq 1$ (qu'on pourra utiliser librement).

On définit

$$A = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2 : y \geq \frac{1}{x}\},$$

et $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x, y) = Cx^s + Dy^r$.

1. Montrer que A est convexe.
2. Montrer que g est convexe sur A .
3. Calculer le cône normal $N_A((x, y))$ en un point de la frontière

$$F = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2 : y = \frac{1}{x}\}$$

de A (on ne demande PAS de vérifier que F est la frontière de A).

4. Montrer que g atteint son minimum sur A en un point de F et que ce minimum vaut :

$$m = C \left(\frac{rD}{sC} \right)^{s/(r+s)} + D \left(\frac{sC}{rD} \right)^{r/(r+s)}.$$

Exercice 11 On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2 y^3}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 4$$

sur le pavé $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A .
2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème.
3. Trouver la solution.

Exercice 12 Soit C un convexe et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, montrer que f est convexe sur C si et seulement si pour tout intervalle $[a, b] \subset C$, la restriction $f|_{[a, b]}$ est convexe.

Exercices d'entraînements

Exercice 13 Montrer que les C_i sont convexes et trouver les cônes normaux $N_{C_i}(a_j)$:

1. $C_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ en $a_1 = (0, 0)$ et en $a_2 = (0, 1)$.
2. $C_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| + |y| \leq 1\}$ en $a_1 = (0, 0)$, en $a_3 = (1, 0)$ et en $a_4 = (1/2, 1/2)$.

Exercice 14 On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x, y) = x^4 + x^2 y^3 + 9x^2 + 8y^2 + 4$$

sur le pavé $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A .
2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi A est compact)
3. Trouver la solution.

Exercice 15 Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $\mathbb{R}^2$.

$$f_0(x, y) = x^2 + y^2 + x^4, \quad f_1(x, y) = x^2 + y^2 + x^3, \quad f_2(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy, \quad f_3(x, y) = \cos(x+y), \\ f_4(x, y) = xe^y + ye^x, \quad f_5(x, y) = |x + 1| + |y|, \quad f_6(x, y) = (|x + 1| + |y|)^2.$$

Exercice 16 Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $[0, 1]^2$:

$$g_1(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{6}, \quad g_2(x, y) = \frac{x^4 + y^6}{12}, \quad g_3(x, y) = -\sqrt{2 - (x^2 + y^2)} \\ g_4(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2}, \quad g_5(x, y) = \cos(xy), \quad g_6(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{x^3}{6}.$$

Exercices plus difficiles

Exercice 17

1. Soit C une partie fermée dans E e.v.n. telle que si $x, y \in C$ alors $\frac{x+y}{2} \in C$. Prouver que C est convexe.
2. Soit C convexe fermé de E . Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in C \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

3. Même question C est juste convexe mais pas fermé. (Indication : utiliser l'ex. 12)

Exercice 18

1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{2x - \cos(x)}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : I \rightarrow]0, +\infty[$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $\ln(f)$ est convexe alors f est convexe. Réciproque ?
3. Application : Montrer que $x \mapsto (1+x)^x$ est convexe sur $] -1, +\infty[$.

Exercice 19 Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ alors f est à valeurs positives (on pourra commencer par justifier le fait que f est décroissante).

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f est à valeurs négatives alors f est constante.
2. Montrer que s'il existe a, b tels que $f(x) \leq ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors f est une fonction affine.

Exercice 21 Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction concave.

1. Montrer que pour tout $x, y \geq 0$ on a $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.
2. On suppose en plus que f est continue en 0 et vaut $f(0) = 0$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 22 Soit f une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, majorée, de classe C^2 . On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall x \geq 0 \quad f''(x) \geq af(x) \geq 0.$$

1. Montrer que f est décroissante.
2. Déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $f(x) \leq f(0)e^{-x\sqrt{a}}$.

(Indication : en posant $\varphi(x) = f(0)e^{-x\sqrt{a}}$ on pourra montrer que $g = \frac{f}{\varphi}$ est décroissante en écrivant $g'(x) = \frac{\omega(x)}{\varphi(x)^2}$ et étudiant les variations de ω pour trouver son signe.)

Exercice 23 Montrer que pour S une partie fermé non-vide de E e.v.n. alors la fonction distance $d_S(x) := d(x, S) = \inf_{s \in S} \|x - s\|$ est convexe si et seulement si S est convexe.

Exercice 24 Soient $g_1, \dots, g_n$ des fonctions convexes C^1 définies sur $\mathbb{R}^m$ tel qu'il existe x_0 avec $g_i(x_0) < 0$ pour tout i . Soit la contrainte : $A = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in \{1, \dots, n\}, g_i(x) \leq 0\}$. On rappelle que soit $x \in A$ avec $g_1(x) = \dots = g_l(x) = 0$ (contraintes actives en x) et $g_{l+1}(x) < 0, \dots, g_n(x) < 0$, on a :

$$N_A(x) = \left\{ \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla g_i(x), \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

1. Soit $I \subset \{1, \dots, n\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\}$ et $C = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus I, g_i(x) \leq 0\}$ et $x \in B \cap C$.
En déduire que $N_{B \cap C}(x) = N_B(x) + N_C(x)$ et $T_{A \cap B}(c) = T_A(c) \cap T_B(c)$.
2. Si x minimise une fonction convexe f sur A . Montrer que x vérifie $\nabla f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$ pour $\lambda_i \geq 0$ (et $\lambda_i = 0$ si la i -ème contrainte n'est pas active)
3. On considère le problème de minimiser $f(x, y) := (x - 3)^2 + (y - 2)^2$ sous les contraintes $x^2 + y^2 \leq 5, -x + 2y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$.
Prouver qu'une solution existe qui n'est pas $(0, 0)$ et en déduire que la solution satisfait $f(x, y) < 13$.
Trouver la solution (en se guidant graphiquement et en utilisant les conditions nécessaires). (Indication : Graphiquement, on se doute que la contrainte saturée au minimiseur va être $x^2 + y^2 = 5$)