Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 Topologie et Théorie de la Mesure — 2023-2024

Feuille d'exercices numéro 4

Rappels, Dénombrabilité

Exercice 1 **(injectivité, surjectivité)** Soit $f : X \to Y$.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) f est injective ;
   (b) $\forall A \subset X,\ f^{-1}(f(A)) = A$;
   (c) $\forall x \in X,\ f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) f est surjective ;
   (b) $\forall B \subset Y,\ f(f^{-1}(B)) = B$;
   (c) $\forall y \in Y,\ f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$.

Exercice 2 Soit (x_n) une suite réelle. Trouver une sous-suite de (x_n) qui converge vers $\limsup x_n$. De plus, montrer que pour toute suite extraite $(x_{\phi(n)})$, on a $\limsup x_{\phi(n)} \leq \limsup x_n$.

En déduire que $\limsup x_n$ est la plus grande limite d'une sous-suite convergente de x_n et que $\liminf x_n$ est la plus petite limite d'une sous-suite convergente de x_n.

Exercice 3 Soit $(A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)$. On pose

$$\liminf_n A_n = \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k \text{ et } \limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

1. Montrer que
$$\liminf_n A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ pour n assez grand}\}$$
et
$$\limsup_n A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ pour un nombre infini de n}\}.$$
2. Démontrer les formules :
$$\limsup_n 1_{A_n} = 1_{\limsup A_n}$$
et
$$\liminf_n 1_{A_n} = 1_{\liminf A_n}.$$

Exercice 4 Parmi les assertions suivantes : lesquelles sont VRAIES et lesquelles sont FAUSSES ? (Prouver les ou réfuter les selon le cas).

1. L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.
2. L'ensemble des nombres pairs est dénombrable.
3. $[a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$ est dénombrable.
4. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

5. $\mathbb{R}$ est dénombrable.
6. $\mathbb{C}$ est dénombrable.
7. $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ est dénombrable.

Tribus

Exercice 5 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Si $A \in \mathcal{T}$ alors $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(A^c)$.
2. Si $A, B \in \mathcal{T}$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ alors A et B sont disjoints.
3. Il existe un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A) : A \in \mathcal{T}\} = \{0, 1, 2\}$.
4. Il existe un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A) : A \in \mathcal{T}\} = \{0, 1, 3\}$
5. Soient $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$ et μ_1 et μ_2 des mesures sur $\mathcal{T}$ telles que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ pour tous $A \in \mathcal{E}$. Est-ce que $\mu_1 = \mu_2$?

Exercice 6 On suppose que μ est une mesure finie : $\mu(\Omega) < \infty$. Soit

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{T} : \mu(A) = \mu(\Omega) \text{ ou } \mu(A) = 0\}.$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.

Exercice 7 **($\star$)** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\{x\} \in \mathcal{T}$ pour tous $x \in \Omega$. On note $D = \{x \in \Omega : \mu(\{x\}) > 0\}$. Est-il vrai que D est au plus dénombrable

1. si μ est finie,
2. si μ est σ-finie, c'est à dire si $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ avec $\mu(\mathcal{A}_n) < +\infty$.
3. si μ est quelconque ?

Exercice 8 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(U) = 0$ si et seulement si $U = \emptyset$.

Exercice 9 Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Si Ω est dénombrable alors chaque tribu sur Ω est au plus dénombrable.
2. Une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu si elle vérifie :
   (a) $\emptyset \in \mathcal{T}$;
   (b) $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$;
   (c) $A_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Exercice 10 **(Tribu engendrée par une fonction à valeur finie)** Soit une fonction $f : \Omega \to X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ à valeur dans un ensemble X à n éléments, muni de la tribu des parties $\mathcal{P}(X)$.

Soit $A_i = f^{-1}(\{x_i\})$ et $g = \sum_{k=1}^{n} k 1_{A_k} : \Omega \to [\![1, n]\!]$

1. Montrer que $A_1, \cdots, A_n$ est une partition de Ω (c'est à dire les ensembles sont deux à deux disjoints d'union Ω).
2. Montrer que $\sigma(f) = \sigma(\{A_1, \cdots, A_n\})$.

3. En déduire que $\sigma(f) = \sigma(g)$.
4. Montrer que l'image réciproque $f^{-1} : \mathcal{P}(X) \to \sigma(f)$ définit une bijection. Combien d'éléments contient $\sigma(f)$?
5. Soit $B_1, \cdots, B_m$ une partition de Ω. Décrire $\sigma(\{B_1, \cdots, B_m\})$.
6. Que vaut $\sigma(\{A_1\})$? Que vaut $\sigma(\{A_1, A_2\})$?

Exercice 11 **(Tribu engendrée par une fonction entière)** Soit une fonction $f : \Omega \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Soit $A_n = f^{-1}(\{n\})$.

1. Montrer que $\sigma(f) = \sigma(\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$.
2. Montrer que l'image réciproque $f^{-1} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \sigma(f)$ définit une bijection. $\sigma(f)$ est-il fini ? dénombrable ?
3. Soit $\mathcal{E} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ une partition de Ω. Montrer que $\sigma(\mathcal{E}) = \{\cup_{i \in J} A_i : J \subset \mathbb{N}\}$.

Exercice 12 Déterminer les tribus engendrées dans Ω par les familles $\mathcal{E}$ suivantes :

1. $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} = \{\mathbb{Z}\}$;
2. $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} = \{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\}$;
3. $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{E} = \{\{0\}, \{2\}, \{4\}, \cdots\}$.

Exercice 13 On travail avec la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Un ouvert ou un fermé est un borélien.
2. Un borélien est un ouvert ou un fermé.
3. Un intervalle est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 14 Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. L'ensemble $[2, 3[\cap \mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = \cos(\tan(x))\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.
3. Si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et si $A \subset B$ alors $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Fonctions mesurables, Mesures

Exercice 15 Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.
2. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est mesurable et si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est borélienne étagée alors $g \circ f$ est étagée.
3. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est telle que $f^{-1}(F) \in \mathcal{T}$ pour tout $F \subset \mathbb{R}$ fermé alors f est mesurable.
4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne et ne s'annule pas alors $\frac{1}{f}$ est borélienne.
5. La fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable si est seulement si $|f|$ est mesurable.

Exercice 16 (Mesure sur la tribu induite) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathcal{T}$. Alors $\mu_A(B) := \mu(A \cap B)$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$. On peut remplacer la tribu $\mathcal{T}$ par la tribu induite $\mathcal{T}_A := \{A \cap B : B \in \mathcal{T}\}$. Montrer que $(\Omega, \mathcal{T}, \mu_A)$ et $(A, \mathcal{T}_A, \mu_A)$ sont des espaces mesurés.

Exercice 17 Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré et $\lambda \in \mathbb{R}^+$ alors $(\lambda\mu)(A) := \lambda\mu(A), A \in \mathcal{T}$, définie une mesure sur $\mathcal{T}$. En particulier, si $0 < \mu(A) < \infty$ alors $\mu_A(\cdot)/\mu(A)$ est une probabilité (appelée *la probabilité conditionnelle sachant* A).

Exercice 18 Soit ν la mesure de comptage sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

1. Calculer $\nu([\![0, n]\!])$.
2. Montrer que la probabilité induite par ν sur $[\![0, n]\!]$, c'est-à-dire la mesure induite normalisée $\frac{1}{\nu([\![0,n]\!])}\nu_{[\![0,n]\!]}$ est :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\delta_k.$$
3. A-t-on $\nu(\cup_{n\in\mathbb{N}}[\![0, n]\!]) = \lim_{n\to\infty} \nu([\![0, n]\!])$?
4. A-t-on $\nu(\cap_{n\in\mathbb{N}}[\![0, n]\!]^c) = \lim_{n\to\infty} \nu([\![0, n]\!]^c)$?

Exercices supplémentaires

Exercice 19 **(Cantor)** On se propose de démontrer qu'il n'existe pas une surjection $h : \Omega \to \mathcal{P}(\Omega)$. Soit $A = \{x \in \Omega : x \notin h(x)\}$. Supposons par l'absurde qu'une telle h existe.

1. Montrer qu'il existe un $a \in \Omega$ tel que $h(a) = A$;
2. Montrer les implications : "$a \notin A \Rightarrow a \in A$" et "$a \in A \Rightarrow a \notin A$" ;
3. Conclure.
4. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. (Indication : on utilisera qu'un ensemble X est au plus dénombrable si et seulement si il existe une application surjective $\phi : \mathbb{N} \to X$.)

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que pour tout $a < b$, $f^{-1}([a, b])$ est un intervalle.
2. Montrer que f est borélienne.

Exercice 21 Soient $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et $A \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Montrer qu'il existe une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ au plus dénombrable telle que $A \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$. (Indication : Montrer que $\mathcal{T} = \{B \in \mathcal{T}(\mathcal{E}) : \exists \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ a.p.d. tel que $B \in \mathcal{T}(\mathcal{B})\}$ est une tribu qui contient $\mathcal{E}$.)

Exercice 22 Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.

1. Calculer la tribu $\sigma(\{A\})$ engendrée par $A = \{1\}$.
2. Calculer la tribu $\sigma(\{B\})$ engendrée par $B = \{2\}$.
3. Calculer les tribus $\sigma(\{A \cup B\})$ et $\sigma(\{A \cap B\})$.
4. Calculer la tribu $\sigma(\{A, B\})$ engendrée par A et B.
5. Quelle est la relation entre $\sigma(\{A, B\})$ et $\sigma(\{A \cup B\})$?

Exercice 23 On se propose de prouver que l'intervalle $[0,1)$ est non-dénombrable.

1. On définit par récurrence sur n une application $\psi : [0,1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}, a \mapsto (a_n)$, de manière suivante. On choisit $a_0 = 0$ et on pose $J_0 = [0, \frac{1}{2})$ si $a \in [0, \frac{1}{2})$ et on choisit $a_0 = 1$ et on pose $J_0 = [\frac{1}{2}, 1)$ si $a \in [\frac{1}{2}, 1)$. Si $a \in J_n = [l_n, r_n)$, on choisit
   — $a_{n+1} = 0$ et on pose $J_{n+1} = [l_n, l_n + \frac{r_n - l_n}{2})$ si $a \in [l_n, l_n + \frac{r_n - l_n}{2})$
   — $a_{n+1} = 1$ et on pose $J_{n+1} = [l_n + \frac{r_n - l_n}{2}, r_n)$ si $a \in [l_n + \frac{r_n - l_n}{2}, r_n)$.

   (a) Montrer que ψ est injective.

   (b) Soit A l'ensemble des suites qui sont constantes égales à 1 à partir d'un certain rang :
   $$A = \{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, b_n = 1\}.$$
   Montrer que ψ est à valeur dans A^c.

   (c) Montrer que l'image $\psi([0,1)) = A^c$. (Indication : poser, pour $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^c$, $a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{2^{k+1}}$ et montrer que $\psi(a) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

   (d) En écrivant $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ avec
   $$A_n = \{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \forall k \geq n, b_k = 1\},$$
   montrer que A est dénombrable.

2. Conclure.