Université Claude Bernard
L3 Topologie et Théorie de la Mesure

Mathématiques
2024-2025

Feuille d'exercices numéro 5 : Correction Partielle

Boréliens, fonctions mesurables

Exercice 1

(cf TD.)

ou Correction de 2021-2022 exercice 10

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille3-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 2

(cf TD.)

ou Correction de 2021-2022 exercice 11

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille3-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 3

(cf TD.)

ou Correction de 2021-2022 exercice 16

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille3-matheco_2022-2023correction.pdf`

Attention : il y a une erreur dans le corrigé de la première question dans ce corrigé de M. Tomanov d'il y a deux ans.

La première question est FAUSSE : Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs n'est pas forcément étagée, il faut aussi qu'elle soit MESURABLE.

Intégration

Exercice 4 $(\star)$

(cf TD.)

ou Correction de 2021-2022 exercice 2

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille5-matheco_2022-2023correction.pdf`

Attention : le 2 est FAUX tel quel et vrai si seulement si $\mu(A), \mu(B) < +\infty$ ou a, b de même signe. (Sinon, les deux termes de l'égalité ne sont pas définis)

Exercice 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f_n(x) = \begin{cases} x - n & \text{si } x \geq n \\ 0 & \text{si } x < n \end{cases}$$

Montrer que

1. chaque f_n admet une intégrale sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue. Est-elle intégrable ?
2. $f_n(x) \searrow 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

3. $\int f_n d\lambda$ ne converge pas vers $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n d\lambda$.

(cf TD)

ou Correction de 2021-2022 exercice 8 (Comme on voit que $\int f_n d\lambda = +\infty$ la réponse au 1. est que f_n n'est pas intégrable.)

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille5-matheco_2022-2023correction.pdf`

Théorèmes de convergence

Exercice 6

(cf. TD)

Exercice 7

(cf. TD)

Exercice 8

(cf. TD)

Exercice 9 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0,1] \to [0,+\infty[$ par $f_n(x) = (n+1)x^n$.

1. Déterminons la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On a $f_n(1) = n+1 \to +\infty$ et par croissance comparée $f_n(x) = (n+1)x^n \to_{n\to\infty} 0$ pour $x < 1$.
   La limite simple est donc la fonction
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ +\infty & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$
2. Déterminons la limite de la suite $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Par intégration directe, on a $\int_0^1 f_n(x)dx = [x^{n+1}]_0^1 = 1$. Donc on voit que cette suite converge vers 1.
3. On a $\int_0^1 f(x)dx = 0$ qui est donc différent de la limite. On ne peut pas intervertir la limite et l'intégrale car la suite n'est ni croissante, ni dominée.

Exercice 10

Exercice 11 Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrons que pour tout $x > 0$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente.
   On a $e^{-nx} = (e^{-x})^n$ qui est le terme général d'une série géométrique (Attention la somme commence à 1, donc
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}.$$
   De même, on a
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} 2e^{-2nx} = 2e^{-2x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nx} = \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}}.$$
   Donc la différence des deux séries convergentes converge, et on obtient :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{-x}(1+e^{-x})}{1-e^{-2x}} - \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{-x}(1-e^{-x})}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

2. Comparer $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

   On peut calculer pour $n > 0$:

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n} + \frac{e^{-2nx}}{n}\right]_0^{\infty} = 0.$$

   Donc bien sûr $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 0$. Or par changement de variable $u = e^{-x}$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 \frac{du}{1+u} = [\ln(1+u)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) \neq 0 = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx.$$

   On ne peut donc par intervertir somme et intégrale. En effet, la série n'est pas à terme positif (l'intégrale est nulle ! et la fonction non nulle) et on va voir que la série de fonction intégrable ne converge par dans L^1. On a $f_n(x) = 0$ pour $1 = 2e^{-nx}$ soit $\ln(2) - nx = 0$ ou encore l'unique solution est $x_0 = \frac{\ln(2)}{n}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx &= \int_0^{x_0} (2e^{-2nx} - e^{-nx})dx + \int_{x_0}^{+\infty} (e^{-nx} - 2e^{-2nx})dx \\
&= \left[\frac{e^{-nx}}{n} - \frac{e^{-2nx}}{n}\right]_0^{x_0} + \left[\frac{e^{-nx}}{-n} + \frac{e^{-2nx}}{n}\right]_{x_0}^{\infty} \\
&= 2\frac{e^{-nx_0}}{n} - 2\frac{e^{-2nx_0}}{n} = 2\frac{e^{-\ln(2)}}{n} - 2\frac{e^{-2\ln(2)}}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

   Et par une série de Riemann, on a $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx = +\infty$ donc le théorème d'interversion série-intégrale ne s'applique pas !

Exercice 12 (cf. TD)

Intégrales à paramètres

Exercice 13

(cf TD.)
ou Correction de 2021-2022 exercice 1
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 14

(cf TD.)
ou Correction de 2021-2022 exercice 2
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 15

(cf TD.)
ou Correction de 2021-2022 exercice 3
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 16 On pose $F(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt$.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $]0, \infty[$
2. Montrer que F est continûment dérivable sur $]0, \infty[$.
3. Montrer que F est aussi bien définie en 0 comme intégrale de Riemann semi-convergente :$F(0) = \lim_{K\to\infty} \int_0^K \frac{\sin(t)}{t}dt$. (Indication : utiliser une intégration par partie).
4. Montrer que F est continue en 0. (Indication : il faut utiliser une méthode standard pour les intégrales semi-convergentes. On pourra décomposer $F(x) = F_0(x) + F_1(x)$ pour les intégrales sur $]0, 1],]1, +\infty[$, et utiliser une intégration par partie $v'(t) = \sin(t), u(t) = e^{-tx}/t$ sur F_1 pour obtenir la formule alternative suivante :

$$F_0(x) = \int_0^1 e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt, \qquad F_1(x) = \int_1^\infty e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt = e^{-x}\cos(1) + \int_1^\infty (xt + 1)e^{-tx}\frac{\cos(t)}{t^2}dt.)$$

(cf TD. pour les questions 1 et 2)
ou Correction de 2021-2022 exercice 4
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf`

3. Par intégration par partie avec $v'(t) = \sin(t), v(t) = -\cos(t), u(t) = 1/t, u'(t) = -1/t^2$, on a

$$\int_1^K \frac{\sin(t)}{t}dt = [-\frac{\cos(t)}{t}]_1^K + \int_1^K \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

Donc en utilisant l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ pour montrer que le dernier terme converge, on obtient la limite :

$$F(0) = \lim_{K\to\infty} \int_0^K \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt + \cos(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt.$$

4. En suivant l'indication, par la même intégration par partie, on obtient :

$$F(x) = F_0(x) + F_1(x) = \int_0^1 e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt + e^{-x}\cos(1) + \int_1^\infty (xt + 1)e^{-tx}\frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

On montre la continuité de F_0 et F_1 séparément comme intégrales à paramètres.

On pose $f_0(t, x) = e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}$ qui est continue sur $]0, 1] \times [0, +\infty[$ par produit de fonctions usuelles, dominée par 1, intégrable sur $]0, 1]$, donc par théorème de continuité avec condition de domination F_0 est continue sur $[0, +\infty[$, en particulier en 0.

On pose $f_1(t, x) = (xt+1)e^{-tx}\frac{\cos(t)}{t^2}$ qui est continue sur $[1, +\infty[\times[0, +\infty[$ par produit de fonctions usuelles, dominée par $|f_1(t, x)| \leq \frac{M}{t^2} = g(t)$.

En effet, $h(u) = (u + 1)e^{-u}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et tendant vers 0 en $+\infty$ par croissance comparée, donc est bornée par M. On peut aussi montrer que h est décroissante sur $[0, +\infty[$ et donc borné par sa valeur en 0 à savoir $M = 1$.

Or g est intégrable sur $[1,+\infty[$ et ne dépend pas de x, donc par théorème de continuité avec condition de domination

$$F_1(x) - e^{-x}\cos(1) = \int_1^{\infty} (xt+1)e^{-tx}\frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

est continue sur $[0,+\infty[$. Par somme avec F_0 et l'exponentielle qui est aussi continue, on déduit que F est continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice 17 (cf CM.)

Exercices supplémentaires

Exercice 18 Calculer $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^x}{1+x^n}dx$, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx$ et $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{|x|}{n})dx$.

1/ On pose $f_n(x) = \frac{e^x}{1+x^n}$, on déduit $f_n(x) \to e^x$ pour $x \in [0,1[$. On a la domination $|f_n(x)| \leq e$ par une constante donc une fonction Lebesgue-intégrable sur $[0,1[$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée en réécrivant l'intégrale comme intégrale de Lebesgue :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^x}{1+x^n}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1[} \frac{e^x}{1+x^n}d\lambda(x) = \int_{[0,1[} e^x d\lambda(x) = \int_0^1 e^x dx = e-1$$

2/ On pose $g_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$. Pour $x>0$, on a $g_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x} \to 0$. On a la domination $|g_n(x)| \leq 1$ par une constante donc une fonction Lebesgue-intégrable sur $]0,1]$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée en réécrivant l'intégrale comme intégrale de Lebesgue :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{]0,1]} \frac{e^{-nx}}{1+x}d\lambda(x) = \int_{]0,1]} 0 d\lambda(x) = 0.$$

3/ On pose $h_n(x) = \exp(-\frac{|x|}{n})$. On a la limite simple $h_n(x) \to 1_{\{0\}}(x)$. Or pour $n \geq 1$, on a la domination $|h_n(x)| \leq \exp(-|x|) = h_1(x)$. Or h_1 est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x)dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 2$. Donc par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{|x|}{n})dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\{0\}}(x)dx = 0.$$

Exercice 19

Calculer $\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$ et $\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$.

1/ On pose $f_n(x) = 1_{[0,n]}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ on a la limite simple

$$f_n(x) = 1_{[0,n]}(x)\exp(n\ln(1-\frac{x}{n})) \to_{n\to\infty} \exp(-x).$$

Par concavité du log, on a $\ln(1-\frac{x}{n}) \leq -\frac{x}{n}$ (borne par la tangente en 1), on obtient donc la domination

$$|f_n(x)| = 1_{[0,n]}(x)\exp(n\ln(1-\frac{x}{n})) \leq 1_{[0,n]}(x)\exp(-\frac{x}{n}n) \leq \exp(-x) = g(x).$$

Or g est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc par le TCD, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,+\infty[} f_n(x)d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-x}d\lambda(x) = 1.$$

2/ On pose $g_n(x) = 1_{[0,n]}(x)\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ on a la limite simple

$$g_n(x) = 1_{[0,n]}(x)\exp(n\ln(1+\frac{x}{n}))e^{-2x} \to_{n\to\infty} \exp(x)e^{-2x} = e^{-x}.$$

Par concavité du log, on a $\ln(1+\frac{x}{n}) \leq \frac{x}{n}$ (borne par la tangente en 1), on obtient donc la domination

$$|g_n(x)| = 1_{[0,n]}(x)\exp(n\ln(1+\frac{x}{n}))e^{-2x} \leq 1_{[0,n]}(x)\exp(\frac{x}{n}n)e^{-2x} \leq \exp(x)e^{-2x} = g(x).$$

Or g est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc par le TCD, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,+\infty[} g_n(x)d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-x}d\lambda(x) = 1.$$

Exercice 20 Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin(x))^n dx$ et $\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3}dx$.

1/ On pose $f_n(x) = e^{-x}(\sin(x))^n \to_{n\to\infty} 0$ pour tout $x \notin \mathbb{Z}\pi$. Or $\lambda(\mathbb{Z}\pi) = 0$ (car $\mathbb{Z}\pi$ est dénombrable) donc f_n converge vers 0 λ-p.p.

De plus, on a la domination $|f_n(x)| \leq e^{-x} = g(x)$ par g intégrable sur $[0,+\infty[$ donc par le théorème de convergence dominé, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin(x))^n dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{[0,+\infty[} e^{-x}(\sin(x))^n d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[} 0 d\lambda(x) = 0.$$

2/On pose, pour $x \geq 1$, $g_n(x) = \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3} \sim_{n\to+\infty} \frac{n\frac{x}{n}}{x^3} = \frac{1}{x^2}$.

De plus, on rappelle que $|sin(y)| \leq |y|$ (cf. inégalité de convexité du TD 2), donc on obtient la domination :

$$\left|\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3}\right| \leq \frac{n\frac{x}{n}}{x^3} = \frac{1}{x^2} = g(x).$$

Or, comme intégrale de Riemann ($\alpha = 2 > 1$), on sait que g est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc par le théorème de convergence dominé, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3}d\lambda(x) = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}d\lambda(x) = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1.$$

Exercice 21 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $f_n : [0,1] \to [0,+\infty[$ par $f_n(x) = n(1-x)^n\sin^2(nx)$.

1. Déterminons la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On notera cette limite simple f.
   On a $f_n(0) = 0 \to 0$ et pour $x > 0$ on a $|f_n(x)| \leq n(1-x)^n \to_{n\to\infty} 0$ par croissance comparée. Donc la limite simple est 0.

2. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on fait le changement de variable $y = nx$ et on obtient

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^n \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \sin^2(y)dy.$$

3. Comme la fonction $g(x) = e^{-x}$ a pour dérivée seconde elle-même qui est positive, f est convexe. On vérifie que pour tout $x \geq 0$, on a $1 - x \leq e^{-x}$ vu que $y = 1 - x$ est la tangente à g en 0.
4. En bornant aussi le sinus par 1, on en déduit la domination :

$$\left| 1_{[0,n]}(y) \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \sin^2(y) \right| \leq (e^{-y/n})^n = e^{-y}$$

et cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$, Donc par le théorème la suite

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_{[0,+\infty[} 1_{[0,n]}(y) \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \sin^2(y)d\lambda(y) \to_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty[} e^{-y} \sin^2(y)d\lambda(y).$$

5. On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_{[0,+\infty[} e^{-y} \sin^2(y)d\lambda(y) \neq \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Car la fonction positive $e^{-y}\sin^2(y)$ ne pourrait être d'intégrale nulle que si elle était nulle presque partout. Or ce n'est pas le cas puisqu'elle s'annule comme le sinus pour $y \in \mathbb{N}\pi$ qui est dénombrable donc de mesure nulle.
6. On a déjà calculé $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} \sin^2(y)dy.$
Si on veut une valeur explicite , on peut utiliser la formule d'Euler :

$$\int_0^{+\infty} e^{-y} \sin^2(y)dy = -\int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{e^{2iy} + e^{-2iy} - 2}{4} dy = \frac{-1}{4} \left[\frac{e^{-y}e^{2iy}}{2i-1} - \frac{e^{-y}e^{-2iy}}{2i+1} + 2e^{-y} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{5}.$$

Exercice 22 On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2} dx$ pour $\alpha \geq 0$.

1. Montrons que $0 \leq I(\alpha) < +\infty$ pour tout $\alpha \geq 0$.
On pose $i(\alpha, x) = \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}$. i est clairement continue en $x = 0$ par quotient de fraction usuelle. On a $i(0, x) = 0$ qui est bien intégrable donc $I(0)$ existe et vaut 0. Pour $\alpha > 0$, on a l'équivalent $i(\alpha, x) \simeq \frac{2\ln(x)}{x^2}$ donc $x^{3/2}i(\alpha, x) \simeq \frac{2\ln(x)}{\sqrt{x}} \to_{x\to\infty} 0$ donc $i(\alpha, x) = o(\frac{1}{x^{3/2}})$ en $+\infty$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}dx < +\infty$ (intégrale de Riemann convergente $\alpha = 3/2 > 1$). donc par comparaison i est intégrable en $+\infty$, donc sur $[0, +\infty[$ par ce qui précède, on en déduit $I(\alpha) < +\infty$
Enfin $i(\alpha, x) \geq i(0, x) = 0$ car i est une fonction croissante de α comme ln d'où en intégrant, on obtient $0 \leq I(\alpha)$.

2. Montrons que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimons $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale.
   i est C^1 sur $]0, +\infty[^2$ par quotient à dénominateur non nulle de fonctions usuelles et
$$\frac{\partial i}{\partial \alpha} = \frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}.$$

On va appliquer le théorème de dérivation successive pour $k = 1$ dérivée sur l'ouvert $U = \left]\frac{1}{a}, M\right[\times]0, +\infty[$

Sur U, on a la domination $1 + \alpha x^2 \geq x^2/a$ d'où
$$\left|\frac{\partial i}{\partial \alpha}\right| \leq \frac{a}{1+x^2} = g(x).$$
et par croissance (et positivité) de i en α on a aussi $|i(\alpha, x)| \leq i(M, x) = h(x)$. On a vu au 1 que h et g sont intégrable, on peut donc appliquer le le théorème de dérivation successive sur U pour conclure que I est C^1 sur $\left]\frac{1}{a}, M\right[$ avec dérivée :
$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}\, dx.$$

On $a, M > 0$ sont arbitraires, on en déduit que par localité du caractère C^1 que I est C^1 sur $]0, +\infty[$.

3. Montrons que I est continue en 0. La domination sur i de la question précédente s'applique sur $V = [0, M[\times]0, +\infty[$, comme i est continue sur $[0, +\infty[^2$ donc sur V, on en déduit qu'on peut appliquer le théorème de continuité avec condition de domination (cas $k = 0$ du théorème de dérivation successive.) On en déduit que I est continue sur $[0, M[$ et donc en particulier en 0.

4. (a) Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.
   En général, du cours de $L1$, on se souvient que pour $\alpha \neq 1$, la forme de la décomposition en élément simple est $\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)} = \frac{a+bx}{1+x^2} + \frac{c+dx}{1+\alpha x^2}$. Mais ici, on voit qu'en prenant $b = d = 0, c = -a$, on va trouver une solution en mettant le second membre au même dénominateur :
$$\frac{a}{1+x^2} - \frac{a}{1+\alpha x^2} = a\frac{x^2(\alpha-1)}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)},$$
   ce qui donne $a = \frac{1}{\alpha-1}$.

   (b) Déduisons la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$ et d'abord $\alpha \neq 1$.
   On a en appliquant 4(a) à 2) :
$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(\alpha-1)} - \frac{1}{(1+\alpha x^2)(\alpha-1)}\, dx = \left[\frac{\arctan(x)}{(\alpha-1)} - \frac{\arctan(\sqrt{\alpha}x)}{\sqrt{\alpha}(\alpha-1)}\right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{(\alpha-1)} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}(\alpha-1)}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{\alpha}-1}{(\alpha-1)\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}+1)}$$
   Comme cette dernière formule est continue en α même en 1, comme I', on en déduit qu'en prolongeant par continuité, c'est la formule pour tout $\alpha > 0$ (soit $I'(1) = \frac{\pi}{4}$).

(c) Calculons $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$. On a $I'(\alpha) = \pi \frac{u'}{u}$ avec $u = 1 + \sqrt{\alpha}$, donc on déduit les primitives $I(\alpha) = C + \pi \ln(1 + \sqrt{\alpha})$. Or on a déjà vu $I(0) = 0$ donc on trouve la conclusion $C = 0$, d'où

$$I(\alpha) = \pi \ln(1 + \sqrt{\alpha}).$$