Université Claude Bernard | Mathématiques
L3 Topologie et Théorie de la Mesure | 2023-2024

Feuille d'exercices numéro 4 : Correction partielle

Rappels, Dénombrabilité

Exercice 1

(cf TD.)

ou Correction de 2021-2022 exercice 3

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille1-matheco_2022-2023_correction.pdf`

Exercice 2

(cf TD.)

Exercice 3

Correction de 2021-2022 exercice 3

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille1-matheco_2022-2023_correction.pdf`

Exercice 4

(cf TD.)

ou Correction de 2021-2022 exercice 10

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille1-matheco_2022-2023_correction.pdf`

Tribus

Exercice 5

(cf TD.)

ou Correction de 2021-2022 exercice 5

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille4-matheco_2022-2023_correction_2_.pdf`

Exercice 6

cf. Correction de 2021-2022 exercice 6

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille4-matheco_2022-2023_correction_2_.pdf`

Exercice 7 $(\star)$

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\{x\} \in \mathcal{T}$ pour tous $x \in \Omega$. On note $D = \{x \in \Omega : \mu(\{x\}) > 0\}$. Est-il vrai que D est au plus dénombrable

1. si μ est finie, Oui c'est vrai. En effet, $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_n, D_n = \{x \in \Omega : \mu(\{x\}) > 1/n\}$ est une union au plus dénombrable d'ensembles finies. En effet, Montrons que D_n est fini. Si son cardinal est $\geq k$, on a $D_n \supset \{x_1, \cdots, x_k\}$, on a
$$\mu(D_n) \geq \sum_{l=1}^{k} \mu(\{x_k\}) \geq \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$
donc $k \leq n\mu(D_n) \leq n\mu(\Omega) < +\infty$ qui est donc fini. ON en déduit que le cardinal $\nu(D_n) \leq n\mu(\Omega) < +\infty$.
2. si μ est σ-finie, c'est à dire si $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ avec $\mu(\mathcal{A}_n) < +\infty$. Oui, c'est aussi vrai. ON pose $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ avec $\mu(A_n) < +\infty$. Par le 1, $D \cap A_n$ est au plus dénombrable et donc $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap D$ est une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrable, est donc au plus dénombrable.
3. si μ est quelconque ? Non, il suffit de prendre la mesure de comptage sur un ensemble non-dénombrable comme $\Omega = \mathbb{R}$, on a alors $D = \Omega$ qui est non dénombrable vu que $\nu(\{x\}) = 1 > 0$ pour tout x pour la mesure de comptage.

Exercice 8

cf. Correction de 2021-2022 exercice 14

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille4-matheco_2022-2023_correction_2_.pdf`

Exercice 9

(cf TD.)

ou Correction de 2021-2022 exercice 4

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille3-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 10 (Tribu engendrée par une fonction à valeur finie)

(cf. TD)

Exercice 11 (Tribu engendrée par une fonction entière)

(cf TD.)

Exercice 12

(cf TD.)

Exercice 13

(cf TD.)

ou Correction de 2021-2022 exercice 10

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille3-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 14

(cf TD.)

ou Correction de 2021-2022 exercice 11

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille3-matheco_2022-2023correction.pdf

Fonctions mesurables, Mesures

Exercice 15

(cf TD.)

ou Correction de 2021-2022 exercice 11

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille3-matheco_2022-2023correction.pdf

Attention : il y a une erreur dans le corrigé de la première question dans ce corrigé de l'an dernier.

La première question est FAUSSE : Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs n'est pas forcément étagée, il faut aussi qu'elle soit MESURABLE.

Exercice 16 (Mesure sur la tribu induite)

cf. Correction de 2021-2022 exercice 3

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille4-matheco_2022-2023_correction_2_.pdf

Exercice 17

cf. Correction de 2021-2022 exercice 4

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille4-matheco_2022-2023_correction_2_.pdf

Exercice 18 Soit ν la mesure de comptage sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

1. On a $\nu(\llbracket 0, n \rrbracket) = n + 1$ (c'est le nombre d'éléments).
2. Montrer que la probabilité induite par ν sur $\llbracket 0, n \rrbracket$, c'est-à-dire la mesure induite normalisée $\frac{1}{\nu(\llbracket 0,n \rrbracket)} \nu_{\llbracket 0,n \rrbracket}$ est :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \delta_k.$$
(c'est évident, il suffit de voir l'égalité la famille génératrice $\{\{m\} : 0 \leq m \leq n\} \cup \{\emptyset\}$ (qui est stable par intersection finie si on veut appliquer le lemme de classe monotone,) Or on a bien
$$\frac{1}{\nu(\llbracket 0, n \rrbracket)} \nu_{\llbracket 0,n \rrbracket}(\{m\}) = \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \delta_k(\{m\}).$$
3. A-t-on $\nu(\cup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 0, n \rrbracket) = \lim_{n \to \infty} \nu(\llbracket 0, n \rrbracket)$. Oui c'est la limite d'une union croissante, c'est une propriété de toutes les mesures : les deux valeurs sont $+\infty$.
4. A-t-on $\nu(\cap_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 0, n \rrbracket^c) = \lim_{n \to \infty} \nu(\llbracket 0, n \rrbracket^c)$? Non, $\cap_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 0, n \rrbracket^c = \emptyset$ donc $\nu(\cap_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 0, n \rrbracket^c) = 0 \neq +\infty = \lim_{n \to \infty} \nu(\llbracket 0, n \rrbracket^c)$ vu que $\nu(\llbracket 0, n \rrbracket^c) = +\infty$.

Exercices supplémentaires

Exercice 19 (Cantor)

cf. Correction de 2021-2022 exercice 6

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille1-matheco_2022-2023_correction.pdf`

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrons que pour tout $a < b$, $f^{-1}([a, b])$ est un intervalle.
   On rappelle qu'un intervalle est la même chose qu'un convexe de $\mathbb{R}$:C'est la convexité que l'on montre : soit $c < d \in f^{-1}([a, b])$, on a $f(c), f(d) \in [a, b]$. Or pour $t \in [0, 1]$, $c < tc+(1-t)d < d$ donc par croissance, on a $f(c) \leq f(tc+(1-t)d) \leq f(d)$ et donc $a \leq f(c) \leq f(tc+(1-t)d) \leq f(d) \leq b$ et donc $f(tc + (1-t)d) \in [a, b]$ soit $tc + (1-t)d \in f^{-1}([a, b])$.
2. Montrons que f est borélienne.
   Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{[a, b], a \leq b\})$, il suffit de montrer que pour tout $a \leq b$, on a $f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Par la question qui précède, il suffit donc de montrer que tout intervalle est borélien. C'est ce qu'on a montré à l'exercice 13.3.

Exercice 21

(cf TD.)

ou Correction de 2021-2022 exercice 24

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille3-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 22 Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.

1. Calculer la tribu $\sigma(\{A\})$ engendrée par $A = \{1\}$. C'est $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}$ par le cours (tribu engendré par un seul ensemble $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.
2. Calculer la tribu $\sigma(\{B\})$ engendrée par $B = \{2\}$.C'est $\sigma(\{B\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3, 4\}, \Omega\}$ par le cours.
3. Calculons les tribus $\sigma(\{A \cup B\})$ et $\sigma(\{A \cap B\})$. On a $A \cup B = \{1, 2\}$, donc on a par le même résultat cours $\sigma(\{A \cup B\}) = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$ et $\sigma(\{A \cap B\}) = \sigma(\emptyset) = \{\emptyset, \Omega\}$.
4. Calculons la tribu $\sigma(\{A, B\})$ engendrée par A et B.
   On a une partition $A, B, C = (A \cup B)^c = \{3, 4\}$ donc on peut appliquer l'exo 10.5 (vu en exemple de cours) : $\sigma(\{A, B\}) = \{\emptyset, \{1\}, = \{2\}, \{3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}$.
5. Quelle est la relation entre $\sigma(\{A, B\})$ et $\sigma(\{A \cup B\})$?
   On a donc $\sigma(\{A \cup B\}) \subset \sigma(\{A, B\})$ mais on n'a pas égalité.

Exercice 23 On se propose de prouver que l'intervalle $[0, 1)$ est non-dénombrable.

cf. Correction de 2021-2022 exercice 9

`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille1-matheco_2022-2023_correction.pdf`