Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 Topologie et Théorie de la Mesure — 2025-2026

Feuille d'exercices numéro 6

Classes monotones et mesurabilité

Exercice 1 Si $\Omega = \{1, 2, 3\}$ trouver la tribu engendrée par $\mathcal{E} = \{\{1\}\}$.

Exercice 2 En utilisant seulement $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\Big(\big\{]a, b[, a < b \in \mathbb{R}\big\}\Big)$, montrer que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\Big(\big\{]-\infty, a], a \in \mathbb{R}\big\}\Big) = \sigma\Big(\big\{[a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\big\}\Big).$$

1. En déduire que deux mesures μ, ν sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telles que $\mu(]-\infty, a]) = \nu(]-\infty, a]) < \infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ sont égales (i.e. $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu(A) = \nu(A)$).
2. Soient $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{E})$ et μ_1 et μ_2 des mesures sur $\mathcal{T}$ telles que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ pour tous $A \in \mathcal{E}$. Est-ce que $\mu_1 = \mu_2$?

Exercice 3 Prouver ou réfuter les assertions suivantes :

1. Une partie d'un ensemble négligeable est négligeable.
2. Une union au plus dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.
3. Une union d'ensembles négligeables est négligeable.

Théorèmes de Fubini et mesures produits

Exercice 4 Soit $f \geq 0$ une fonction mesurable positive μ une mesure σ-finie sur $(\Omega, \mathcal{T})$, montrer que pour $p \in]0, \infty[$:

$$\int f^p d\mu = \int_0^\infty p t^{p-1} \mu(\{\omega : f(\omega) > t\}) dt.$$

Exercice 5 On considère le domaine $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ délimité par les droites $y = 0$, $y = 1$, $y = 2 - x$ et $y = 1 + x$. Calculer $\displaystyle\iint_\Delta xy dx\, dy$.

Exercice 6 Calculer $\displaystyle\iint_D (x + y) e^{-(x+y)} dx dy$, où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x + y \leq 1\}.$$

Exercice 7 Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on pose

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales.
2. La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $[-1,1]^2$?

Exercice 8 Soient ν la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$ et $\rho = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ la *mesure de Rademacher*. Soit $s(x,y) = x + y$ donnant une fonction $s : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$. Montrer que la mesure image par s de la mesure produit est $s_*(\nu \otimes \rho) = \nu$.

Exercice 9 Soit $D = [0,1]^2$. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$ et $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$.

Exercice 10 Soient f, g des fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $||f||_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\lambda(x)$. On définit la convolution de f, g par :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) d\lambda(y) \in [0, +\infty].$$

1. Montrer que $f * g$ est, mesurable et que $||f * g||_1 = ||f||_1 ||g||_1$.
2. Montrer que la définition de $f * g$ s'étend pour presque tout x aux $f, g \in L^1(\mathbb{R}, d\lambda)$, que $f * g \in L^1(\mathbb{R}, d\lambda)$ et $||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$.
3. Montrer que pour f, g, h toutes mesurables positives ou toutes intégrables, alors $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Changements de variables

Exercice 11 Soit $D = B((0,1),1)$ dans le plan. Calculer $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$.

Exercice 12 Soit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2+y^2) < 9\}$. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/3}}\,dxdy$ est convergente et donner sa valeur.

Exercice 13 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2+y^2)^2 < xy\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$.

Exercice 14 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 - 2x < 0, x^2 - 2y < 0\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy$.
(Indication : poser $x = u^2 v$ et $y = uv^2$)

Exercice 15 On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. Calculer $J = \displaystyle\iint_{]0,+\infty[^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ en fonction de I. Calculer J en utilisant les coordonnées polaires. En déduire la valeur de I.

Exercice 16 Calculer l'intégrale $\displaystyle\iiint_D \frac{z}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$
où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < x^2 + y^2 < z^2 < 4\}$.

Exercice 17 Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < z < x^2 + y^2 < 1\}$.
Justifier que l'intégrale $\displaystyle\iiint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ est convergente et donner sa valeur.

Exercices plus difficiles.

Exercice 18 Ensemble triadique de Cantor et escalier du diable Soit $\Omega = [0,1]$, muni de la restriction de la mesure de Lebesgue λ à $\mathcal{B}([0,1])$.

Si $I = [a,b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, on note $\widetilde{I} = \left[a, \frac{2a+b}{3}\right] \cup \left[\frac{a+2b}{3}, b\right] \subset I$ l'union d'intervalles obtenu en retirant de I l'intervalle ouvert qui a le même centre que I et dont la longueur est un tiers de celle de I.

On définit par récurrence une suite d'ensembles $C_n \subset [0,1]$ (tous union finie d'intervalle fermés) et de fonctions croissantes linéaires par morceau $F_n : [0,1] \to [0,1]$ par

— $C_0 = [0,1]$ et $F_0(x) = x$.

— Si C_n s'écrit comme une union finie d'intervalles fermés deux à deux disjoints : $C_n = \bigcup_{m=1}^{N} I_m$ avec $I_m = [a_m, b_m]$ alors C_{n+1} est défini comme $C_n = \bigcup_{m=1}^{N} \widetilde{I_m}$ et

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} F_n(x) & \text{si} \quad x \notin C_n \\ \frac{F_n(a_m)+F_n(b_m)}{2} & \text{si} \quad x \in I_m - \widetilde{I_m} = \left]\frac{2a_m+b_m}{3}, \frac{a_m+2b_m}{3}\right[, \\ F_n(a_m) + (F_n(b_m) - F_n(a_m))\frac{3(x-a_m)}{2(b_m-a_m)} & \text{si} \quad x \in [a_m, \frac{2a_m+b_m}{3}], \\ F_n(b_m) - (F_n(b_m) - F_n(a_m))\frac{3(b_m-x)}{2(b_m-a_m)} & \text{si} \quad x \in [\frac{a_m+2b_m}{3}, b_m]. \end{cases}$$

1. Montrer que C_n est compact et vérifie $C_{n+1} \subset C_n$.
2. On pose $U_n = [0,1] - C_n$. Montrer que C_n est une union de 2^n intervalles compacts deux à deux disjoints et U_n est union de $2^n - 1$ intervalles ouverts deux à deux disjoints. Est-ce que C_n est borélien ?
3. Calculer $\lambda(C_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Posons $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$. Montrer que C est non vide et calculer $\lambda(C)$. C s'appelle *ensemble triadique de Cantor*.
5. Montrer que la formule $\phi(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 1_A(n)}{3^{n+1}}$ définit une fonction injective $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to C$. En déduire que C est non-dénombrable.
6. Montrer que F_n est croissante pour tout n.
7. Montrer que F_n est lipschitzienne de constante $K \leq \frac{3^n}{2^n}$ et que pour tout $x \in [0,1]$,
$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq \frac{1}{3.2^{n+1}}$$
En déduire que F_n converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue F.
8. Montrer que $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.
9. Posons $U = [0,1] - C$. Si $I \subset U$ est un intervalle ouvert, montrer que F est constante sur I.
10. En déduire que F est dérivable sur U, n'est pas constante, mais que $F'(x) = 0$ pour λ-presque tout $x \in [0,1]$. F s'appelle *escalier du diable de Cantor*.

Exercice 19 Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\{x\} \in \mathcal{T}$ pour tous $x \in \Omega$. On dit que μ est *continue* si $\mu(\{x\}) = 0\}$ pour tout $x \in \Omega$ et on dit que μ est *discrète* s'il existe un ensemble D au plus dénombrable tel que $\mu(D^c) = 0$.

1. Montrer que l'équivalence des conditions suivantes :
   (a) μ est continue ;
   (b) si A est une partie au plus dénombrable de Ω alors $\mu(A) = 0$;
   (c) toute partie au plus dénombrable A de Ω est μ-négligeable.
2. Montrer que μ est discrète si et seulement s'il existe une suite (a_n) de points de Ω et une suite $(c_n) \subset [0, \infty]$ telles que $\mu = \sum\limits_n c_n \delta_{a_n}$.
3. Décrire les espaces mesurés avec μ à la fois discrète et continue.
4. **($\star$)** Supposons maintenant que μ est σ-finie. Montrer que μ s'écrit de façon unique $\mu = \mu_c + \mu_d$, où μ_c est une mesure continue et μ_d est une mesure discrète.

Exercice 20 **($\star$)** Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\overline{\mathcal{T}} = \{A \Delta N : A \in \mathcal{T}, N\ \mu-\text{négligeable}\}$.

1. Montrer que $\overline{\mathcal{T}}$ est une tribu. *C'est la tribu μ-complétée de $\mathcal{T}$.*
2. Soit $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{T}} \to \overline{\mathbb{R}}, A \Delta N \mapsto \mu(A)$, où $A \in \mathcal{T}$ et N est μ-négligeable. Montrer que $\overline{\mu}$ est une mesure sur $\overline{\mathcal{T}}$. On obtient un espace mesuré $(\Omega, \overline{\mathcal{T}}, \overline{\mu})$ appelé *l'espace mesuré μ-completé de* $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

Exercice 21 Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ au plus dénombrable ou } A^c \text{ au plus dénombrable }\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathcal{T} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
3. Conclure.

Exercice 22 On reprend la tribu $\mathcal{T}$ de l'exercice précédent et on restreint la mesure de comptage ν sur $\mathbb{R}$ à $\mathcal{T}$. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}, \nu)$ est un espace mesuré qui n'est pas σ-finie.

Exercice 23

1. Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, trouver la tribu et la classe monotone engendrés par $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.
2. Trouver une classe monotone qui n'est pas une tribu.

Exercice 24

1. Si $\Omega = \mathbb{N}$ trouver la classe monotone engendrée par $\mathcal{E} = \{\{1, n\} : n \geq 2\}$.
2. Trouver une classe monotone dénombrable qui n'est pas une tribu.