Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 Topologie et Thorie de la Mesure — 2023-2024

Feuille d'exercices numéro 6

Classes monotones et mesurabilit

Exercice 1 Si $\Omega = \{1, 2, 3\}$ trouver la tribu engendre par $\mathcal{E} = \{\{1\}\}$.

Exercice 2 En utilisant seulement $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\Big(\big\{]a, b[, a < b \in \mathbb{R}\big\}\Big)$, montrer que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\Big(\big\{]-\infty, a], a \in \mathbb{R}\big\}\Big) = \sigma\Big(\big\{[a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\big\}\Big).$$

1. En dduire que deux mesures μ, ν sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telles que $\mu(]-\infty, a]) = \nu(]-\infty, a]) < \infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ sont gales (i.e. $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu(A) = \nu(A)$).
2. Soient $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{E})$ et μ_1 et μ_2 des mesures sur $\mathcal{T}$ telles que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ pour tous $A \in \mathcal{E}$. Est-ce que $\mu_1 = \mu_2$?

Exercice 3 Prouver ou rfuter les assertions suivantes :

1. Une partie d'un ensemble ngligeable est ngligeable.
2. Une union au plus dnombrable d'ensembles ngligeables est ngligeable.
3. Une union d'ensembles ngligeables est ngligeable.

Thormes de Fubini et mesures produits

Exercice 4 Soit $f \geq 0$ une fonction mesurable positive μ une mesure σ-finie sur $(\Omega, \mathcal{T})$, montrer que pour $p \in]0, \infty[$:

$$\int f^p d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(\{\omega : f(\omega) > t\})dt.$$

Exercice 5 On considre le domaine $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ dlimit par les droites $y = 0$, $y = 1$, $y = 2 - x$ et $y = 1 + x$. Calculer $\displaystyle\iint_\Delta xydx\,dy$.

Exercice 6 Calculer $\displaystyle\iint_D (x + y)e^{-(x+y)}dxdy$, o

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x + y \leq 1\}.$$

Exercice 7 Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on pose

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les intgrales itres de f existent et sont gales.
2. La fonction f est-elle λ_2-intgrable sur $[-1,1]^2$?

Exercice 8 Soient ν la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$ et $\rho = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ la *mesure de Rademacher*. Soit $s(x,y) = x+y$ donnant une fonction $s : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$. Montrer que la mesure image par s de la mesure produit est $s_*(\nu \otimes \rho) = \nu$.

Exercice 9 Soit $D = [0,1]^2$. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$ et $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$.

Exercice 10 Soient f, g des fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $||f||_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\lambda(x)$. On dfinit la convolution de f, g par :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)d\lambda(y) \in [0, +\infty].$$

1. Montrer que $f * g$ est, mesurable et que $||f * g||_1 = ||f||_1 ||g||_1$.
2. Montrer que la dfinition de $f * g$ s'tend pour presque tout x aux $f, g \in L^1(\mathbb{R}, d\lambda)$, que $f * g \in L^1(\mathbb{R}, d\lambda)$ et $||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$.
3. Montrer que pour f, g, h toutes mesurables positives ou toutes intgrables, alors $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Changements de variables

Exercice 11 Soit $D = B((0,1),1)$ dans le plan. Calculer $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$.

Exercice 12 Soit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2+y^2) < 9\}$. Justifier que l'intgrale $\displaystyle\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/3}}\,dxdy$ est convergente et donner sa valeur.

Exercice 13 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2+y^2)^2 < xy\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$.

Exercice 14 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 - 2x < 0, x^2 - 2y < 0\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy$.
(Indication : poser $x = u^2 v$ et $y = uv^2$)

Exercice 15 On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. Calculer $J = \displaystyle\iint_{]0,+\infty[^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ en fonction de I. Calculer J en utilisant les coordonnes polaires. En dduire la valeur de I.

Exercice 16 Calculer l'intgrale $\displaystyle\iiint_D \frac{z}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$
o $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < x^2+y^2 < z^2 < 4\}$.

Exercice 17 Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < z < x^2+y^2 < 1\}$.
Justifier que l'intgrale $\displaystyle\iiint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ est convergente et donner sa valeur.

Exercices plus difficiles.

Exercice 18 Ensemble triadique de Cantor et escalier du diable Soit $\Omega = [0,1]$, muni de la restriction de la mesure de Lebesgue λ $\mathcal{B}([0,1])$.

Si $I = [a,b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, on note $\widetilde{I} = \left[a, \dfrac{2a+b}{3}\right] \cup \left[\dfrac{a+2b}{3}, b\right] \subset I$ l'union d'intervalles obtenu en retirant de I l'intervalle ouvert qui a le mme centre que I et dont la longueur est un tiers de celle de I.

On dfinit par rcurrence une suite d'ensembles $C_n \subset [0,1]$ (tous union finie d'intervalle ferms) et de fonctions croissantes linaires par morceau $F_n : [0,1] \to [0,1]$ par

— $C_0 = [0,1]$ et $F_0(x) = x$.

— Si C_n s'crit comme une union finie d'intervalles ferms deux deux disjoints : $C_n = \bigcup_{m=1}^{N} I_m$ avec $I_m = [a_m, b_m]$ alors C_{n+1} est dfini comme $C_n = \bigcup_{m=1}^{N} \widetilde{I_m}$ et

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} F_n(x) & \text{si} \quad x \notin C_n \\ \frac{F_n(a_m)+F_n(b_m)}{2} & \text{si} \quad x \in I_m - \widetilde{I_m} = \left]\frac{2a_m+b_m}{3}, \frac{a_m+2b_m}{3}\right[, \\ F_n(a_m) + (F_n(b_m) - F_n(a_m))\frac{3(x-a_m)}{2(b_m-a_m)} & \text{si} \quad x \in [a_m, \frac{2a_m+b_m}{3}], \\ F_n(b_m) - (F_n(b_m) - F_n(a_m))\frac{3(b_m-x)}{2(b_m-a_m)} & \text{si} \quad x \in [\frac{a_m+2b_m}{3}, b_m]. \end{cases}$$

1. Montrer que C_n est compact et vrifie $C_{n+1} \subset C_n$.
2. On pose $U_n = [0,1] - C_n$. Montrer que C_n est une union de 2^n intervalles compacts deux deux disjoints et U_n est union de $2^n - 1$ intervalles ouverts deux deux disjoints. Est-ce que C_n est borlien ?
3. Calculer $\lambda(C_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Posons $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$. Montrer que C est non vide et calculer $\lambda(C)$. C s'appelle *ensemble triadique de Cantor.*
5. Montrer que la formule $\phi(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2 1_A(n)}{3^{n+1}}$ dfinit une fonction injective $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to C$. En dduire que C est non-dnombrable.
6. Montrer que F_n est croissante pour tout n.
7. Montrer que F_n est lipschitzienne de constante $K \leq \frac{3^n}{2^n}$ et que pour tout $x \in [0,1]$,
$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq \frac{1}{3.2^{n+1}}$$
En dduire que F_n converge uniformment sur $[0,1]$ vers une fonction continue F.
8. Montrer que $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.
9. Posons $U = [0,1] - C$. Si $I \subset U$ est un intervalle ouvert, montrer que F est constante sur I.
10. En dduire que F est drivable sur U, n'est pas constante, mais que $F'(x) = 0$ pour λ-presque tout $x \in [0,1]$. F s'appelle *escalier du diable de Cantor.*

Exercice 19 Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesur et $\{x\} \in \mathcal{T}$ pour tous $x \in \Omega$. On dit que μ est *continue* si $\mu(\{x\}) = 0\}$ pour tout $x \in \Omega$ et on dit que μ est *discrte* s'il existe un ensemble D au plus dnombrable tel que $\mu(D^c) = 0$.

1. Montrer que l'quivalence des conditions suivantes :
   (a) μ est continue ;
   (b) si A est une partie au plus dnombrable de Ω alors $\mu(A) = 0$;
   (c) toute partie au plus dnombrable A de Ω est μ-ngligeable.
2. Montrer que μ est discrte si et seulement s'il existe une suite (a_n) de points de Ω et une suite $(c_n) \subset [0, \infty]$ telles que $\mu = \sum_n c_n \delta_{a_n}$.
3. Dcrire les espaces mesurs avec μ la fois discrte et continue.
4. $(\star)$ Supposons maintenant que μ est σ-finie. Montrer que μ s'crit de faon unique $\mu = \mu_c + \mu_d$, o μ_c est une mesure continue et μ_d est une mesure discrte.

Exercice 20 $(\star)$ Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesur et $\overline{\mathcal{T}} = \{A \Delta N : A \in \mathcal{T}, N\ \mu - \text{ngligeable}\}$.

1. Montrer que $\overline{\mathcal{T}}$ est une tribu. *C'est la tribu μ-complte de $\mathcal{T}$.*
2. Soit $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{T}} \to \overline{\mathbb{R}}, A\Delta N \mapsto \mu(A)$, o $A \in \mathcal{T}$ et N est μ-ngligeable. Montrer que $\overline{\mu}$ est une mesure sur $\overline{\mathcal{T}}$. On obtient un espace mesur $(\Omega, \overline{\mathcal{T}}, \overline{\mu})$ appel *l'espace mesur μ-complet de* $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

Exercice 21 Le but de cet exercice est de montrer qu'une runion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcment un ensemble mesurable. Soit

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ au plus dnombrable ou } A^c \text{ au plus dnombrable }\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathcal{T} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
3. Conclure.

Exercice 22 On reprend la tribu $\mathcal{T}$ de l'exercice prcdent et on restreint la mesure de comptage ν sur $\mathbb{R}$ $\mathcal{T}$. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}, \nu)$ est un espace mesur qui n'est pas σ-finie.

Exercice 23

1. Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, trouver la tribu et la classe monotone engendrs par $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.
2. Trouver une classe monotone qui n'est pas une tribu.

Exercice 24

1. Si $\Omega = \mathbb{N}$ trouver la classe monotone engendre par $\mathcal{E} = \{\{1, n\} : n \geq 2\}$.
2. Trouver une classe monotone dnombrable qui n'est pas une tribu.