Université Claude Bernard
L3 Topologie et Théorie de la Mesure

Mathématiques
2023-2024

Feuille d'exercices numéro 5

Intégration

Exercice 1 ($\star$) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes :

1. si $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{T}$ alors $\int f d\mu = \mu(A)$;
2. si $f = a1_A + b1_B$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathcal{T}$ alors $\int f d\mu = a\mu(A) + b\mu(B)$;
3. si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est mesurable et vérifie $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$ alors f est intégrable ;
4. si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est intégrable alors $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$;
5. si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est mesurable et vérifie $\int f d\mu = 0$ alors $f = 0$;
6. si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $\int f d\mu = 0$ alors $f = 0$ μ-p.p. ;
7. si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $f = 0$ μ-p.p. alors $\int f d\mu = 0$;
8. si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est mesurable et $\int_\Omega f d\mu < \infty$ alors $f < \infty$ μ-p.p.
9. le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f_n(x) = \begin{cases} x - n & \text{si } x \geq n \\ 0 & \text{si } x < n \end{cases}$$

Montrer que

1. chaque f_n admet une intégrale sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue. Est-elle intégrable ?
2. $f_n(x) \searrow 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
3. $\int f_n d\lambda$ ne converge pas vers $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n d\lambda$.

Théorèmes de convergence

Exercice 3

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x) \right) dx = \ln(2)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 4

1. Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$. Calculer $f(x)$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx < +\infty$.

En fonction de la valeur de α, déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx.$$

Exercice 6 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0,1] \to [0,+\infty[$ par $f_n(x) = (n+1)x^n$.

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\displaystyle\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Commenter ce résultat.

Exercice 7 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(\sin \pi x)^n}{1+x^2}$. Montrer que chaque fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$. Vérifier que la suite $\displaystyle\left(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite et déterminer cette limite.

Exercice 8 Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente et calculer sa somme $f(x)$.
2. Comparer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Expliquer.

Exercice 9 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions positives intégrables sur $\mathbb{R}$ convergente vers 0 presque partout.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n$ converge presque partout vers une fonction positive f intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n\right) d\lambda.$$

Intégrales à paramètres

Exercice 10 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Montrer que leurs *transformées de Fourier* $\hat{f}$ et $\hat{\mu}$ sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itx}dt, \quad \hat{\mu}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}d\mu(t)$$

Exercice 11 Soient $f(x) = (\int_0^x e^{-t^2}dt)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que f et g sont $\mathcal{C}^1$ et calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) + g'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en déduire la valeure de $f(x) + g(x)$.
3. En déduire que $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 12

On pose $F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(tx)dt$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est continûment dérivable. Donner une expression de $F'(x)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) + \frac{x}{2}F(x) = 0$

   En déduire que la fonction $G(x) = e^{\frac{x^2}{4}}F(x)$ est constante.
4. Donner l'expression de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ en utilisant le résultat de l'exercice 1.3
5. En déduire la transformée de Fourier d'une variable gaussienne standard

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}e^{itx}dt.$$

Exercice 13 On pose $F(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt$.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $]0, \infty[$
2. Montrer que F est continûment dérivable sur $]0, \infty[$.
3. Montrer que F est aussi bien définie en 0 comme intégrale de Riemann semi-convergente : $F(0) = \lim_{K\to\infty}\int_0^K \frac{\sin(t)}{t}dt$. (Indication : utiliser une intégration par partie).
4. Montrer que F est continue en 0. (Indication : il faut utiliser une méthode standard pour les intégrales semi-convergentes. On pourra décomposer $F(x) = F_0(x) + F_1(x)$ pour les intégrales sur $]0, 1],]1, +\infty[$, et utiliser une intégration par partie $v'(t) = \sin(t), u(t) = e^{-tx}/t$ sur F_1 pour obtenir la formule alternative suivante :

$$F_0(x) = \int_0^1 e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt, \qquad F_1(x) = \int_1^\infty e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt = e^{-x}\cos(1) + \int_1^\infty (xt+1)e^{-tx}\frac{\cos(t)}{t^2}dt.)$$

Exercice 14 Pour $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-x/t}\,dt$.

Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que $\varphi''(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ pour $x > 0$.

Exercices supplémentaires

Exercice 15 Calculer $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^x}{1+x^n}dx$, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx$ et $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{|x|}{n})dx$.

Exercice 16 Calculer $\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$ et $\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$.

Exercice 17 Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\sin(x)\right)^n dx$ et $\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3}\, dx$.

Exercice 18 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $f_n : [0,1] \to [0,+\infty[$ par $f_n(x) = n(1-x)^n \sin^2(nx)$.

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On notera cette limite simple f.
2. Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \sin^2(x)dx.$$
3. Vérifier que pour tout $x \geq 0$, on a $1-x \leq e^{-x}$.
4. En déduire que la suite $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx.$$
6. Calculer $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 19 On pose $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\, dx$ pour $\alpha \geq 0$.

1. Montrer que $0 \leq I(\alpha) < +\infty$ pour tout $\alpha \geq 0$.
2. Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale.
3. Montrer que I est continue en 0.
4. (a) Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.
   (b) En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.
   (c) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.