

Feuille d'exercices numéro 6

Mesures et mesurabilité : (suite)

Exercice 1 Si $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ trouver la tribu engendrée par $\mathcal{E} = \{\{3\}\}$ puis par $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$.

1. Pour $\mathcal{E} = \{A\}$, avec $A = \{0, 1, 2\}$, on a vu en cours $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$
2. Pour $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$, on note $A = \{0\}, B = \{1, 2\}, C = \{3\}$ forme une partition et $A \in \sigma(\{\{1, 2\}, \{3\}\})$ car $A = (B \cup C)^c$. Donc $\sigma(\{\{1, 2\}, \{3\}\}) = \sigma(\{A, B, C\})$. Par le cours, pour une partition finie, la tribu engendrée est formée des unions finies : donc

$$\sigma(\{A, B, C\}) = \{\emptyset, A, B, C, A \cup B, C \cup B, A \cup C, \Omega\}.$$

Exercice 2

(cf. TD)

Exercice 3

(cf. TD)

Exercice 4

(cf. TD)

Exercice 5

1. VRAI, Par définition A est négligeable si il existe B mesurable avec $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$. Si maintenant $A' \subset A$, on a aussi $A' \subset B$ et $\mu(B) = 0$ donc A' est négligeable.
2. VRAI, Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'ensembles négligeables, alors $A_n \subset B_n$ avec B_n mesurable et $\mu(B_n) = 0$. Or une tribu est stable par union dénombrable, donc $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ est mesurable et par sous-additivité de la mesure : $\mu(B) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) = 0$ donc comme $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subset B$, on déduit que A est négligeable.
3. FAUX : tout ensemble est union de singletons, par exemple $[0, 1] = \bigcup_{x \in [0, 1]} \{x\}$ et $\lambda(\{x\}) = 0$ donc $\{x\}$ négligeable pour la mesure de Lebesgue, mais $\lambda([0, 1]) = 1$ donc $[0, 1]$ n'est pas négligeable.

Théorèmes de Fubini et mesures produits

Exercice 6 Soit $f \geq 0$ une fonction mesurable positive μ une mesure σ -finie sur (Ω, \mathcal{T}) , montrer que pour $p \in]0, \infty[$:

$$\int f^p d\mu = \int_0^{\infty} p t^{p-1} \mu(\{\omega : f(\omega) > t\}) dt.$$

(cf TD)

ou Correction de 2021-2022 exercice 6

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_13:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 7

(cf TD)

ou Correction de 2021-2022 exercice 7

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_13:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 8 (cf TD)

ou Correction de 2021-2022 exercice 8

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_13:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 9

(cf. TD)

Exercice 10 cf. TD

Exercice 11 Soit $D = B((0, 1), 1)$ dans le plan. Calculer $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$.

cf. TD ou Correction de 2021-2022 exercice 14

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_13:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf

Espaces L^p

Exercice 12 cf. TD

Exercice 13 cf. TD

Exercice 14 cf. TD

Exercice 15 cf. TD

Exercices supplémentaires.

Exercice 16

Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on pose

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrons que les intégrales itérées de f existent et sont égales.

f est continue en dehors de $(0, 0)$ et vu que $f(x, 0) = f(0, y) = 0$, on a $y \mapsto f(x_0, y)$ et $x \mapsto f(x, y_0)$ sont continues pour chaque x_0, y_0 fixés, donc boréliennes, on a donc la mesurabilité requise pour parler des intégrales itérées.

Soit $y \neq 0$, on a $|f(x, y)| \leq 1/y^2$, ce qui est une domination par une constante intégrable pour la mesure de Lebesgue sur un intervalle borné $[-1, 1]$ donc $\int_{-1}^1 f(x, y)dx$ est bien définie. De plus par imparité (ou changement de variable $z = -x$, on obtient : $\int_{-1}^1 f(x, y)dx = 0$ pour tout $y \neq 0$. Comme $f(x, 0) = 0$, cela est aussi valable pour $y = 0$. La fonction $y \mapsto \int_{-1}^1 f(x, y)dx = 0$ est continue et manifestement intégrable et on obtient :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y)dx dy = \int_{-1}^1 0 dy = 0.$$

En intervertissant x et y dans l'argument (vu $f(x, y) = f(y, x)$, on voit que

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y)dy dx = \int_{-1}^1 0 dx = 0.$$

La conclusion du théorème de Fubini s'applique donc, bien qu'on va maintenant voir que ce théorème ne s'applique pas.

2. Montrons que la fonction f n'est PAS λ_2 -intégrable sur $[-1, 1]^2$. Pour cela on va minorer son intégrale par celle sur $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq 0\}$ (car si on s'attend à une valeur infini, et que le problème soit en $(0, 0)$, autant prendre un domaine facile pour les coordonnées polaires et autant éviter $x = 0$ ou $y = 0$ pour faciliter la continuité) par changement de variable en polaire. Comme les fonctions sont positives, il suffit de vérifier qu'elles sont mesurables pour appliquer le changement de variable, mais f est continue sur D comme fraction rationnelle à dénominateur non nul. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{[-1, 1]^2} |f(x, y)| d\lambda_2(x, y) &\geq \int_D |f(x, y)| d\lambda_2(x, y) = \int_0^1 dr \int_{]0, 2\pi[-\{\pi\}} \frac{r^2}{r^4} |\cos(\theta) \sin(\theta)| d\theta \\ &= \int_{]0, 2\pi[} |\cos(\theta) \sin(\theta)| d\theta \int_0^1 dr \frac{1}{r^2} = +\infty. \end{aligned}$$

En effet, par les intégrales de Riemann, $\frac{1}{r^2}$ n'est pas intégrable en 0, et peu importe la valeur de l'intégrale en θ , elle est strictement positive par intégrale d'une fonction positive non-nulle (continue donc non λ -p.p. nulle) sur un ensemble de mesure non-nulle (la longueur 2π de l'intervalle).

Exercice 17 cf Correction de 2021-2022 exercice 12

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_13:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 18 Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2) < 9\}$. Justifier que l'intégrale $\iint_B \frac{1}{(x^2 + y^2)^{2/3}} dx dy$ est convergente et donner sa valeur.

On passe en coordonnées polaires (dans le cas positif pour une fonction continue sur $B - [0, +\infty] \times \{0\}$ donc mesurable) en remarquant que, vu que $\lambda_2([0, +\infty] \times \{0\}) = 0$, on a

$$\iint_B \frac{1}{(x^2 + y^2)^{2/3}} dx dy = \iint_{B - [0, +\infty] \times \{0\}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{2/3}} dx dy = 2\pi \int_0^9 \frac{1}{r^{1/3}} dr = 2\pi \left[\frac{3r^{2/3}}{2} \right]_0^9 = 3(9)^{2/3} = 3^{7/3}$$

par le cas convergent des intégrales de Riemann.

Exercice 19

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 < xy\}$. Calculons $I = \iint_D \sqrt{xy} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} 1_D(x, y) \sqrt{xy} d\lambda_2(x, y)$ qui est l'intégrale d'une fonction positive. On remarque $D = D_+ \cup D_-$ avec $D_{\pm} = \{(x, y) \in D : \pm x > 0\}$. De plus avec le changement de variable $(x', y') = (-x, -y)$, il est facile de voir

$$\iint_{\mathbb{R}^2} 1_{D_+}(x, y) \sqrt{xy} d\lambda_2(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} 1_{D_-}(x, y) \sqrt{xy} d\lambda_2(x, y)$$

On a aussi une symétrie, donc par changement de variable $(x', y') = (y, x)$, on obtient pour $C = D \cap B$, $B = \{(x, y) \in D : y > x > 0\}$ que

$$I = \iint_D \sqrt{xy} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} 1_D(x, y) \sqrt{xy} d\lambda_2(x, y) = 4 \iint_{\mathbb{R}^2} 1_C(x, y) \sqrt{xy} d\lambda_2(x, y).$$

On pose $\phi(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ et si $(z, t) = (x^2 + y^2, 2xy)$ on a $z - t = (y - x)^2$, $z + t = (x + y)^2$, donc on a $\phi : B \rightarrow E = \{(z, t) : z - t > 0, t > 0\}$, et on déduit que $y - x = \sqrt{z - t}$, $x + y = \sqrt{z + t}$ (vu $y - x > 0$ sur C) d'où l'unique $(x, y) \in C$ vérifiant cela est donné par

$$\psi(z, t) = \left(\frac{\sqrt{z + t} - \sqrt{z - t}}{2}, \frac{\sqrt{z + t} + \sqrt{z - t}}{2} \right)$$

Ceci montre que ϕ est bijective d'inverse $\psi : E \rightarrow B$.

De plus, ϕ est clairement C^∞ (car polynomiale), on calcule son jacobien :

$$J\phi(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

d'où $\det(J\phi(x, y)) = 4x^2 - 4y^2 < 0$ sur C (donc non-nulle ce qui implique que $J\phi(x, y)$ est un isomorphisme linéaire pour tout $(x, y) \in C$). Par le théorème d'inversion globale, ϕ est donc un C^∞ -difféomorphisme et on déduit que $\det(J\psi(z, t)) = \frac{1}{4(\psi_1(z, t)^2 - \psi_2(z, t)^2)} = \frac{-1}{4(\sqrt{z + t}\sqrt{z - t})}$.

On peut donc appliquer le théorème de changement de variable :

$$I = 4 \iint_B 1_D(x, y) \sqrt{xy} d\lambda_2(x, y) = \iint_E 1_D \circ \psi(z, t) \sqrt{t} \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{z^2 - t^2})} d\lambda_2(z, t).$$

Cela suggère un autre changement de variable (polaire hyperbolique) : $z = r\text{ch}(\theta)$, $t = r\text{sh}(\theta)$, de sorte que $z^2 - t^2 = r^2$. On pose donc $\varphi(r, \theta) = (r\text{ch}(\theta), r\text{sh}(\theta))$ qui définit $\varphi :]0, +\infty[^2 \rightarrow E = \{(z, t) : z > t > 0\}$ et $z = r\text{ch}(\theta)$, $t = r\text{sh}(\theta)$, se résoud en $r = \sqrt{z^2 - t^2}$, $\theta = \text{argsh}\left(\frac{t}{r}\right)$ vu que le sinus hyperbolique est strictement croissant bijectif. Cela montre donc que φ est bijective.

De plus, φ est clairement C^∞ (par produit et sommes de projections et d'exponentielles), on calcule son jacobien :

$$J\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \text{ch}(\theta) & r\text{sh}(\theta) \\ \text{sh}(\theta) & r\text{ch}(\theta) \end{pmatrix}$$

donc $\det(J\varphi(x, y)) = r\text{ch}^2(\theta) - r\text{sh}^2(\theta) = r > 0$ sur son domaine, donc par par théorème d'inversion globale, φ est un C^∞ -difféomorphisme. Le cas positif du changement de variable donne donc :

$$I = \iint_E 1_{[0, t]}(z^2) \sqrt{t} \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{z^2 - t^2})} d\lambda_2(z, t) = \iint_{]0, +\infty[^2} 1_{[0, r\text{sh}(\theta)]}(r^2\text{ch}(\theta)^2) \sqrt{r\text{sh}(\theta)} \frac{1}{\sqrt{2}r} rd\lambda_2(r, \theta)$$

Maintenant $1_{[0, r\text{sh}(\theta)]}(r^2\text{ch}(\theta)^2) = 1$ pour $r\text{ch}(\theta)^2 \leq \text{sh}(\theta)$ soit $r \leq \frac{\text{sh}(\theta)}{\text{ch}(\theta)^2}$. En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli au produit d'une fonction continue positive et d'une indicatrice d'ensemble mesurable, on obtient :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{]0, +\infty[} d\theta \sqrt{\text{sh}(\theta)} \int_0^{\frac{\text{sh}(\theta)}{\text{ch}(\theta)^2}} \sqrt{r} dr = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_{]0, +\infty[} d\theta \sqrt{\text{sh}(\theta)} \left(\frac{\text{sh}(\theta)}{\text{ch}(\theta)^2}\right)^{3/2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(\theta)^2}{\text{ch}(\theta)^4} \text{ch}(\theta) d\theta$$

Par dernier changement de variable $x = \text{sh}(\theta)$, $dx = \text{ch}(\theta)d\theta$ on obtient (vu $\text{ch}(\theta)^2 = 1 + \text{sh}(\theta)^2$)

$$I = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Par ailleurs, avec $y = 1/x$, $dx = -dy/y^2$, on obtient :

$$I = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + 1/x^2)^2} \frac{dx}{x^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + y)^2} dy$$

donc en combinant à la précédente égalité : $\frac{2\sqrt{2}}{3} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)^2} dy = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)} dx$ soit :

$$I = \frac{1}{3\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)^2} dy = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{1+y}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Exercice 20 Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 2x < 0, x^2 - 2y < 0\}$. Calculer $\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}} dx dy$.

On définit $(x, y) = \phi(u, v) = (u^2v, uv^2)$. $\phi :]0, +\infty[^2 \rightarrow]0, +\infty[^2$ est polynomiale donc C^∞ . $x = u^2v$, $y = uv^2$ implique $y^2/x = u^2v^4/(u^2v) = v^3$, $u^3 = x^2/y$ donc, comme le cube est une bijection, on obtient l'unique solution :

$$(u, v) = \left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}, \sqrt[3]{\frac{y^2}{x}} \right)$$

on voit facilement que c'est bien une solution donc ϕ est bijective. De plus

$$J\phi(u, v) = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix}$$

d'où $\det(J\phi(u, v)) = 4u^2v^2 - u^2v^2 = 3u^2v^2 > 0$ d'où $d\phi(u, v)$ est un isomorphisme linéaire et le théorème d'inversion globale s'applique montrant que ϕ est un C^∞ -difféomorphisme.

On peut donc appliquer le théorème de changement de variable dans le cas positif à $(x, y) \mapsto 1_D(x, y)e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}$ (produit de continue donc borélienne, et d'une indicatrice d'ouvert) :

$$\begin{aligned} I &= \int_{]0, +\infty[^2} 1_D(x, y)e^{\frac{x^3+y^3}{xy}} d\lambda_2(x, y) = \int_{]0, +\infty[^2} 1_D(\phi(u, v))e^{\frac{(u^2v)^3+(uv^2)^3}{u^3v^3}} \det(J\phi(u, v)) d\lambda_2(u, v) \\ &= \int_{]0, +\infty[} du \int_{]0, +\infty[} dv 1_{]0, \sqrt[3]{2}[}(u) 1_{]0, \sqrt[3]{2}[}(v) e^{u^3+v^3} 3u^2v^2 \end{aligned}$$

avec la dernière égalité utilisant aussi Fubini-Tonelli et $1_D(\phi(u, v)) = 1_{]0, \sqrt[3]{2}[}(u) 1_{]0, \sqrt[3]{2}[}(v)$ car les deux valent 1 si et seulement si $u^2v^4 < 2u^2v, v^2u^4 < 2v^2u$ soit $v^3 < 2, u^3 < 2$. Bilan, on obtient donc

$$I = 3 \left(\int_{]0, +\infty[} dv 1_{]0, \sqrt[3]{2}[}(v) e^{v^3} v^2 \right)^2 = 3 \left(\left[\frac{e^{v^3}}{3} \right]_0^{\sqrt[3]{2}} \right)^2 = \frac{(e^2 - 1)^2}{3}.$$

Exercice 21 cf Correction de 2021-2022 exercice 16

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_13:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 22 Calculer l'intégrale $\iiint_D \frac{z}{x^2 + y^2} dx dy dz$

où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 < z^2 < 4\}$. Comme z , n'est pas positif, on doit montrer l'intégrabilité, ce pourquoi on considère d'abord l'intégrale avec $|z|$ à la place de z .

On passe juste en coordonnées polaires sur $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ (avec le z inchangé, on parle parfois de coordonnées cylindriques). Comme $1_D(x, y, z) \frac{z}{x^2+y^2}$ est borélienne comme produit d'une fraction rationnelle à dénominateur non nulle (donc une fonction continue) et d'une indicatrice d'ensemble ouvert. On obtient (en utilisant aussi que $[0, +\infty[\times \{0\}^2$ est de mesure nulle pour λ_3)

$$J = \iiint_{\mathbb{R}^3 - [0, +\infty[\times \{0\}^2} 1_D(x, y, z) \frac{|z|}{x^2 + y^2} d\lambda_3(x, y, z) = \iiint_{]0, 2\pi[\times]0, +\infty[\times \mathbb{R}} \frac{|z|}{r^2} r 1_D(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) d\lambda_3(\theta, r, z)$$

Or $1_D(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) = 1$ si et seulement si $1 < r^2 < z^2 < 4$ si et seulement si $1_{]1, |z|[}(r) 1_{]1, 2[}(|z|) = 1$ d'où, en utilisant aussi Fubini-Tonelli pour passer à des intégrales simples :

$$J = 2\pi \int_{\mathbb{R}} dz 1_{]1, 2[}(|z|) |z| \int_{]0, +\infty[} dr \frac{1}{r} 1_{]1, |z|[}(r) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} dz 1_{]1, 2[}(|z|) |z| [\ln(r)]_1^{|z|} = 4\pi \int_1^2 dz z \ln(z).$$

où on a utilisé que l'intégrale sur $|z| \in]1, 2[$ revient à 2 fois l'intégrale sur $]1, 2[$. Sans même calculer l'intégrale, en remarquant juste que la fonction est continue bornée par $2 \ln(2)$, on obtient $J \leq 8\pi \ln(2) < +\infty$. La fonction de départ est donc intégrable. On pourrait reprendre le même calcul, mais vu la remarque sur la symétrie du domaine de z , il vaut mieux utiliser un argument d'imparité. On fait donc le changement de variable $t = -z$ dans le cas intégrable (de déterminant du jacobien -1 et on obtient :

$$I = \iiint_D \frac{z}{x^2 + y^2} dx dy dz = \iiint_D \frac{-t}{x^2 + y^2} dx dy dt = -I = 0.$$

Exercice 23 Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < x^2 + y^2 < 1\}$.

Justifier que l'intégrale $I = \iiint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy dz$ est convergente et donner sa valeur.

Comme $\ln(x^2 + y^2)$ négatif sur D , on va calculer avec une valeur absolue, mais l'intégrale voulue sera juste l'opposée. On fait le même changement de variable en cylindrique qu'à l'exercice précédent (toujours appliqué au produit d'une fonction continue et d'une indicatrice d'ouvert, donc une fonction borélienne) en remarquant que $1_D(x, y, z) = 1_{]0, r[}(z)1_{]0, 1[}(r)$ puis en appliquant Fubini-Tonelli pour passer à des intégrales simples :

$$\begin{aligned} -I &= \int_{\mathbb{R}^3_{-[0, +\infty[\times \{0\}^2}} 1_D(x, y, z) |\ln(x^2 + y^2)| d\lambda_3(x, y, z) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dr r 1_{]0, 1[}(r) 2 |\ln(r)| \int_0^{+\infty} dz 1_{]0, r[}(z) \\ &= 4\pi \int_0^1 dr r^2 |\ln(r)| = 4\pi \int_0^{+\infty} du e^{-3u} u = 4\pi \left[-\frac{e^{-3u}u}{3} - \frac{e^{-3u}}{9} \right]_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{9} \end{aligned}$$

où la dernière ligne vient d'un changement de variable $u = -\ln(r)$ d'où $du = \frac{dr}{r}$. On en déduit que I est convergente et vaut $I = -\frac{4\pi}{9}$.

Exercices plus difficiles.

Exercice 24 Ensemble triadique de Cantor et escalier du diable Soit $\Omega = [0, 1]$, muni de la restriction de la mesure de Lebesgue λ à $\mathcal{B}([0, 1])$.

Si $I = [a, b]$ est un intervalle compact de \mathbb{R} , on note $\tilde{I} = \left[a, \frac{2a+b}{3} \right] \cup \left[\frac{a+2b}{3}, b \right] \subset I$ l'union d'intervalles obtenu en retirant de I l'intervalle ouvert qui a le même centre que I et dont la longueur est un tiers de celle de I .

On définit par récurrence une suite d'ensembles $C_n \subset [0, 1]$ (tous union finie d'intervalle fermés) et de fonctions croissantes linéaires par morceau $F_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ par

— $C_0 = [0, 1]$ et $F_0(x) = x$.

— Si C_n s'écrit comme une union finie d'intervalles fermés deux à deux disjoints : $C_n = \bigcup_{m=1}^N I_m$

avec $I_m = [a_m, b_m]$ alors C_{n+1} est défini comme $C_{n+1} = \bigcup_{m=1}^N \tilde{I}_m$ et

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} F_n(x) & \text{si } x \notin C_n \\ \frac{F_n(a_m) + F_n(b_m)}{2} & \text{si } x \in I_m - \tilde{I}_m = \left] \frac{2a_m+b_m}{3}, \frac{a_m+2b_m}{3} \right[, \\ F_n(a_m) + (F_n(b_m) - F_n(a_m)) \frac{3(x-a_m)}{2(b_m-a_m)} & \text{si } x \in \left[a_m, \frac{2a_m+b_m}{3} \right] , \\ F_n(b_m) - (F_n(b_m) - F_n(a_m)) \frac{3(b_m-x)}{2(b_m-a_m)} & \text{si } x \in \left[\frac{a_m+2b_m}{3}, b_m \right] . \end{cases}$$

1. Montrer que C_n est compact et vérifie $C_{n+1} \subset C_n$.

Solution :

Par récurrence, on initialise à C_0 compact. Par construction, $\tilde{I} \subset I$, donc $C_{n+1} = \bigcup_{m=1}^N \tilde{I}_m \subset$

$\bigcup_{m=1}^N I_m = C_n$. Enfin, chaque \tilde{I}_m est une union de 2 intervalles fermés donc C_{n+1} est une union de $2N$ intervalles fermés, donc un fermé, du compact C_0 , donc lui-même un compact.

2. On pose $U_n = [0, 1] - C_n$. Montrer que C_n est une union de 2^n intervalles compacts deux à deux disjoints et U_n est union de $2^n - 1$ intervalles ouverts deux à deux disjoints. Est-ce que C_n est borélien ?

Solution : On montre cela par induction sur n . Pour $n = 0$, U_0 est vide donc l'union de 0 intervalle disjoint, et $C_0 = [0, 1]$ est un intervalle.

Si le résultat est montré au rang n , on a $C_n = \bigcup_{m=1}^N I_m$ est l'union de $N = 2^n$ intervalles compacts

dijoint. Alors les \tilde{I}_m sont disjoints, et chacun l'union de 2 intervalles compacts disjoints, leur union est union de $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ intervalles compacts disjoints. Enfin, $U_{n+1} = U_n \cup \bigcup_{m=1}^N I_m - \tilde{I}_m$ et $I_m - \tilde{I}_m$ est un intervalle ouvert, disjoints entre eux et de U_n donc U_{n+1} s'écrit comme l'union de $N + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$ intervalles ouverts disjoints, CQFD.

De plus C_n étant un fermé est bien un borélien.

3. Calculer $\lambda(C_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. **Solution :** De nouveau par récurrence, on obtient une formule $\lambda(C_0) = 1$ et par additivité de la mesure de Lebesgue :

$$\lambda(C_{n+1}) = \sum_{m=1}^N \lambda(\tilde{I}_m) = \frac{2}{3} \sum_{m=1}^N \lambda(I_m) = \frac{2}{3} \lambda(C_n) = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}.$$

4. Posons $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$. Montrer que C est non vide et calculer $\lambda(C)$. C s'appelle *ensemble triadique de Cantor*.

Solution : Par intersection décroissante, on a $\lambda(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(C_n) = 0$. De plus, on a par une récurrence immédiate $0 \in C_n$ vu que \tilde{I} contient toujours le minimum de I , donc $0 \in C$ qui est non-vide.

5. Montrer que la formule $\phi(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{21_A(n)}{3^{n+1}}$ définit une fonction injective $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow C$. En déduire que C est non-dénombrable.

Solution : Posons $\phi_N(a) = \sum_{n=0}^N \frac{21_A(n)}{3^{n+1}}$.

Tout d'abord l'injectivité de ϕ est facile car on montre par récurrence sur n que pour $1_A(n)$ se retrouve comme un digit du développement en base 3, précisément, en formule,

$$1_A(n) = \left\lfloor \frac{3^{n+1}}{2} (\phi(A) - \phi_{n-1}(A)) \right\rfloor$$

vu que $\phi(A) - \phi_{n-1}(A) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{21_A(k)}{3^{k+1}}$ et que $\frac{3^{n+1}}{2} (\phi(A) - \phi_{n-1}(A)) = 1_A(n) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{21_A(k+n)}{3^k}$ de sorte que la somme est dans $[0, 1/2]$. Donc par recurrence on voit que $1_A(n)$ est déterminée par $\phi(A)$ donc toutes ses valeurs de 1_A le sont, et donc A est déterminée (donc en particulier $\phi(A) = \phi(B)$ implique $1_A = 1_B$ soit $A = B$).

On montre par récurrence sur n que $\phi(A) \in C_n$ et aussi $\phi_k(A) \in C_n$ pour $k \geq n$. Le cas $n = 0$ est évident car la série est à termes positifs, bornée par $\phi(A) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \frac{1}{1-1/3} = 1$ en utilisant la série géométrique. Donc $\phi(A) \in [0, 1]$. On montre de même $\phi_k(A) \in [0, 1]$.

Par l'hypothèse de récurrence, au rang n , on sait que $\phi_{n-1}(A) \in C_{n-1}$ et **A finir**

6. Montrer que F_n est croissante pour tout n .*

Solution : On le voit la récurrence en montrant en même temps qu'elle est continue. C'est évident pour F_0 . Au rang $n + 1$, l'expression par morceau montre que F_{n+1} est croissante sur chaque intervalle de définition (pente positive du coefficient directeur des fonctions affines), y compris sur chaque intervalle de U_n vu qu'on sait déjà que F_n est croissante. En voyant les limites à droite et à gauche, la continuité sur les $[a_m, b_m]$ est facile, et la continuité en a_m, b_m vient de celle de F_n en dehors du segment, et des limites respectives $F_n(a_m), F_n(b_m)$ des formules affines. Comme on a vu la continuité, la croissance se déduit de celle sur chaque intervalle fermé des C_n et de $\overline{U_n}$ ce qu'on vient de vérifier et ce qui conclut.

7. Montrer que F_n est lipschitzienne de constante $K_n \leq \frac{3^n}{2^n}$ et que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq \frac{1}{3 \cdot 2^{n+1}}$$

En déduire que F_n converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction continue F .

Solution : De nouveau, on montre F_n lipschitzienne par récurrence sur n . F_0 est clairement 1-Lipchitz.

En supposant montrer le rang n , il suffit de montrer que $|F_{n+1}(x) - F_{n+1}(y)| \leq K_{n+1}|x - y|$ sur chaque intervalle de définition. EN effet si on connaît sur $[x, c]$ et $[c, y]$, on obtient

$$|F_{n+1}(x) - F_{n+1}(y)| \leq |F_{n+1}(x) - F_{n+1}(c)| + |F_{n+1}(c) - F_{n+1}(y)| \leq K_{n+1}|x - c| + K_{n+1}|c - y| = K_{n+1}|x - y|,$$

et on rassemble ainsi les inégalités sur des unions d'intervalles.

Donc on obtient

$$K_{n+1} = \max(K_n, 0, (F_n(b_m) - F_n(a_m)) \frac{3}{2(b_m - a_m)}) \leq \max(K_n, \frac{3}{2} K_n) \leq \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}$$

Ensuite, on montre la borne sur $F_{n+1} - F_n$ au cas par cas selon les cas de définition de F_{n+1} ainsi en se basant sur le fait que sur $I_m = [a_m, b_m]$, F_n est linéaire donc $F_n(x) = F_n(a_m) + \frac{(x-a_m)}{b_m-a_m}(F_n(b_m) - F_n(a_m))$:

$$F_{n+1}(x) - F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin C_n \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{(x-a_m)}{b_m-a_m}\right)(F_n(b_m) - F_n(a_m)) & \text{si } x \in I_m - \widetilde{I}_m = \left] \frac{2a_m+b_m}{3}, \frac{a_m+2b_m}{3} \right[\\ (F_n(b_m) - F_n(a_m)) \frac{(x-a_m)}{2(b_m-a_m)} & \text{si } x \in [a_m, \frac{2a_m+b_m}{3}] \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{(x-a_m)}{2(b_m-a_m)}\right)(F_n(b_m) - F_n(a_m)) & \text{si } x \in [\frac{a_m+2b_m}{3}, b_m]. \end{cases}$$

En utilisant la borne de Lipschitz déjà obtenu, on obtient donc (vu que la longueur des intervalle de C_n est constante, on obtient en divisant la longueur totale du 3 par le nombre

d'intervalle du 2 : $(b_m - a_m) = \lambda(C_n) \frac{1}{2^n} = \frac{1}{3^n}$

$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin C_r \\ \left| x - \frac{(a_m+b_m)}{2} \right| K_n \leq \frac{3^n}{6 \cdot 2^n} (b_m - a_m) \leq \frac{1}{6 \cdot 2^n} & \text{si } x \in I_m - \widetilde{I}_m = \left] \frac{2a_m+b_m}{3}, \frac{a_m+2b_m}{3} \right[\\ \left| \frac{(x-a_m)}{2} \right| K_n \leq \frac{3^n}{3 \cdot 2^n} (b_m - a_m) \leq \frac{1}{6 \cdot 2^n} & \text{si } x \in \left[a_m, \frac{2a_m+b_m}{3} \right[\\ \left| \frac{(x-b_m)}{2} \right| K_n \leq \frac{3^n}{3 \cdot 2^n} (b_m - a_m) \leq \frac{1}{6 \cdot 2^n} & \text{si } x \in \left] \frac{a_m+2b_m}{3}, b_m \right[\end{cases}$$

Ceci donne dans tous les cas la borne annoncée. ON en déduit donc que $\sum_n \|F_{n+1} - F_n\|_\infty$ converge, donc la série télescopique $\sum_n (F_{n+1} - F_n)$ converge normalement donc uniformément. En particulier, aussi la suite F_n de fonctions continues, converge uniformément, donc sa limite F est continue.

8. Montrer que $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.

Solution : C'est évident car pour tout n : $F_n(0) = 0$ et $F_n(1) = 1$.

9. Posons $U = [0, 1] - C$. Si $I \subset U$ est un intervalle ouvert, montrer que F est constante sur I .

Solution : C'est facile, car $U = \cup_n U_n$ et F_n est constante sur chaque intervalle de U_n , puis F_m pour $m \geq n$ n'est pas modifiée, donc $F = F_n$ sur U_n est donc aussi constante sur chaque intervalle de U_n . En prenant l'union, on en déduit que F est constante sur les intervalles de U .

10. En déduire que F est dérivable sur U , n'est pas constante, mais que $F'(x) = 0$ pour λ -presque tout $x \in [0, 1]$. F s'appelle *escalier du diable de Cantor*.

Solution : Une fonction constante est dérivable de dérivée nulle, donc c'est le cas de F sur chaque intervalle ouvert de U , donc F est dérivable sur U de dérivée nulle. Or $\lambda(U) = 1 - \lambda(C) = 1$, donc c'est le cas pour λ -presque tout $x \in [0, 1]$. Enfin, vu $F(0) < F(1)$, F n'est pas constante!