Feuille d'exercices numéro 6

Mesures et mesurabilité : (suite)

Exercice 1 Si $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ trouver la tribu engendrée par $\mathcal{E} = \{\{3\}\}$ puis par $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$.

Exercice 2 En utilisant seulement $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\Big(\{]a, b[, a < b \in \mathbb{R}\}\Big)$, montrer que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\Big(\{]-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}\Big) = \sigma\Big(\{[a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\}\Big).$$

1. En déduire que deux mesures μ, ν sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telles que $\mu(]-\infty, a]) = \nu(]-\infty, a]) < \infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ sont égales (i.e. $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu(A) = \nu(A)$).
2. Soient $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{E})$ et μ_1 et μ_2 des mesures sur $\mathcal{T}$ telles que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ pour tous $A \in \mathcal{E}$. Est-ce que $\mu_1 = \mu_2$?

Exercice 3 Mesure de Dirac

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable quelconque et soit $x \in \Omega$. Pour tout $A \in \mathcal{T}$ on pose

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que δ_x est une mesure de probabilité.

Exercice 4 Mesure discrètes

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace mesurable avec Ω au plus dénombrable. On fixe une famille de nombres $(\mu_\omega)_{\omega\in\Omega} \in [0, +\infty]^\Omega$. On définit pour $A \subset \Omega$:

$$\mu(A) = \sum_{\omega\in A} \mu_\omega.$$

1. Montrer que μ est une mesure sur Ω.
2. Montrer que μ est une mesure finie (c'est à dire $\mu(\Omega) < +\infty$) si et seulement si la famille $(\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est sommable.
3. Montrer que $\mu = \sum_{\omega\in\Omega} \mu_\omega \delta_\omega$.
4. Pour $h : \Omega \to [0, +\infty]$, montrer que

$$\int_\Omega h d\mu = \sum_{\omega\in A} h(\omega)\mu_\omega.$$

Exercice 5 Une mesure image

Soit $\Omega = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 1_{[0,2/3]}(x) + 1_{[0,1/3]}(x).$$

Montrer que f est borélienne, puis calculer la mesure image λ_f de λ par f. Rappel : c'est la mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ définie par $\lambda_f(B) = \lambda(f^{-1}(B))$.

Exercice 6 Prouver ou réfuter les assertions suivantes :

1. Une partie d'un ensemble négligeable est négligeable.
2. Une union au plus dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.
3. Une union d'ensembles négligeables est négligeable.

Théorèmes de Fubini et Changements de variables

Exercice 7 Soit $f \geq 0$ une fonction mesurable positive μ une mesure σ−finie sur $(\Omega, \mathcal{T})$, montrer que pour $p \in]0, \infty[$:

$$\int f^p d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(\{\omega : f(\omega) > t\})dt.$$

Exercice 8 On considère le domaine $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ délimité par les droites $y = 0$, $y = 1$, $y = 2 - x$ et $y = 1 + x$. Calculer $\iint_\Delta xy dx\, dy$.

Exercice 9

Calculer $\iint_D (x + y)e^{-(x+y)} dxdy$, où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x + y \leq 1\}.$$

Exercice 10 Soient ν la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$ et $\rho = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ la **mesure de Rademacher**. Soit $s(x, y) = x + y$ donnant une fonction $s : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$. Montrer que la mesure image par s de la mesure produit est $s_*(\nu \otimes \rho) = \nu$.

Exercice 11 Soient f, g des fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $||f||_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\lambda(x)$. On définit la convolution de f, g par :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)d\lambda(y) \in [0, +\infty].$$

1. Montrer que $f * g$ est, mesurable et que $||f * g||_1 = ||f||_1||g||_1$.
2. Montrer que la définition de $f * g$ s'étend pour presque tout x aux $f, g \in L^1(\mathbb{R}, d\lambda)$, que $f * g \in L^1(\mathbb{R}, d\lambda)$ et $||f * g||_1 \leq ||f||_1||g||_1$.

Exercice 12

Soit $D = B((0,1),1)$ dans le plan. Calculer $\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$.

Espaces L^p

Exercice 13

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$, montrer que $|f| \leq ||f||_\infty$ μ−presque partout.

Exercice 14 Soit $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} 1_{[0,1]}(x^2 + y^2)$.

1. Montrer que $f \notin L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$. (Indication, on pourra utiliser un changement de variable en coordonnées polaires).
2. Montrer que $\sqrt{f} \in L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$ et calculer $||\sqrt{f}||_1$.
3. En déduire que $L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$ n'est pas inclus dans $L^2(]0,1[^2, \lambda_2)$.

Exercice 15 Soient $1 \leq p < q \leq +\infty$. On rappelle que $\ell^p(\mathbb{N})$ est l'espace vectorielle des séries de puissance p sommable et qu'il coïncide avec $\ell^p(\mathbb{N}) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ pour la mesure de comptage ν .

1. Soit $u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. Pour quel α a-t-on $u_n \in \ell^p(\mathbb{N})$? En déduire que $\ell^q(\mathbb{N}) \not\subset \ell^p(\mathbb{N})$.

2. Soit v_n une suite telle que pour tout n, $|v_n| \leq 1$, montrer que
$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^q \leq \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^p.$$
3. Montrer que la boule unité de $\ell^p(\mathbb{N})$ est inclus dans la boule unité de $\ell^q(\mathbb{N})$.
4. Montrer que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$, et pour tout $v \in \ell^p(\mathbb{N})$ $||v||_q \leq ||v||_p$.

Exercice 16 Soient $1 \leq p < q \leq +\infty$, λ la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que $L^q(]0,1],\lambda)$ est un sous-espace de $L^p(]0,1],\lambda)$.
2. Soit $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Pour quel $\alpha > 0$ a-t-on $f \in L^p(]0,1],\lambda)$? En déduire que $L^q(]0,1],\lambda)$ est un sous-espace strict de $L^p(]0,1],\lambda)$.
3. Soit $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définit par $g_\alpha = \frac{1}{(x+1)^\alpha} 1_{]0,+\infty[}(x)$. Pour quel α a-t-on $g_\alpha \in L^p(\mathbb{R},\lambda)$?
4. Peut-on comparer pour l'inclusion $L^q(\mathbb{R},\lambda)$ et $L^p(\mathbb{R},\lambda)$? (justifier)

Exercices plus difficiles.

Exercice 17 Ensemble triadique de Cantor et escalier du diable Soit $\Omega = [0,1]$, muni de la restriction de la mesure de Lebesgue λ à $\mathcal{B}([0,1])$.

Si $I = [a, b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, on note $\widetilde{I} = \left[a, \frac{2a+b}{3}\right] \cup \left[\frac{a+2b}{3}, b\right] \subset I$ l'union d'intervalles obtenu en retirant de I l'intervalle ouvert qui a le même centre que I et dont la longueur est un tiers de celle de I.

On définit par récurrence une suite d'ensembles $C_n \subset [0, 1]$ (tous union finie d'intervalle fermés) et de fonctions croissantes linéaires par morceau $F_n : [0, 1] \to [0, 1]$ par

— $C_0 = [0, 1]$ et $F_0(x) = x$.

— Si C_n s'écrit comme une union finie d'intervalles fermés deux à deux disjoints : $C_n = \bigcup_{m=1}^{N} I_m$ avec $I_m = [a_m, b_m]$ alors C_{n+1} est défini comme $C_n = \bigcup_{m=1}^{N} \widetilde{I_m}$ et

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} F_n(x) & \text{si} \\ \frac{F_n(a_m)+F_n(b_m)}{2} & \text{si} \quad x \in I_m - \\ F_n(a_m) + (F_n(b_m) - F_n(a_m))\frac{3(x-a_m)}{2(b_m-a_m)} & \text{si} \\ F_n(b_m) - (F_n(b_m) - F_n(a_m))\frac{3(b_m-x)}{2(b_m-a_m)} & \text{si} \end{cases}$$

1. Montrer que C_n est compact et vérifie $C_{n+1} \subset C_n$.
2. On pose $U_n = [0, 1] - C_n$. Montrer que C_n est une union de 2^n intervalles compacts deux à deux disjoints et U_n est union de $2^n - 1$ intervalles ouverts deux à deux disjoints. Est-ce que C_n est borélien ?
3. Calculer $\lambda(C_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Posons $C = \bigcap_{n\geq 0} C_n$. Montrer que C est non vide et calculer $\lambda(C)$. C s'appelle **ensemble triadique de Cantor**.
5. Montrer que la formule $\phi(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 1_A(n)}{3^{n+1}}$ définit une fonction injective $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to C$. En déduire que C est non-dénombrable.
6. Montrer que F_n est croissante pour tout n.
7. Montrer que F_n est lipschitzienne de constante $K \leq \frac{3^n}{2^n}$ et que pour tout $x \in [0, 1]$,
$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq \frac{1}{3.2^{n+1}}$$
En déduire que F_n converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction continue F.
8. Montrer que $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.
9. Posons $U = [0, 1] - C$. Si $I \subset U$ est un intervalle ouvert, montrer que F est constante sur I.
10. En déduire que F est dérivable sur U, n'est pas constante, mais que $F'(x) = 0$ pour λ-presque tout $x \in [0, 1]$. F s'appelle **escalier du diable de Cantor**.

Exercices supplémentaires.

Exercice 18 Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on pose
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales.
2. La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $[-1,1]^2$?

Exercice 19 Soit $D = [0,1]^2$. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$ et $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$.

Exercice 20 Soit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2) < 9\}$. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/3}}\,dxdy$ est convergente et donner sa valeur.

Exercice 21 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 < xy\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$.

Exercice 22 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 2x < 0, x^2 - 2y < 0\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy$.

(Indication : poser $x = u^2 v$ et $y = uv^2$)

Exercice 23 On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. Calculer $J = \displaystyle\iint_{]0,+\infty[^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ en fonction de I. Calculer J en utilisant les coordonnées polaires. En déduire la valeur de I.

Exercice 24 Calculer l'intégrale $\iiint_D \frac{z}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2+y^2 < z^2 < 4\}$.

Exercice 25 Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < x^2+y^2 < 1\}$.

Justifier que l'intégrale $\iiint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ est convergente et donner sa valeur.

Exercices plus difficiles supplémentaires.

Exercice 26 Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\{x\} \in \mathcal{T}$ pour tous $x \in \Omega$. On dit que μ est *continue* si $\mu(\{x\}) = 0\}$ pour tout $x \in \Omega$ et on dit que μ est *discrète* s'il existe un ensemble D au plus dénombrable tel que $\mu(D^c) = 0$.

1. Montrer que l'équivalence des conditions suivantes :

   a) μ est continue ;

   b) si A est une partie au plus dénombrable de Ω alors $\mu(A) = 0$;

   c) toute partie au plus dénombrable A de Ω est μ−négligeable.

2. Montrer que μ est discrète si et seulement s'il existe une suite (a_n) de points de Ω et une suite $(c_n) \subset [0, \infty]$ telles que $\mu = \sum_n c_n \delta_{a_n}$.
3. Décrire les espaces mesurés avec μ à la fois discrète et continue.
4. **(⋆)** Supposons maintenant que μ est σ−finie. Montrer que μ s'écrit de façon unique $\mu = \mu_c + \mu_d$, où μ_c est une mesure continue et μ_d est une mesure discrète.

Exercice 27 **(⋆)** Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\overline{\mathcal{T}} = \{A \Delta N : A \in \mathcal{T}, N\ \mu - \text{négligeable}\}$.

1. Montrer que $\overline{\mathcal{T}}$ est une tribu. *C'est la tribu μ−complétée de $\mathcal{T}$.*
2. Soit $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{T}} \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \Delta N \mapsto \mu(A)$, où $A \in \mathcal{T}$ et N est μ−négligeable. Montrer que $\overline{\mu}$ est une mesure sur $\overline{\mathcal{T}}$. On obtient un espace mesuré $(\Omega, \overline{\mathcal{T}}, \overline{\mu})$ appelé *l'espace mesuré μ−completé de $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.*

Exercice 28 Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ au plus dénombrable ou } A^c \text{ au plus dénombrable}\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathcal{T} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
3. Conclure.

Exercice 29 On reprend la tribu $\mathcal{T}$ de l'exercice précédent et on restreint la mesure de comptage ν sur $\mathbb{R}$ à $\mathcal{T}$. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}, \nu)$ est un espace mesuré qui n'est pas σ−finie.