Université Claude Bernard | Mathématiques
L3 Topologie et Théorie de la Mesure | 2023-2024

Feuille d'exercices numéro 8

Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire ; espaces de Hilbert.

Exercice 1 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire (réel). Montrer que, si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs de E on a pour tout $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ et tout $\{i_1,\dots,i_n\} \subset I$ (donc tels que $i_j \neq i_k$ si $k \neq j$)

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{i_k} \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \|a_{i_k}\|^2 \ .$$

Remarquer que le théorème de Pythagore est un cas particulier de l'égalité ci-dessus. Qu'est-ce qui change si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien ?

Exercice 2 **Une Identité du parallélogramme généralisée**

Soit H un espace préhilbertien de norme $||\cdot||$.

1. Montrer que pour $t \in]0,1[$, on a pour $x_1, x_2 \in H$:

$$||tx_1 + (1-t)x_2||^2 + t(1-t)||x_1 - x_2||^2 = t||x_1||^2 + (1-t)||x_2||^2.$$

2. En déduire que $x \mapsto ||x||^2$ est strictement convexe.

Exercice 3 Soit $H = \mathbb{R}^2$. On pose $K = [0,1]^2$ et $C = [0,+\infty[^2$

1. Montrer que C, K sont des convexes fermés. Sont-ils compacts ?
2. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la projection sur K est donnée par la formule

$$P_K(x) = (min(x_1,1)1_{]0,+\infty[}(x_1), min(x_2,1)1_{]0,+\infty[}(x_2)).$$

3. Rappeler la relation entre P_K et cône normal (vu au chapitre sur la convexité) et en déduire $N_K((1,1))$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}^2$. Calculer $P_C(x)$ (Indication : on pourra deviner une formule et utiliser la propriété caractéristique de P_C, une généralisation est à l'exercice 12).

Exercice 4 On se place dans l'espace $L^2([0,1],\lambda;\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. On considère la famille $(u_k)_{k\geq 1}$ définie par $u_k(x) = \sin(2k\pi x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $k \geq 1$. Montrer que c'est une famille orthogonale. Est-ce une base hilbertienne ?

Exercice 5 Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,-1)$ et $e_3 = (0,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Utiliser le procédé de Gram-Schmidt sur cette base pour obtenir une base orthonormale.

Exercice 6 On désigne par $\mathcal{C}([-1,1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles et continues sur $[-1,1]$. En tant que sous-espace de l'espace de Hilbert $L^2([-1,1],\lambda;\mathbb{R})$, $\mathcal{C}([-1,1])$ est un espace préhilbertien muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} fg d\lambda.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}([-1,1])$ est séparable. (Indication : on pourra utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass.)
2. On se propose de montrer que $\mathcal{C}([-1,1])$ n'est pas complet, donc, n'est pas un espace de Hilbert.

   Pour chaque entier $n > 0$ on pose

$$\phi_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t \leq -1/n \\ nt & \text{si } -1/n \leq t \leq 1/n \\ 1 & \text{si } 1/n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

   (a) Montrer que (ϕ_n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}([-1,1])$.

   (b) Soit

$$\psi(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

   Montrer que $\| \psi - f \|_2 > 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([-1,1])$.(La norme $\| \cdot \|_2$ de $L^2([-1,1], \lambda; \mathbb{R})$ est défini par $\| x \|_2^2 = < x, x >$.)

   (c) En utilisant l'inégalité de Minkowski montrer que la suite (ϕ_n) ne converge pas dans $\mathcal{C}([-1,1])$.

   (d) Conclure.
3. Est-ce que $\mathcal{C}([-1,1])$ fermé dans $L^2([-1,1], \lambda; \mathbb{R})$?

Exercice 7 Soient H un espace de Hilbert (complexe) et $T \in L(H,H)$ une application linéaire continue.

1. Soit $x \in H$, montrer (en utilisant le théorème de Riesz) qu'il existe un unique $z \in H$, tel que pour tout $y \in H$:
$$\langle z, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$
2. En utilisant le même théorème, montrer que la norme subordonnée est donnée par :
$$|||T||| = \sup_{||y|| \leq 1} \sup_{||x|| \leq 1} |\langle x, Ty \rangle|.$$
3. Montrer qu'il existe une unique application linéaire : $T^* : H \to H$ (appelée adjoint de T) telle que :
$$\forall x, y \in H : \langle x, Ty \rangle = \langle T^* x, y \rangle.$$
4. Montrer que $T^* \in L(H,H)$ et que la norme subordonnée de l'adjoint est la même :
$$|||T^*||| = |||T|||.$$
5. Montrer que $(T^*)^* = T$.
6. Si $H = \mathbb{C}^n$ et $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ la base orthonormale canonique, exprimer la matrice de T^* dans la base canonique en fonction de la matrice $A = (a_{i,j})$ de T.

Exercice 8 Polynômes de Legendre On se place dans l'espace de Hilbert

$$H = (L^2([-1,1], \lambda; \mathbb{R}), \|\cdot\|_2).$$

1. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, montrer qu'il existe une famille orthonormale de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction p_n est une fonction polynomiale de degré n.
2. En utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass, montrer que la famille de polynômes de la question précédente $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction polynomiale l_n définie par

$$l_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$

pour $t \in [-1,1]$ (polynômes de Legendre).

(a) Déterminer le degré de l_n pour chaque n.

(b) Montrer que la famille $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale (Indication : calculer par intégration par partie $\langle l_n, P\rangle$ avec P polynôme de $deg(P) < n$).

(c) En déduire que pour chaque n, on a $p_n = \dfrac{l_n}{\|l_n\|_2}$.

Exercice 9 Soient H un espace de Hilbert (complexe) et $u \in L(H,H)$ une application linéaire continue. Montrer l'équivalence entre

1. u est une isométrie, c'est à dire $||u(x)||_2 = ||x||_2$ pour tout $x \in H$.
2. Pour tout $x, y \in H$, $\langle ux, uy\rangle = \langle x, y\rangle$
3. $u^*u = Id$ (u^* est l'adjoint de l'exercice 7)

(Indication :penser à l'identité de polarisation).

Exercice 10 Soit $H = L^2([-\pi,\pi], \frac{1}{2\pi}\lambda; \mathbb{C})$. Soit $e_n(x) = exp(inx)$. On rappelle que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de H. Soit f la fonction définie par $f(x) = x$.

1. Calculer les nombres $c_n(f) = \langle e_n, f\rangle$ (ce sont les coefficients de Fourier complexes de la fonction f)
2. En déduire une formule pour f en terme des $(c_n(f))$.
3. En utilisant l'égalité de Parseval, en déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

Exercices plus difficiles

Exercice 11 Une autre Identité du parallélogramme généralisée Soient H un espace de Hilbert et $x_1, ..., x_n \in H$

Montrer que

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{-1,1\}^n} ||\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n||^2 = ||x_1||^2 + \cdots + ||x_n||^2.$$

Exercice 12 Soit $H = L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{R})$. On pose $C = \{f \in H : f \geq 0 \ \mu - p.p.\}$.

Montrer que C est un convexe fermé et que $P_C(f) = f 1_{\{f\geq 0\}}$.

Exercice 13 Soit $H = L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{R})$. On pose $K = \{f \in H : 1 \geq f \geq 0 \ \mu - p.p.\}$.

Montrer que K est un convexe fermé et que $P_K(f) = f 1_{\{1\geq f\geq 0\}}$.

Exercice 14 Soient H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous-espace fermé différent de $\{0\}$. Soit P une projection de H sur F, c'est à dire une application linéaire $P : H \to H$ telle que $P^2 = P$ d'image F. On rappelle qu'on munit l'espace vectoriel des applications linéaires continues $L(H, H)$ de la norme subordonnée $|||.|||$.

Montrer l'équivalence entre

1. P est la projection orthogonale P_F
2. P est continue et $|||P||| = 1$
3. $|\langle P(x), x\rangle| \leq ||x||^2$ pour tout $x \in H$.

Exercice 15 Polynômes de Laguerre On se place dans l'espace de Hilbert $H = (L^2([0, \infty[, \mu; \mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ avec μ la mesure sur la tribu borélienne de $[0, \infty[$ de densité e^{-x} par rapport à la mesure de Lebesgue c'est-à-dire $\mu(A) = \int_A e^{-x} dx$.

Soit

$$L_n = \frac{e^x}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x} x^n).$$

1. Montrer que L_n est une fonction polynomiale de la forme :
$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k.$$
2. Soit Q un polynôme de degré $m < n$ montrer que $\langle L_n, Q\rangle = 0$ (Indication : intégrer par partie).
3. Montrer que L_n est une famille orthonormale de H.
4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer la norme de $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{(t+i)^n} L_n$. En déduire que S_N converge dans H.
5. Soit
$$f_t(x) = \frac{i+t}{i} e^{ixt}.$$
Montrer que $\langle L_n, f_t\rangle = \frac{t^n}{(i+t)^n}$.
6. Montrer que S_N converge dans H vers f_t.
7. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de H. (Indication : montrer que tout f orthogonal aux L_n a une transformée de Fourier nulle et utiliser le théorème d'inversion de Fourier).