Analyse fonctionnelle. Cours de deuxième année à l'ENS de Lyon, donné en 2013–2015

Mikael de la Salle

Table des matières

Préambule

Ces notes de cours ont été en perpétuelle construction depuis la première fois que j'ai donné ce cours à l'automne 2013. Elles contiennent encore sans doute un certain nombre de fautes. Merci de me faire parvenir vos corrections éventuelles.

Des références sont : [**Bre83**] et [**Rud91**]. Pour des références en ligne que j'aime beaucoup, voir aussi les notes du cours d'Analyse fonctionnelle de Laure Saint-Raymond (disponible sur

`http://www.math.ens.fr/enseignement/`

rubrique Archives Pédagogiques, Polycopiés de cours), ou celles de Cédric Villani (Cours d'Analyse II disponible sur

`http://cedricvillani.org/for-mathematicians/lecture-notes/`

) et les références qui s'y trouvent.

Chapitre 1

Espaces vectoriels topologiques et espaces de Banach

Faire de l'analyse, c'est démontrer des inégalités. Et démontrer une inégalité, c'est souvent construire une application linéaire continue entre espaces fonctionnels.

Beaucoup d'espaces rencontrés en analyse en première année sont des espaces de Banach : les espaces ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$ (suites (x_n) telles que $\sum_n |x_n|^p < \infty$), c_0 (suites qui convergent vers 0), $L_p(X, \mu)$ pour un espace mesuré (X, μ) (qui contiennent les espaces ℓ_p comme cas particulier), $C(K)$, K espace topologique compact. C'est bien car comme il a été vu en cours de topologie et calcul différentiel, la structure d'espace de Banach est très riche, il y a beaucoup de résultats puissants dessus.

Par contre, de nombreux autres espaces naturels ne sont pas des espaces de Banach : les espaces L_p, $0 < p < 1$, les espaces $C(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbf{R}^d$, les espaces $\mathcal{H}(\Omega)$ de fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$, les espaces de fonctions C^∞ sur un compact/ouvert de $\mathbf{R}^d$, etc. Un des buts de ce chapitre est de développer un cadre abstrait général qui englobe tous ces exemples (et d'autres), et dans lequel certains des résultats importants des espaces de Banach restent vrais.

Conventions et notations

Dans ce chapitre (et souvent dans ces notes de cours) on ne considèrera que des espaces vectoriels sur le corps $\mathbf{R}$ des réels. Essentiellement toute la théorie s'adapte au cas complexe (voir Tds).

Lorsque A, B sont des parties d'un espace vectoriel E et $\lambda \in \mathbf{R}$, on notera $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\} \subset E$, $\lambda A = \{\lambda a, a \in A\}$. On utilisera de même des notations du type $A - B$, ou $x + A$ pour $x \in E$, ou bien encore $x + A + B$...

1. Espaces vectoriels topologiques

DÉFINITION 1.1. Un espace vectoriel topologique (*evt*) est un espace vectoriel E muni d'une topologie telle que

— les applications $\begin{array}{c} E \times E \to E \\ (x, y) \mapsto x + y \end{array}$ et $\begin{array}{c} \mathbf{R} \times E \to E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{array}$ sont continues.

— E est séparé (deux points distincts admettent des voisinages disjoints).

REMARQUE 1.2. C'est une notion très (trop) générale, mais on peut quand même dire des choses, plus ou moins évidentes :

— $\{x\}$ est fermé pour tout $x \in E$.

— Les translations ainsi que les multiplications par un scalaire non nul sont des homéomorphismes de E.

— La topologie d'un *evt* est déterminée par la donnée d'un système fondamental de voisinages de 0 (V est un voisinage de x si et seulement si $V - x$ est un voisinage de 0).

— Une application linéaire entre deux *evt* est continue si et seulement si elle est continue en 0.
— par [**Rud91**, Theorem 1.12], on aurait pu remplacer la condition que E est séparé par l'hypothèse que $\{0\}$ est fermé, et on aurait obtenu la même notion.

Exemple 1.3. Les espaces vectoriels normés forment des exemples importants d'*evt*. Rappelons qu'une norme sur un espace vectoriel E est une application $\|\cdot\| : E \to [0, \infty($ telle que
— $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall \lambda \in \mathbf{R}, x \in E$
— $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in E$
— $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
Sans la dernière condition, on parle de *semi-norme*.

On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. Pour alléger les écritures, pour $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$ on notera souvent Tx l'image de x par T. Lorsque $F = \mathbf{R}$, cet espace, constitué des formes linéaires continues sur E, est appelé *dual* de E et noté E^*. Rappelons que lorsque E et F sont des espaces vectoriels normés, $\mathcal{L}(E, F)$ aussi, pour la norme d'opérateur, à savoir

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

2. Conséquences de la complétude : continuité automatique

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet (pour la distance induite par la norme : $d(x, y) = \|x - y\|$). Comme cela a été vu dans le cours de topologie et calcul différentiel de première année, la complétude a des conséquences remarquables : les théorèmes de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte et du graphe fermé. Ces résultats peuvent être vus comme des résultats de continuité automatique d'applications linéaires entre espaces de Banach. Ils utilisent la complétude via le théorème de Baire : dans un espace métrique complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense (et donc non vide). Nous les rappelons puis les généralisons avec des preuves rapides (pour plus de détails et des énoncés encore plus généraux, voir [**Rud91**, Chapitre 2]).

Théorème 1.4 (Banach-Steinhaus). *Soit E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé, et Φ une partie de $\mathcal{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre*
(1) Φ est ponctuellement bornée : $\sup_{\phi \in \Phi} \|\phi x\|_F < \infty$ pour tout $x \in E$.
(2) Φ est équicontinue : $\sup_{\phi \in \Phi} \|\phi\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$.

Une conséquence souvent utilisée est le résultat suivant, qui affirme qu'une limite simple d'opérateurs bornés est bornée :

Corollaire 1.5. *Soit E un espace de Banach, F est espace vectoriel normé, et (T_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E, F)$. Si pour tout $x \in E$, la suite $T_n x$ a une limite notée Tx, alors T est une application linéaire continue et $T_n x_n$ converge vers Tx pour toute suite (x_n) de E qui converge vers un élément x de E.*

Remarque 1.6. Le théorème de Banach-Steinhaus et son corollaire restent vrais si l'on suppose seulement que E est un *evt* pour lequel la topologie est définie par une distance *invariante* ($d(x + z, y + z) = d(x, y)$ pour tous $x, y, z \in E$) et *complète*, et F un *evt* arbitraire. Pour Banach-Steinhaus, l'hypothèse que Φ est ponctuellement bornée est à comprendre comme « (1) pour tout $x \in E$ et tout voisinage W de 0 dans F, il existe $t > 0$ tel que $\phi x \in tW$ pour tout $\phi \in \Phi$ », et l'hypothèse que Φ est équicontinue est à comprendre comme « (2) pour tout voisinage W de 0 dans F, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $\phi(V) \subset W$ pour tout $\phi \in \Phi$ ».

Démonstration. Supposons (2). Soit $x \in E$. Si W est un voisinage de 0 dans F, soit V un voisinage de 0 tel que $\varphi(V) \subset W$ pour tout $\phi \in \Phi$. Comme $\lim_{n\to\infty} x/n = 0$, il existe n tel que $x/n \in V$. Et donc $\phi(x) \in nW$ pour tout $\phi \in \Phi$. On a montré (1).

Réciproquement, supposons (1). Soit W un voisinage de 0 dans F. Il existe un voisinage U de 0 tel que $\overline{U} - \overline{U} \subset W$ (pourquoi ?). On pose $A = \cap_{\varphi\in\Phi}\varphi^{-1}(\overline{U})$, c'est un fermé de E. De plus par l'hypothèse (1), $\cup_n nA = E$, donc par le théorème de Baire l'un des fermés nA n'est pas d'intérieur vide, donc A aussi puisque $x \mapsto nx$ est un homéomorphisme de E. Soit donc $x \in A$ et V un voisinage de 0 tel que $x + V \subset A$. En particulier, $V \subset A - A$ et donc

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \varphi(V) \subset \varphi(A) - \varphi(A) \subset \overline{U} - \overline{U} \subset W.$$

Ce qui montre (2). □

Théorème 1.7 (de l'application ouverte). *Soient E, F des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$.*

(1) Si T est surjective alors T est ouverte : l'image de tout ouvert est ouverte.

(2) Si T est bijective alors $T^{-1} : F \to E$ est une application linéaire continue.

Une conséquence très importante est

Théorème 1.8 (du graphe fermé). *Soient E, F des espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. Alors T est continue si et seulement si son graphe, c'est-à-dire $\{(x, Tx), x \in E\}$, est fermé dans $E \times F$.*

Le théorème du graphe fermé se démontre en appliquant le théorème de l'application ouverte à l'application $x \in E \mapsto (x, Tx) \in \text{graphe}(T)$.

Remarque 1.9. Les théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé restent vrais si l'on suppose seulement que E et F sont des *evt* pour lesquels la topologie est définie par une distance *invariante* et *complète*.

Pour rafraîchir les souvenirs, démontrons le théorème de l'application ouverte dans le cas général.

Preuve du théorème de l'application ouverte. (1) $\Longrightarrow$ (2) est clair, il suffit donc de montrer (1). On note d_E et d_F des distances invariantes et complètes sur E et F. Par translation on se ramène à montrer que $T(B_E(0, \varepsilon))$ contient une boule centrée en 0 pour tout $\varepsilon > 0$. On procède en trois étapes.

Première étape : $\overline{T(B_E(0, \varepsilon))}$ est d'intérieur non vide. En effet, par hypothèse $\cup_{n\in\mathbf{N}} n\overline{T(B_E(0, \varepsilon))} = F$, donc par le théorème de Baire appliqué à F, l'un des fermés $n\overline{T(B_E(0, \varepsilon))}$ n'est pas d'intérieur vide. Donc $\overline{T(B_E(0, \varepsilon))}$ aussi.

Deuxième étape : Il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\overline{T(B_E(0, \varepsilon))}$ contient $B_F(0, \delta(\varepsilon))$. En effet par inégalité triangulaire, il contient $\overline{T(B_E(0, \varepsilon/2))} - \overline{T(B_E(0, \varepsilon/2))}$. On conclut par la première étape et le fait que si U est un ouvert, $U - U$ contient un voisinage de 0.

Troisième et dernière étape : Soit y dans $B_F(0,\delta(\varepsilon))$. Par la deuxième étape il existe $x_1 \in B_E(0,\varepsilon)$ tel que $d_F(Tx_1,y) < \delta(\varepsilon/2)$. Comme d_F est invariante, on en déduit que $y - Tx_1 \in B_F(0,\delta(\varepsilon/2))$ et donc il existe $x_2 \in B_E(0,\varepsilon/2)$ tel que $d(y-Tx_1,Tx_2) < \delta(\varepsilon/4)$. On construit ainsi par récurrence une suite $x_n \in B_E(0,\varepsilon/2^n)$ telle que $d(y,T(x_1+\cdots+x_n)) \leq \delta(\varepsilon/2^{n+1}) \to 0$. Par invariance de la distance, on a $d(x_1+\cdots+x_n, x_1+\cdots+x_{n+1}) \leq \varepsilon/2^{n+1}$ et la suite $x_1+\cdots+x_n$ est de Cauchy. Comme E est complet, on peut définir $x = \lim_n(x_1+\cdots+x_n)$ et on vérifie que $d(x,0) \leq \sum_{n\geq 0}\varepsilon/2^n = 2\varepsilon$. Par continuité de T on a bien $Tx = \lim_n T(x_1+\cdots+x_n) = y$. On a donc montré que $B_F(0,\delta(\varepsilon)) \subset TB_E(0,2\varepsilon)$, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 1.10. **Pour la culture** Il est clair que si la topologie d'un *evt* est définie par une distance, alors 0 admet une base dénombrable de voisinages (les boules de rayon $1/n$ par exemple). La réciproque est vraie [**Rud91**, Theorem 1.24] : pour un *evt* E, il y a équivalence entre (1) E est métrisable (2) E est métrisable avec une distance invariante (3) 0 admet une base dénombrable de voisinages.

On peut définir la notion de suite de Cauchy dans un *evt* arbitraire : une suite (x_n) est de Cauchy si pour tout voisinage V de 0, il existe N tel que $u_n - u_m$ appartient à V pour tout $n,m > N$. Lorsque E est un *evt* métrisable, et d une distance *invariante* qui définit la topologie, il n'est pas difficile de voir que cette notion de suite de Cauchy coincide avec celle dans l'espace métrique (E,d) (et donc en particulier ne dépend pas de d). L'hypothèse que la topologie d'un *evt* E est donnée par une distance invariante et complète peut donc se traduire en « 0 admet une base dénombrable de voisinages, et toute suite de Cauchy converge ».

Exemple 1.11. Soit $0 < p < 1$ et (X,μ) un espace mesuré. L'espace $L_p(X,\mu)$ des fonctions mesurables $f : X \to \mathbf{R}$ telles que $\int |f|^p d\mu < \infty$, quotienté par le sous-espace des fonctions nulles presque partout, et muni de la distance $d(f,g) = \int |f-g|^p d\mu$ est un espace vectoriel topologique et d est une distance invariante complète (cf Tds).

3. Conséquence de la convexité : le théorème de Hahn-Banach

3.1. Duaux des espaces classiques. On rappelle ici des exemples d'identifications explicites du dual de certains espaces de Banach classiques, vus en cours de première année. Voir [**Rud80**] et [**Rud91**]. On commence par un théorème de Riesz qui identifie le dual d'un espace de Hilbert réel avec l'espace lui-même (un résultat similaire est vrai pour les espaces de Hilbert complexes, nous l'énoncerons dans le dernier chapitre du cours). Un espace de Hilbert réel est un espace de Banach réel dont la norme provient d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une application $\langle\cdot,\cdot\rangle \colon H\times H \to \mathbf{R}$ bilinéaire et telle que $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$ pour tout $x \in H$. Les espaces de Hilbert sont caractérisés par l'identité du parallélogramme : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ pour tout $x,y \in H$.

Théorème 1.12 (Riesz). *Soit H un espace de Hilbert réel et $\varphi \in H^*$. Il existe un unique $y \in H$ tel que*

$$\varphi(x) = \langle x,y\rangle \ \forall x \in H.$$

De plus $\|\varphi\|_{H^*} = \|y\|_H$.

Le dual d'un espace L_p est un autre espace L_q si $p < \infty$. Le théorème suivant a été montré dans le cours d'intégration sous l'hypothèse additionnelle que la mesure est σ-finie. On donnera une preuve du cas $1 < p < \infty$ dans cette généralité plus tard dans le cours.

THÉORÈME 1.13. *Soit (X, μ) un espace mesuré, et $p \in [1, \infty)$. On note q l'*exposant conjugué*, c'est-à-dire le nombre $q \in (1, \infty]$ caractérisé par $1/q+1/p = 1$. Alors toute fonction f de $L_q(X, \mu)$ définit une forme linéaire continue Φ_f sur $L_p(X, \mu)$ par $\Phi_f : g \mapsto \int fg d\mu$. Si $1 < p < \infty$ ou si ($p = 1$ et μ est σ-finie), alors toute forme linéaire continue sur $L_p(X, \mu)$ provient d'un unique $f \in L_q(X, \mu)$, et $\|\Phi_f\|_{L_p(X,\mu)^*} = \|f\|_{L_q(X,\mu)}$.*

REMARQUE 1.14. Si $p = \infty$, on verra (en utilisant l'axiome du choix) que le dual de $L_\infty(X, \mu)$ s'identifie isométriquement comme l'espace des mesures signées régulières sur un (très gros) espace compact K.

Concluons cette partie d'exemples par un autre théorème de Riesz, qui identifie le dual de l'espace $C(K)$ des fonctions continues sur un espace topologique compact K.

THÉORÈME 1.15. *Soit K un espace topologique compact et $C(K)$ l'espace de Banach des fonctions continues de K dans $\mathbf{R}$, pour la norme $\|f\| = \sup_K |f|$. Alors toute forme linéaire continue sur $C(K)$ est de la forme $f \mapsto \int f d\mu$ pour une mesure signée μ sur K muni de la tribu borélienne. Si K est métrisable μ est unique.*

REMARQUE 1.16. Si K n'est pas métrisable μ n'est pas nécessairement unique. La raison est que la tribu engendrée par les $f^{-1}(U)$ pour U ouvert de $\mathbf{R}$ et $f \in C(K)$ est en général strictement plus petite que la tribu borélienne sur K. Cette tribu est appelée *tribu de Baire* et coïncide avec la tribu engendrée par les ouverts de K qui sont réunions dénombrables de compacts. On obtient donc unicité de μ si l'on se restreint aux mesures sur la tribu de Baire. Ou bien si l'on se restreint aux mesures boréliennes *régulières*, c'est-à-dire telles que $|\mu|(A) = \sup\{|\mu|(F), F \subset A \text{ compact}\}$. L'équivalence entre ces deux conditions revient à dire que toute mesure signée sur la tribu de Baire s'étend de manière unique en une mesure borélienne régulière.

3.2. Espaces vectoriels topologiques localement convexes.

DÉFINITION 1.17. Une partie C d'un espace vectoriel E est dite convexe si pour tous $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in V$.

DÉFINITION 1.18. Un espace vectoriel topologique localement convexe (abbrégé en *evtlc*) est un *evt* dans lequel 0 admet une base de voisinages convexes.

Lorsque p est une norme (ou simplement une semi-norme) sur un espace vectoriel E, $\{x, p(x) < t\}$ est convexe. Un espace vectoriel normé est donc un *evtlc*, et plus généralement la construction suivante permet de définir une structure d'*evtlc* sur un espace vectoriel muni d'une famille *séparante* de semi-normes.

DÉFINITION 1.19. Une famille $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ de semi-normes sur un espace vectoriel E est dite *séparante* si pour tout $x \in E$ non nul, il existe $\alpha \in A$ tel que $p_\alpha(x) > 0$.

Si $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille séparante de semi-normes sur un espace vectoriel E, alors la topologie τ la plus faible qui rende continues les p_α est une topologie d'*evtlc* (voir Théorème A.1). En effet (exercice !), τ est une topologie d'*evt* et une base de voisinages de 0 pour τ est donnée par les intersections finies d'ensembles de la forme $\{x, p_\alpha(x) < \delta\}$, pour $\delta > 0$ et $\alpha \in A$.

En fait, tout *evtlc* est obtenu de cette manière :

Proposition 1.20. *Un espace vectoriel topologique est localement convexe si et seulement si sa topologie peut être définie par une famille séparante de semi-normes.*

Cette proposition découle facilement du lemme important suivant, qui fait le lien entre voisinage convexe et semi-normes :

Lemme 1.21. *Soit* E *un* evt *et* V *un voisinage convexe de* 0. *On définit la* jauge de Minkowski de V *par*

$$j_V(x) = \inf\{t, \frac{1}{t}x \in V\}.$$

Alors j_V *est sous-additive* ($j_V(x+y) \leq j_V(x) + j_V(y)$ *pour tous* $x, y \in E$) *et positivement homogène* ($j_V(\lambda x) = \lambda j_V(x)$ *pour tous* $x \in E, \lambda \in \mathbf{R}^+$). *Si de plus* $-V = V$, j_V *est une semi-norme.*

De plus, pour tout $x \in E$,

$$j_V(x) < 1 \Longrightarrow x \in V \Longrightarrow j_V(x) \leq 1. \tag{1}$$

Démonstration. On peut déjà remarquer que $j_V(x)$ est bien défini car, V étant un voisinage de 0, $\frac{1}{t}x \in V$ pour t assez grand. Commençons par montrer (1). Si $j_V(x) < 1$, il existe $t < 1$ tel que $\frac{1}{t}x \in V$. Comme $0 \in V$ et V est convexe, tout le segment qui relie 0 à $\frac{1}{t}x$ est contenu dans V, donc en particulier $x \in V$. Si $x \in V$, $j_V(x) \leq 1$ par définition. Le fait que j_V est positivement homogène (et homogène tout court lorsque $V = -V$) est évident.

Pour vérifier que j_V est sous-additive, prenons $x, y \in E$ et $a, b > 0$ tels que $j_V(x) < a, j_V(y) < b$. Il s'agit de montrer que $j_V(x+y) \leq a+b$. Par (1), $\frac{1}{a}x$ et $\frac{1}{b}x$ sont des éléments de V. Par convexité, $\frac{a}{a+b}\frac{1}{a}x + \frac{b}{a+b}\frac{1}{b}y = \frac{1}{a+b}(x+y)$ aussi, ce qu'il fallait démontrer. □

Le lemme suivant est une caractérisation immédiate (et utile) de la continuité.

Lemme 1.22. *Soient* $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in A})$ *et* $(F, (q_\beta)_{\beta \in B})$ *deux* evtlc *donnés par des familles séparantes de semi-normes.*

- *Une suite* (x_n) *dans* E *converge vers* x *si et seulement si pour tout* $\alpha \in A$, $\lim_n p_\alpha(x - x_n) = 0$.
- *Une application linéaire* $T : E \to F$ *est continue si et seulement si*

$$\forall \beta \in B,\ \exists C > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A \text{ tel que } q_\beta(Tx) \leq C \max_{1 \leq i \leq n} p_{\alpha_i}(x).$$

Démonstration. Le premier point est immédiat.

Pour le second : si T est continue et $\beta \in B$, la préimage de $\{y \in F, q_\beta(y) < 1\}$ est un voisinage de 0 dans E, donc contient une intersection finie $\cap_{i=1}^n \{p_{\alpha_i}(x) < \delta_i\}$. Par homogenéité on obtient donc $q_\beta(Tx) \leq C \max_{1 \leq i \leq n} p_{\alpha_i}(x)$ avec $C = \max_i 1/\delta_i$. Réciproquement l'inégalité $q_\beta(Tx) \leq C \max_{1 \leq i \leq n} p_{\alpha_i}(x)$ implique que la préimage par T de $\{q_\beta(y) < \delta\}$ contient $\cap_{1 \leq i \leq n}\{p_{\alpha_i}(x) < \delta/C\}$, donc un voisinage de 0. La validité de cette inégalité pour tout β implique donc la continuité de T en 0, donc sa continuité. □

3.3. Espaces de Fréchet. Lorsqu'une structure d'*evtlc* sur E est définie par une famille *dénombrable* $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de semi-normes, la structure d'*evtlc* sur E peut être décrite de façon plus simple par la distance

$$d(x, y) = \sup_n 2^{-n} \min(1, p_n(x - y)). \tag{2}$$

On laisse comme exercice le soin de vérifier que c'est une distance invariante sur E dont les boules sont convexes, et qui définit la même structure d'*evtlc* sur E que dans la partie générale.

DÉFINITION 1.23. Un espace vectoriel E avec une famille dénombrable et séparante de semi-normes est appelé un espace de Fréchet s'il est complet pour la distance (2).

Le choix précis de la distance (2) n'a aucune importance. On obtiendrait la même notion si on remplaçait d par n'importe quelle distance *invariante* qui définit la topologie de E. La complétude peut même s'exprimer sans mention à une distance invariante, voir la remarque 1.10.

L'intérêt des espaces de Fréchet est qu'on peut à la fois leur appliquer les thèorèmes de complétude (Banach-Steinhaus, application ouverte et graphe fermé) et les conséquences que nous voyons maintenant de Hahn-Banach. De plus ils englobent de nombreux exemples importants d'espaces fonctionnels.

EXEMPLE 1.24. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$. L'espace $\mathcal{C}(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω est un espace de Fréchet, pour la famille de semi-normes $p_n(f) = \sup_{K_n} |f|$, pour $(K_n)_n$ un suite de parties compactes de Ω qui recouvrent Ω. On vérifie que la topologie ne dépend pas de cette suite.

EXEMPLE 1.25. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$. L'espace $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω est un espace de Fréchet, pour la famille de semi-normes $p_n(f) = \sup_{K_n} |f|$, pour $(K_n)_n$ un suite de parties compactes de Ω qui recouvrent Ω. À nouveau, la topologie ne dépend pas de cette suite.

EXEMPLE 1.26. Soit K un compact de $\mathbf{R}^d$. L'espace $C^\infty(K)$ des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^d$ qui sont nulles en dehors de K est un espace de Fréchet pour la famille de semi-normes $p_\alpha(f) = \sup_K |D^\alpha f|$ pour $\alpha \in \mathbf{N}^d$. On rappelle, pour $\alpha \in \mathbf{N}^d$, les notations $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ et

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} f.$$

EXEMPLE 1.27. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$. L'espace $C^\infty(\Omega)$ des fonctions de classe C^∞ sur Ω est un espace de Fréchet, pour la famille de semi-normes $p_{\alpha,n}(f) = \sup_{K_n} |D^\alpha f|$, pour $(K_n)_n$ un suite de parties compactes de Ω qui recouvrent Ω et $\alpha \in \mathbf{N}^d$. Là encore, on vérifie que la topologie ne dépend pas de cette suite.

3.4. Forme analytique du théorème de Hahn-Banach. Pour les espaces de Banach classiques, nous avons pu identifier le dual de façon explicite. En général, ce n'est pas possible, et on a besoin de l'axiome du choix sous la forme du lemme de Zorn pour montrer que le dual est non vide. Rappelons qu'un ensemble ordonné est dit *inductif* si toute partie totalement ordonnée admet un majorant. Le Lemme de Zorn affirme que tout ensemble ordonné inductif admet un élément maximal.

THÉORÈME 1.28. *Soit E un espace vectoriel et $p : E \to \mathbf{R}$ une application sous-additive et positivement homogène.*

Soit F un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur f telle que

$$\forall x \in F,\ f(x) \leq p(x).$$

Alors il existe un prolongement linéaire φ de f à E tel que

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) \leq p(x).$$

Démonstration. On introduit l'ensemble $\mathcal{P}$ des couples (G,φ) où G est un sous-espace vectoriel de E contenant F, et $\varphi : G \to \mathbf{R}$ un prolongement de f satisfaisant $\varphi \le p$, que l'on munit de la relation d'ordre

$$(G_1,\varphi_1) \le (G_2,\varphi_2) \ \text{ si } G_1 \subset G_2 \text{ et } \varphi_2\,|_{G_1} = \varphi_1.$$

On montre que c'est un ensemble inductif. Si $\mathcal{C}$ est une partie totalement ordonnée dans $\mathcal{P}$, $\widetilde{G} = \cup_{(G,\varphi)\in\mathcal{C}} G$ est un sous-espace vectoriel de E et on définit bien une application linéaire $\widetilde{\varphi} \le p$ sur $\widetilde{G}$ en posant $\widetilde{\varphi}\,|_G = \varphi$ pour tout $(G,\varphi) \in \mathcal{C}$.

Par le lemme de Zorn, $\mathcal{P}$ admet un élément maximal (G,φ). Pour conclure on montre que $G = E$. Supposons le contraire, et prenons $x_0 \in E \setminus G$. On pose $G' = Vect(G,x_0)$ et $\varphi'(x+sx_0) = \varphi(x) + s\beta$, pour un $\beta \in \mathbf{R}$ à déterminer. On obtiendra une contradiction de la maximalité de (G,φ) en montrant qu'il y a un choix de β pour lequel $(G',\varphi') \in \mathcal{P}$, autrement dit $\varphi' \le p$, ou encore $\varphi(x) + s\beta \le p(x+sx_0)$ pour tous $x \in X, s \in \mathbf{R}$. Comme p est positivement homogène il suffit de s'en assurer pour $s = \pm 1$. Il s'agit de montrer que pour un choix de β

$$\sup_{x\in G} \varphi(x) - p(x-x_0) \le \beta \le \inf_{y\in G} p(y+x_0) - \varphi(y).$$

Autrement dit il faut montrer que pour tout $x,y \in G$, $\varphi(x) - p(x-x_0) \le p(y + x_0) - \varphi(y)$, ou de façon équivalente $\varphi(x+y) \le p(x-x_0) + p(y+x_0)$. Mais cette dernière inégalité est vraie car $\varphi \le p$ sur G et par la sous-additivité de p. Ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 1.29. *Le dual d'un* evtlc E *sépare les points : pour tout* $x \ne y \in E$, *il existe* $f \in E^*$ *tel que* $f(x) \ne f(y)$.

Si E *est un espace de Banach et* $x \in E$, *alors*

$$\|x\| = \max_{f\in E^*, \|f\|\le 1} f(x).$$

Démonstration. Pour le premier point, par linéarité on peut prendre $y = 0$. On peut également supposer que la topologie de E est donnée par une famille séparante (p_α) de semi-normes. Comme x est non nul, il existe alors une semi-norme telle que $p_\alpha(x) > 0$. On pose $f : \mathbf{R}x \to \mathbf{R}$ la forme linéaire définie par $f(tx) = tp_\alpha(x)$; elle vérifie bien $f \le p_\alpha$ sur $\mathbf{R}x$. Par la forme analytique de Hahn-Banach, f admet un prolongement $\widetilde{f}$ à E, qui vérifie $\widetilde{f} \le p_\alpha$. En particulier $\widetilde{f}$ est continue, et $\widetilde{f}(x) = p_\alpha(x) \ne 0$.

Dans le cas particulier où E est un espace de Banach, $\{\|\cdot\|\}$ est une famille séparante de semi-normes, et la construction ci-dessus donne précisément un élément de norme 1 dans E^* tel que $f(x) = \|x\|$. L'inégalité

$$\|x\| \ge \sup_{f\in E^*, \|f\|\le 1} f(x)$$

est la définition même de la norme dans E^*. □

3.5. Forme géométrique.

Théorème 1.30. *Soient* A *et* B *deux ensembles convexes non vides disjoints dans un* evtlc E.

(1) *Si* A *est ouvert, il existe* $\varphi \in E^*$, $\varphi \ne 0$ *tel que* $\sup_A \varphi \le \inf_B \varphi$.

(2) *Si* A *est compact et* B *fermé, il existe* $\varphi \in E^*$ *tel que* $\sup_A \varphi < \inf_B \varphi$.

Démonstration. On commence par prouver un cas particulier.

Lemme 1.31. *Si C est un ouvert convexe non vide et $x_0 \notin C$, il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $\sup_C \varphi \leq \varphi(x_0)$.*

Démonstration. On peut supposer $0 \in C$. On pose $p = j_C$ la jauge de C. Comme $x_0 \notin C$, $p(x_0) \geq 1$. Si l'on définit $f : \mathbf{R}x_0 \to \mathbf{R}$ par $f(tx_0) = t$, on a donc $f \leq p$ sur $\mathbf{R}x_0$. Par Hahn-Banach, f se prolonge en une forme linéaire φ (non nulle car $f \neq 0$) satisfaisant $\varphi \leq p$, en particulier $\sup_C \varphi \leq 1$. Enfin, φ est continue car $|\varphi|$ est borné par 1 sur le voisinage $C \cap -C$ de 0. □

Preuve de (1). On considère $C = A - B$, c'est un ouvert convexe de E, qui ne contient pas 0. Par le lemme précédent appliqué à $x_0 = 0$, il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $\varphi \leq 0$ sur C, c'est-à-dire $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ pour tous $a \in A, b \in B$.

Preuve de (2). Le point délicat est de prouver l'existence d'un voisinage convexe V de A tel que $(A + V) \cap B = \emptyset$. En effet, on peut alors appliquer le point (1) à $A + V$ et B pour obtenir $\varphi \in E^*$ tel que

$$\sup_{A+V} \varphi = \sup_A \varphi + \sup_V \varphi \leq \sup_B \varphi.$$

On conclut on remarquant que $\sup_V \varphi > 0$ car $\varphi \neq 0$ et V est un voisinage de 0.

Reste à prouver l'existence de V. Déjà, pour tout $x \in A$, il existe V_x un voisinage convexe de 0, tel que $(x + V_x + V_x) \cap B = \emptyset$. Comme les $x + V_x$ recouvrent A, par compacité on peut en extraire un recouvrement fini : $A \subset \cup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i})$. Soit $V = \cap_{i=1}^n V_{x_i}$. C'est un voisinage convexe de 0, il reste à voir que $(A + V) \cap B = \emptyset$. Soit donc $y \in A$. Alors $y \in x_i + V_{x_i}$ pour un certain i, et donc $y + V \subset x_i + V_{x_i} + V_{x_i} \subset E \setminus B$, ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 1.32. *Un sous-espace vectoriel F d'un* evtlc *E est dense si et seulement si toute forme linéaire $f \in E^*$ qui s'annule sur F est nulle.*

Démonstration. Si F est dense toute forme linéaire continue nulle sur F est nulle sur son adhérence donc sur E. Réciproquement si F n'est pas dense, on applique la forme géométrique de Hahn-Banach à $B = \overline{F}$ et $A = \{x\}$ avec $x \notin \overline{F}$ pour obtenir $\varphi \in E^*$ telle que $\sup_F \varphi < \varphi(x)$. Donc $\varphi(F) = \{0\}$, cqfd. □

On conclut cette partie par une conséquence remarquable :

3.6. Théorème de Krein-Milman.

Définition 1.33. Soit K une partie d'un espace vectoriel E. Un point x dans K est un point extrémal de K si

$$(x = sy + (1 - s)z \text{ avec } y, z \in K, s \in (0, 1)) \Longrightarrow x = y = z.$$

Plus généralement une partie S de K est extrémale si pour tout $x \in S$,

$$(x = sy + (1 - s)z \text{ avec } y, z \in K, s \in (0, 1)) \Longrightarrow y, z \in S.$$

Théorème 1.34. *Soit K une partie convexe compacte d'un* evtlc *E. Alors K est égal à l'adhérence de l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.*

Démonstration. On introduit l'ensemble $\mathcal{P}$ des parties fermées extrémales non vides de K, ordonné par $S \leq S'$ si $S' \subset S$. C'est un ensemble inductif (une famille de fermés dans un compact qui possède la propriété d'intersection finie a une intersection non vide ; c'est une définition possible de la compacité). Par le lemme de Zorn il admet un élément maximal S_0. S'il n'était pas réduit à un point, par Hahn-Banach il existerait $\varphi \in E^*$ non constante sur S_0. Posons $S_1 = \{x \in$

$S_0, \varphi(x) = \max_{S_0} \varphi\}$. Alors S_1 est fermée non vide et strictement contenue dans S_0. Pour obtenir une contradiction, on montre que S_1 est extrémale. Soient donc $x \in S_1$ et $y, z \in K$, $s \in (0,1)$ tel que $x = sy + (1-s)z$. Par l'extrémalité de S_0, on a en fait $y, z \in S_0$. Et donc comme $\varphi(x) = s\varphi(y) + (1-s)\varphi(z)$, on a $\varphi(y) = \varphi(z) = \max_{S_0} \varphi$. On a donc montré que S_0 est un singleton : l'ensemble des points extrémaux est non vide. Plus généralement cela montre que toute partie extrémale contient un point extrémal.

On définit alors K_0 comme l'adhérence de l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux. K_0 est une partie convexe non vide de K par ce qui précède. Si $K_0 \neq K$, par la forme géométrique de Hahn-Banach (appliquée à $A = K_0$ et $B = \{x\} \subset K \setminus K_0$), il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\max_{K_0} \varphi < \max_K \varphi$. Par l'argument précédent, $\{y \in K, \varphi(y) = \max_K \varphi\}$ est extrémale donc contient un point extrémal. C'est absurde. □

4. Dualité

Soit E est un *evtlc*, et E^* son dual. On peut introduire une famille de semi-normes $(p_f)_{f \in E^*}$ sur E et $(q_x)_{x \in E}$ sur E^* par

$$p_f(x) = |f(x)|, q_x(f) = |f(x)|.$$

La famille $(p_f)_{f \in E^*}$ est séparante par Hahn-Banach, et la famille $(q_x)_{x \in E}$ est séparante de façon tautologique. Ces deux familles définissent donc des topologies d'*evtlc* sur E et E^*, notées respectivement $\sigma(E, E^*)$ et $\sigma(E^*, E)$ et appelées topologie faible sur E et préfaible (ou faible-$*$) sur E^*.

Remarque 1.35. Soit (E, τ) un *evtlc*. Comme les semi-normes $(p_f)_{f \in E^*}$ sont continues pour τ, la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ est plus pauvre que τ : elle a moins d'ouvert, plus de compacts, il existe moins de fonctions continues à valeurs réelles.

Proposition 1.36. *Soit E un* evtlc. *Alors*

(1) $(E, \sigma(E, E^*))^* = E^*$: les seules formes linéaires faiblement continues sur E sont les éléments de E^*.

(2) $(E^*, \sigma(E^*, E))^* = E$: les seules formes linéaires préfaiblement continues sur E^* sont les éléments de E.

Démonstration. L'inclusion $\supset$ dans (1) est évidente par la définition de la topologie faible. L'inclusion inverse aussi car si $\varphi \colon E \to \mathbf{R}$ est faiblement continue elle est aussi fortement continue. Remarquons qu'on a seulement utilisé que E est un *evt*.

(2) est moins tautologique : pour tout x dans E, l'évaluation en x définit une forme linéaire $\sigma(E^*, E)$-continue sur E^*. Autrement dit on a une application linéaire bien définie $E \to (E^*, \sigma(E^*, E))^*$; le fait qu'elle est injective est le théorème de Hahn-Banach : E^* sépare les points. Montrons qu'elle est surjective et prenons $\psi : E^* \to \mathbf{R}$ $\sigma(E^*, E)$-continue. Alors il existe $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que $|\psi(\varphi)| \leq \max_i |\varphi(x_i)|$ pour tout $\varphi \in E^*$. Le lemme suivant permet de conclure que ψ est dans l'espace vectoriel engendré par les évaluations en $x_1, \ldots, x_n$, donc que ψ correspond à l'évaluation en un point de E. □

Lemme 1.37. *Soit F un espace vectoriel, $\psi, \psi_1, \ldots, \psi_n : F \to \mathbf{R}$ des applications linéaires. Alors*

$$\psi \in Vect(\psi_1, \ldots, \psi_n) \iff \cap_i \ker \psi_i \subset \ker \psi.$$

DÉMONSTRATION. $\Longrightarrow$ est évident. Réciproquement soit $G \subset \mathbf{R}^n$ le sous-espace défini par

$$G = \{(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)), x \in F\}.$$

L'application $\Lambda : G \to \mathbf{R}$ définie par $\Lambda(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)) = \psi(x)$ est bien définie et peut donc être étendue en une application linéaire $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, nécessairement de la forme $(s_1, \ldots, s_n) \mapsto \sum \lambda_i s_i$ pour un certain $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$. On a donc $\psi(x) = \sum_i \lambda_i \psi_i(x)$ pour tout $x \in F$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Dans la suite de cette section on se restreindra aux espaces de Banach, et on appelera topologie forte la topologie induite par la norme.

4.1. Topologie faible. Soit E un espace de Banach.

PROPOSITION 1.38. *Soit (x_n) un suite qui converge faiblement vers x dans E. Alors x_n est bornée et $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.*

DÉMONSTRATION. La suite x_n est bornée par le théorème de Banach-Steinhaus. Pour l'inégalité, pour tout $\varphi \in E^*$ de norme 1 on a

$$\varphi(x) = \lim_n \varphi(x_n) \leq \liminf_n \|x_n\|.$$

En prenant le sup sur φ on obtient l'inégalité voulue. $\square$

On a vu que la topologie faible est plus faible que la topologie forte ; si $\dim E = \infty$ elle est strictement plus faible puisque (exercice) tout voisinage faible de 0 contient un sous-espace vectoriel de codimension finie. On a néanmoins le

THÉORÈME 1.39. *Soit $C \subset E$ une partie convexe d'un espace de Banach. Alors C est fortement fermée si et seulement si C est faiblement fermée.*

DÉMONSTRATION. Une direction est claire. Pour l'autre supposons que C est fortement fermée, et montrons que $X \setminus C$ est faiblement ouvert. Soit $x \in X \setminus C$. Par Hahn-Banach (forme géométrique) il existe $\varphi \in E^*$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\sup_C \varphi < \alpha < \varphi(x)$. Or $\varphi^{-1}(\alpha, \infty)$ est un ouvert faible contenant x, et il ne rencontre pas C, donc $X \setminus C$ est ouvert. $\square$

COROLLAIRE 1.40 (Lemme de Mazur). *Soit (x_n) une suite dans E qui converge faiblement vers x. Alors il existe une suite (y_m) de combinaisons convexes des x_n qui converge fortement vers x.*

DÉMONSTRATION. Par le théorème précédent, C, l'adhérence forte de l'enveloppe convexe des x_n, est faiblement fermé donc contient x. $\square$

4.2. Topologie préfaible. La preuve de la proposition suivante est exactement la même que pour la topologie faible.

PROPOSITION 1.41. *Soit (x_n) un suite qui converge préfaiblement vers x dans E^*. Alors x_n est bornée et $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.*

Dans la suite cette partie on notera B_E La boule unité fermée de E :

$$B_E = \{x \in E, \|x\| \leq 1.\}$$

On peut montrer que B_E n'est fortement compact que si E est de dimension infinie. Le théorème de Banach-Alaoglu justifie l'introduction de la topologie préfaible du point de vue des applications, puisqu'il affirme que B_E est préfaiblement compact lorsque E est un dual.

THÉORÈME 1.42 (Théorème de Banach-Alaoglu). *B_{E^*} est préfaiblement compacte.*

DÉMONSTRATION. Les éléments de E^* sont des fonctions de E dans $\mathbf{R}$, on peut donc plonger E^* dans $\mathbf{R}^E$ (=les fonctions de E dans $\mathbf{R}$), et la topologie préfaible s'identifie alors à la restriction à E^* de la topologie produit. Il suffit donc de voir que la boule unité fermée de E^* correspond à une partie compacte de $\mathbf{R}^E$.

Une première remarque est que les fonctions linéaires (non necessairement continues) correspondent à un sous-ensemble L fermé, comme intersection de fermés de la forme $\{\omega \in \mathbf{R}^E, \omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y)\}$ ou $\{\omega \in \mathbf{R}^E, \omega(sx) = s\omega(x)\}$ pour $x, y \in E$, $s \in \mathbf{R}$.

Ensuite une application linéaire $\omega : E \to \mathbf{R}$ appartient à B_{E^*} si et seulement si $|\omega(x)| \leq \|x\|$, $\forall x \in E$. Autrement dit B_{E^*} correspond à l'intersection du fermé L et de $\prod_{x \in E}[-\|x\|, \|x\|]$ qui est compacte par le théorème de Tychonoff. Ce qui montre que B_{E^*} est préfaiblement compact. □

Il est intéressant de savoir quand B_{E^*} est métrisable pour la topologie préfaible (un espace compact métrisable est séquentiellement compact).

THÉORÈME 1.43. *Soit E un espace de Banach. Il y a équivalence entre*

(1) E est séparable

(2) La restriction de la topologie préfaible à B_{E^*} est métrisable.

REMARQUE 1.44. On peut montrer que $(E^*, \sigma(E^*, E))$ n'est jamais métrisable en dimension infinie (voir tds).

DÉMONSTRATION. Supposons E séparable, et soit (x_n) une suite dense dans B_E. On définit $d(\varphi, \psi) = \sum_n 2^{-n}|(\varphi - \psi)(x_n)|$. C'est une distance sur B_{E^*}, qui (toujours le même exercice !) induit la topologie la moins fine rendant continue les applications $\varphi \mapsto \varphi(x_n)$. Il suffit de voir que cela implique la continuité de $\varphi \mapsto \varphi(x)$ pour tout x dans la boule de E. Soit donc $\varepsilon > 0$ et n tel que $\|x - x_n\| \leq \varepsilon$. Alors

$$|\varphi(x_n) - \psi(x_n)| \leq \varepsilon \Longrightarrow |\varphi(x) - \psi(x)| \leq 3\varepsilon$$

ce qui montre le résultat voulu.

Réciproquement si cette topologie est métrisable, on a une base dénombrable (U_n) de voisinages de 0, de la forme

$$U_n = \{\varphi \in B_{E^*}, |\varphi(x)| < \varepsilon_n \ \forall x \in A_n\}$$

avec A_n une partie finie de E. Comme $\cap_n U_n = \{0\}$, on a en particulier que

$$\varphi(x) = 0, \ \forall x \in \cup_n A_n \Longrightarrow \varphi = 0.$$

Par Hahn-Banach, ceci implique que $\mathrm{Vect}(\cup_n A_n)$ est dense, donc le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par $\cup_n A_n$ est une partie dénombrable dense de E. □

COROLLAIRE 1.45. *Si E est un espace de Banach séparable, toute suite bornée dans E^* admet une sous-suite préfaiblement convergente.*

4.3. Réflexivité. Soit E un espace de Banach.

On peut voir les éléments de E comme des formes linéaires continues sur E^*. Autrement dit en notant $E^{**} = (E^*)^*$ le bidual de E, on a une injection canonique $J_E : E \to E^{**}$, donnée par $J_E(x)(\varphi) = \varphi(x)$. C'est une isométrie.

DÉFINITION 1.46. On dit que E est *réflexif* si J_E est surjective.

On a la caractérisation suivante de la réflexivité :

THÉORÈME 1.47. *Un espace de Banach E est réflexif si et seulement si B_E est faiblement compacte.*

DÉMONSTRATION. Lorsque E est réflexif on a $\sigma(E, E^*) = \sigma(E^{**}, E^*)$ et la boule unité est faiblement compacte par le théorème de Banach-Alaoglu. Pour la réciproque si on suppose que B_E est $\sigma(E, E^*)$-compact, $J_E(B_E)$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-compact comme image continue d'un compact. En particulier $J_E(B_E)$ est fermé pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$ (une partie compacte d'un espace topologique *séparé* est fermée). On conclut par le

LEMME 1.48 (Lemme de Goldstine). *Soit E un espace de Banach. L'adhérence pour $\sigma(E^{**}, E^*)$ de $J_E(B_E)$ est $B_{E^{**}}$.*

qui implique que $J_E(B_E) = B_{E^{**}}$ et donc que $J_E(E) = E^{**}$. □

PREUVE DU LEMME DE GOLDSTINE. Par la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach il s'agit de montrer que pour toute forme linéaire φ $\sigma(E^{**}, E^*)$-continue sur E^{**}, $\sup_{J_E(B_E)} \varphi = \sup_{B_{E^{**}}} \varphi$. Mais par la Proposition 1.36, φ correspond à un élément de E^*, et il s'agit donc de montrer que $\sup_{x \in B_E} \varphi(x) = \sup_{\psi \in B_{E^{**}}} \psi(\varphi)$, ce qui est clair puisque les deux termes sont égaux à $\|\varphi\|_{E^*}$. □

On en déduit les corollaires suivants

COROLLAIRE 1.49. *Un sous-espace fortement fermé M d'un espace de Banach réflexif E est réflexif.*

DÉMONSTRATION. On vérifie que la topologie $\sigma(M, M^*)$ coïncide avec la restriction à M de $\sigma(E, E^*)$. Alors B_M est un convexe fortement fermé, donc faiblement fermé de E. On conclut par le théorème précédent. □

COROLLAIRE 1.50. *Si E est un espace de Banach réflexif, toute suite bornée dans E admet une sous-suite faiblement convergente.*

DÉMONSTRATION. Si (x_n) est une suite bornée, on applique le Corollaire 1.45 à l'adhérence de $Vect(x_n)$, qui est un espace séparable et réflexif par ce qui précède. □

4.4. Uniforme convexité.

DÉFINITION 1.51. Un espace de Banach E est dit *uniformément convexe* si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x, y \in B_E, \|x - y\| > \varepsilon \Longrightarrow \|(x + y)/2\| < 1 - \delta.$$

Il faut faire un dessin pour dessin pour comprendre cette définition, et se convaincre que la terminologie est bien choisie. Le formule dit que la sphère unité (l'ensemble des élements de norme égale à 1) ne contient pas de segment non trivial, et de manière uniforme : si deux points de la sphère unité sont écartés d'au moins ε, alors le segment qui les relie n'appartient pas au δ-voisinage de la sphère unité.

EXEMPLE 1.52. Les espaces de Hilbert sont uniformément convexes (formule du parallélogramme) ; les espaces L_1 et L_∞ ne le sont pas (sauf lorsqu'ils sont de dimension 1).

Le théorème suivant affirme qu'une condition géométrique locale (l'uniforme convexité) a une conséquence sur la topologie globale (réflexivité). L'auteur de ces lignes trouve cela remarquable.

Théorème 1.53 (Milman-Pettis). *Un espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Démonstration. Soit $\xi \in E^{**}$. On va montrer que ξ appartient à l'adhérence forte de $J_E(E)$. Comme $J_E(E)$ est un sous-espace fermé de E^{**} (il est complet) cela concluera la preuve. Par homogénéité on peut supposer $\|\xi\| = 1$.

On note pour simplifier $B = J_E(B_E)$. Le Lemme de Goldstine affirme que B est préfaiblement dense dans $B_{E^{**}}$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ donné par la continuité uniforme, et $\varphi \in B_{E^*}$ satisfaisant $\xi(\varphi) > 1 - \delta$. Soit V le voisinage préfaible de ξ donné par $V = \{\eta \in E^{**}, \eta(\varphi) > 1 - \delta\}$ et $x \in B \cap V$; l'existence d'un tel x est assurée par le Lemme de Goldstine. Pour tout autre $y \in B \cap V$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq \frac{\varphi(x+y)}{2} > 1 - \delta, \text{ donc } \|x - y\| < \varepsilon.$$

Autrement dit $B \cap V$ est contenu dans $B_{E^{**}}(x, \varepsilon)$. Cela implique que ξ, qui appartient à l'adhérence préfaible de $B \cap V$ (Goldstine), appartient aussi à $B_{E^{**}}(x, \varepsilon)$. On a trouvé un élément de B tel que $\|x - \xi\| < \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer. □

On peut montrer (voir Tds) que pour $1 < p < \infty$ et pour tout espace mesuré (X, μ), l'espace $L_p(X, \mu)$ est uniformément convexe. Par le théorème de Milman-Pettis, il est donc réflexif. On en déduit facilement (on utilise uniquement l'inégalité de Hölder) le théorème de dualité L_p-L_q démontré en cours d'intégration sous l'hypothèse supplémentaire que μ est σ-finie.

On vérifie facilement que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est une bijection linéaire entre espaces de Banach (et donc $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ par le théorème de l'application ouverte), E est réflexif si et seulement si F l'est. On déduit donc du Théorème 1.53 qu'un espace de Banach qui admet une norme équivalente uniformément convexe est réflexif.

Bien sûr, il existe des espaces de Banach réflexifs non uniformément convexes (par exemple les espaces L_1 de dimension finie). Un peu plus subtil, il existe des espaces de Banach réflexifs qui ne sont pas isomorphes à un espace uniformément convexe. Un exemple est donné par $\oplus_{\ell_2} \ell_\infty^n$, c'est-à-dire l'ensemble des suites (x_n) avec $x_n \in \ell_\infty^n$ telles que $\sum_n \left(\|x_n\|^2_{\ell_\infty^n}\right)^{1/2} < \infty$. Rappelons que ℓ_∞^n est l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ muni de la norme « max des coordonnées ».

5. Notion d'adjoint

On revient brièvement au cas général des *evtlc*. Nous avons vu que le dual d'un *evtlc* E simple peut être très compliqué, au point que la description de ses éléments semble inaccessible. La proposition suivante est particulièrement intéressante dans ce cas, puisqu'elle permet de construire très facilement des opérateurs sur E^*. Le chapitre suivant, sur les distributions, repose entièrement sur ce principe.

Proposition 1.54. *Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue entre* evtlc. *Il existe une unique application linéaire, notée $T^* : F^* \to E^*$ qui satisfait $T^*(\varphi)(x) = \varphi(Tx)$ pour tout $\varphi \in F^*$ et $x \in E$. De plus T^* est continue pour les topologies préfaibles. T est appelé* adjoint *de T.*

Si E et F sont des espaces de Banach, T^* est fortement continue et

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)} = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in F^*$. La formule $T^*(\varphi)(x) = \varphi(Tx)$ définit de manière unique une forme linéaire continue sur E comme composée des applications linéaires continues T et φ. Autrement dit on a bien une application linéaire $T^* : F^* \to E^*$. Pour vérifier qu'elle est préfaiblement continue, il faut vérifier que pour tout $x \in E$, l'application $\varphi \in F^* \mapsto |T^*(\varphi)(x)| = |\varphi(Tx)|$ est préfaiblement continue, ce qui est la définition de la topologie préfaible sur F^*.

Lorsque E et F sont des espaces de Banach, en utilisant la définition de la norme dans E^* et Hahn-Banach dans F, on obtient

$$\begin{aligned}
\sup_{\varphi\in B_{F^*}} \|T^*(\varphi)\|_{E^*} &= \sup_{\varphi\in B_{F^*}} \sup_{x\in B_E} |T^*(\varphi)(x)| \\
&= \sup_{x\in B_E} \sup_{\varphi\in B_{F^*}} |\varphi(Tx)| \\
&= \sup_{x\in B_E} \|Tx\|_F = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que T^* est borné et $\|T^*\| = \|T\|$. □

Chapitre 2

Distributions

1. Notations et partitions de l'unité

Dans ce chapitre, Ω sera toujours un ouvert de $\mathbf{R}^d$ pour $d \in \mathbf{N}^*$. On écrira $K \subset\subset \Omega$ pour signifier que K est un compact de Ω.

On adoptera la notation suivante, due à Laurent Schartz : pour un ouvert Ω de $\mathbf{R}^d$, on notera $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions C^∞ à support compact sur Ω. Pour $K \subset\subset \Omega$, $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ sera les fonctions dont le support est contenu dans K. Explicitement, $\mathcal{D}_K$ est l'espace vectoriel des fonctions C^∞ sur $\mathbf{R}^d$ qui sont nulles en dehors de K ; et $\mathcal{D}(\Omega) = \cup_K \mathcal{D}_K$. On a vu dans le premier chapitre que $\mathcal{D}_K$ est un espace de Fréchet, pour la famille de seminormes [1] $(\| \cdot \|_{N,K})_{N \in \mathbf{N}}$ (que l'on notera parfois $\| \cdot \|_{N,K}$) définies par

$$\|\varphi\|_{N,K} = \max_{|\alpha| \leq N} \max_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Il n'est pas complètement évident que $\mathcal{D}(\Omega)$ est non nul. En fait, dès que K est d'intérieur non vide, $\mathcal{D}_K$ est de dimension infinie. Pour cela, on rappelle un lemme qui permet de définir des fonctions C^∞ à support compact.

Lemme 2.1. *Soit $x \in \mathbf{R}^d$ (muni de la norme euclidienne usuelle notée $|\cdot|$) et $0 < r < R$. Il existe une fonction C^∞ φ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$, avec $\varphi(y) = 1$ si $|x - y| \leq r$ et $\varphi(y) = 0$ si $|x - y| \geq R$.*

Démonstration. Il suffit de construire φ dans le cas particulier où $d = 1$ et $x = 0$. En effet, alors la fonction $y \mapsto \varphi(|x - y|)$ convient. Un exercice classique montre que la fonction f sur $\mathbf{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t(1-t)}} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est C^∞ (il s'agit de montrer que $f^{(k)}(t) \to 0$ quand $t \to 0$ ou $t \to 1$; ceci découle de l'observation, démontrée par récurrence sur k, que $f^{(k)}(t) = R_k(t) f(t)$ pour une certaine fraction rationnelle R_k dont les pôles sont contenus dans $\{0, 1\}$.). Sa primitive F qui s'annule en 0 est donc C^∞ croissante, nulle sur $(-\infty, 0]$ et est constante (disons égale à C) sur $[1, \infty]$. Il suffit de poser $\varphi(s) = \frac{1}{C} F\left(\frac{R^2 - s^2}{R^2 - r^2}\right)$. $\square$

On en déduit un résultat de partitions de l'unité qui est bien utile en pratique

Proposition 2.2 (Partitions de l'unité). *Soit Γ un recouvrement ouvert d'un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^d$. Alors il existe une suite $(\psi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ de fonctions positives telle que*

— *$\forall n$, $\exists \omega_n \in \Gamma$ tel que supp$(\psi_n) \subset \omega_n$.*

1. ces seminormes sont en fait des normes

— *$\forall K \subset\subset \Omega$, $\exists N \in \mathbf{N}$, tel que $\psi_1 + \cdots + \psi_N = 1$ au voisinage de K.*
— *$\sum_n \psi_n = 1$ sur Ω (sommes localement finie).*
En particulier, pour tout $K \subset\subset \Omega$ il existe $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\psi(\Omega) \subset [0,1] \text{ et } \psi = 1 \text{ sur } K.$$

Démonstration. L'hypothèse que Γ est un recouvrement ouvert de Ω implique (exercice) qu'il existe une suite V_n de boules telles que $\cup_n V_n = \Omega$ et pour tout n, l'adhérence de V_n est contenue dans un élément ω_n de Γ.

Par le lemme précédent, pour tout n il existe $\varphi_n : \Omega \to [0,1]$ dont le support est contenu dans ω_n et telle que $\varphi_n = 1$ sur V_n. On pose alors $\psi_1 = \varphi_1$ et $\psi_n = (1-\varphi_1)\dots(1-\varphi_{n-1})\varphi_n$. Il est clair que ψ_n est C^∞ à valeurs dans $[0,1]$, de support contenu dans ω_n. De plus on vérifie par récurrence que $\psi_1 + \cdots + \psi_n = 1 - (1-\varphi_1)\dots(1-\varphi_n)$. En particulier, $\psi_1 + \cdots + \psi_n = 1$ sur $\cup_{i=1}^n V_i$. La Proposition découle facilement du fait que $\cup_n V_n = \Omega$. □

2. Distributions : définitions et premières opérations

Définition 2.3. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$. Une *distribution* sur Ω est une forme linéaire Λ sur $\mathcal{D}(\Omega)$ dont la restriction à chaque $\mathcal{D}_K$ est continue : pour tout $K \subset\subset \Omega$, il existe un entier N_K et une constante C_K telle que

$$|\Lambda(\varphi)| \le C_K \|\varphi\|_{N_K,K} \forall \varphi \in \mathcal{D}_K.$$

On notera $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω, que l'on munira de la topologie d'*evtlc* donnée par les seminormes $\Lambda \mapsto |\Lambda(\varphi)|$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Explicitement, la notion de convergence des distributions est donnée par

Proposition 2.4. *Soit Λ_n une suite de distributions telle que $\Lambda_n(\varphi) \in \mathbf{R}$ converge vers une limite notée $\Lambda(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors Λ est une distribution et est la limite de Λ_n dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Démonstration. Le fait que Λ est une distribution est le théorème de Banach-Steinhaus appliqué à chaque $\mathcal{D}_K$ qui est un espace de Fréchet. Le reste de la proposition est la définition même de la topologie sur $\mathcal{D}'(\Omega)$. □

Définition 2.5. Une distribution Λ est dite *d'ordre fini* s'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $K \subset\subset \Omega$, il existe C_K telle que

$$|\Lambda(\varphi)| \le C_K \|\varphi\|_N \forall \varphi \in \mathcal{D}_K.$$

Le plus petit tel N est appelé l'ordre de Λ.

Il n'est pas très difficile de construire des distributions d'ordre infini (exercice), mais la plupart des exemples naturels sont d'ordre fini.

2.1. Exemples de distributions. Toute fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbf{R}$ et dont la restriction à tout compact est intégrable définit une distribution Λ_f, par la formule

$$\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi.$$

En effet on a $|\Lambda_f(\varphi)| \le (\int_K |f|)\|\varphi\|_{0,K}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K$. Λ_f est d'ordre 0. Par abus de notation, on oubliera rapidement la notation Λ_f et on identifiera f et la distribution associée Λ_f.

Plus généralement, toute mesure positive μ sur Ω telle que $\mu(K) < \infty$ pour tout $K \subset\subset \Omega$ définit une distribution Λ_μ d'ordre 0 par la formule

$$\Lambda_\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi d\mu.$$

Un exemple important est la distribution $\delta \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ qui correspond à la masse de Dirac en $\{0\}$: $\delta\varphi = \varphi(0)$.

THÉORÈME 2.6. *Toute distribution positive sur Ω (dans le sens $\Lambda(\varphi) \geq 0$ pour tout $\varphi \geq 0$) est une mesure positive localement finie sur Ω.*

DÉMONSTRATION. (Esquisse) L'essentiel de la preuve consiste à montrer qu'une distribution positive s'étend en une forme linéaire continue positive sur $C_c(\Omega)$, puisque le théorème de Riesz permet alors d'identifier Λ avec une mesure. Soit $K \subset\subset \Omega$; il s'agit de montrer que $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_\infty$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K$. En effet, cela impliquera que Λ s'étend en un forme linéaire continue (de norme au plus C) sur l'adhérence dans $C(\Omega)$ de $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Comme toute fonction continue φ à support compact sur Ω est limite uniforme de fonctions dans $\mathcal{D}_K$ pour un certain K qui ne dépend que du support de φ, cela concluera la preuve.

Par la proposition 2.2 il existe une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\psi(\Omega) \subset [0,1] \text{ et } \psi = 1 \text{ sur } K.$$

Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K$, on a $-\|\varphi\|_\infty\psi(x) \leq \varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty\psi(x)$, et donc $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_\infty$ avec $C = \Lambda(\psi)$. □

2.2. Apparté : structure d'*evtlc* sur $\mathcal{D}(\Omega)$. La définition 2.3 est sans doute la définition des distributions avec laquelle il est le plus pratique de travailler, mais comme le suggèrent les notations, il y a une structure d'*evtlc* naturelle sur $\mathcal{D}(\Omega)$, pour laquelle $\mathcal{D}'(\Omega)$ correspond au dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$, muni de la topologie préfaible. Il n'est pas indispensable de connaître cette topologie pour travailler avec les distributions.

Cette structure d'*evtlc* est appelée limite inductive (au sens des *evtlc*) des espaces de Fréchet $\mathcal{D}_K$ pour $K \subset\subset \Omega$, et correspond à la topologie d'*evtlc* la plus fine qui rende continues les inclusions $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Explicitement, on note β l'ensemble des parties $V \subset \mathcal{D}(\Omega)$ convexes et équilibrées ($-V = V$) telles que $V \cap \mathcal{D}_K$ est un ouvert de $\mathcal{D}_K$ pour tout $K \subset\subset \Omega$. On note τ l'ensemble des réunions quelconques d'ensembles de la forme $\varphi + V$ pour $V \in \beta$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

PROPOSITION 2.7. *Avec la définition précédente :*

*(1) τ est une topologie d'*evtlc *sur $\mathcal{D}(\Omega)$, et β forme une base de voisinages de 0 pour τ.*

(2) Une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ converge vers φ si et seulement si il existe $K \subset\subset \Omega$ tel que $\varphi_n \in \mathcal{D}_K$ pour tout n et φ_n converge vers φ dans $\mathcal{D}_K$.

(3) $\mathcal{D}'(\Omega)$ coincide avec $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)^*$.

DÉMONSTRATION DE (1). On commence par prouver le

LEMME 2.8. *Soit $V_1 \in \beta$ et $\varphi \in V_1$. Il existe $V_2 \in \beta$ tel que $\varphi + V_2 \subset V_1$.*

DÉMONSTRATION. Soit K tel que $\varphi \in \mathcal{D}_K$. Alors comme $\mathcal{D}_K \cap V_1$ est un ouvert de $\mathcal{D}_K$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi \in (1-\varepsilon)(\mathcal{D}_K \cap V_1)$. Il suffit de poser $V_2 = \varepsilon V_1$. Il est clair que $V_2 \in \beta$, et $\varphi + V_2 \subset (1-\varepsilon)V_1 + \varepsilon V_1 = V_1$ (car V_1 est convexe). □

Ce lemme implique que τ est une topologie et que β est une base de voisinages de 0. Il reste à vérifier que c'est une topologie d'*evt*.

Continuité de l'addition. Si $V \in \beta$, $(\varphi + 1/2V) + (\psi + 1/2V) = (\varphi + \psi) + V$.

Continuité de la multiplication. Soit $\alpha_0 \in \mathbf{R}$ et $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\alpha\varphi - \alpha_0\varphi_0 = (\alpha - \alpha_0)\varphi_0 + \alpha(\varphi - \varphi_0)$. Pour tout $W \in \beta$, $(\alpha - \alpha_0)\varphi_0 \in W/2$ pour tout α assez proche de α_0, et de même $\alpha(\varphi - \varphi_0) \in W/2$ si $\varphi - \varphi_0 \in (2 + 2|\alpha_0|)^{-1}W$ et si $|\alpha - \alpha_0| \leq 1$.

Séparation. Si $\varphi \neq \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe $x \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|\psi(x) - \varphi(x)| > \varepsilon$. Alors $W = \{f \in \mathcal{D}(\Omega), |f(x)| < \varepsilon\}$ appartient à β et $\varphi + W \cap \psi + W = \emptyset$. $\square$

Démonstration de (2). Il est clair qu'une suite dans $\mathcal{D}_K$ qui converge dans $\mathcal{D}_K$ converge aussi pour τ. Il s'agit de montrer la réciproque. Soit donc φ_n une suite qui converge vers φ pour τ. Supposons par l'absurde que $\{\varphi_n, n \in \mathbf{N}\}$ n'est inclus dans aucun $\mathcal{D}_K$. Alors quitte à extraire, il existe une suite $x_n \in \Omega$ qui sort de tout compact de Ω et telle que $\varphi_n(x_n) \neq 0$. On pose $c_n = |\varphi(x_n)|$, alors $V := \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega), |\psi(x_n)| < c_n \forall n\}$ appartient à β et $\varphi_n - \varphi \notin V$ pour tout n tel que x_n n'est pas dans le support de φ. Cela contredit l'hypothèse que φ_n converge vers φ.

Il existe donc $K \subset\subset \Omega$ tel que $\varphi_n \in \mathcal{D}_K$ pour tout n et $\varphi \in \mathcal{D}_K$. Alors comme $\{\psi \in \mathcal{D}(\Omega), \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_\Omega |D^\alpha \psi| < \varepsilon\}$ appartient à β pour tout N et tout ε, on a $\|\varphi_n - \varphi\|_{N,K} \to 0$ pour tout N, c'est-à-dire φ_n converge vers φ dans $\mathcal{D}_K$. $\square$

Démonstration de (3). C'est évident. $\square$

Remarque 2.9. La preuve de (2) montre de même que toute suite de Cauchy est en fait contenue dans un $\mathcal{D}_K$, et donc converge. On peut en déduire que la topologie τ n'est pas métrisable. En effet, si c'était le cas, $\mathcal{D}(\Omega)$ serait un espace de Baire puisque par la discussion à la fin de la section 2 du chapitre 1, la topologie serait métrisable par une distance invariante, qui serait donc complète. Or les sous-espaces $\mathcal{D}_K$ sont des fermés d'intérieur vide de $\mathcal{D}(\Omega)$, et si on choisit une suite exhaustive (K_n) de compacts de Ω, on obtiendrait une contradiction avec le théorème de Baire en écrivant $\mathcal{D}(\Omega) = \cup_n \mathcal{D}_{K_n}$.

Une conséquence de cette description est le

Lemme 2.10. $\{\Lambda_f, f \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ *est dense dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration. Par Hahn-Banach, il faut montrer que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui s'annule sur le sous-espace $\{\Lambda_f, f \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ est nulle. Mais par la Proposition 1.36 apliquée à l'*evtlc* $E = \mathcal{D}(\Omega)$, une telle forme linéaire est de la forme $\Lambda \mapsto \Lambda\varphi$ pour un certain $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. L'hypothèse $\Lambda_\varphi \varphi = 0$ implique donc que $\int \varphi^2 = 0$, c'est-à-dire $\varphi = 0$. $\square$

2.3. Dérivation des distributions. Comme $\mathcal{D}'(\Omega)$ est défini comme un espace de formes linéaires, on définira la plupart des opérations sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ par dualité. Pour cela, on appliquera le principe général suivant, qui est une reformulation de la Proposition 1.54 : si $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ est une application linéaire qui laisse invariants tous les $\mathcal{D}_K$ ($T(\mathcal{D}_K) \subset \mathcal{D}_K$) et dont la restiction $T : \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}_K$ est continue pour tout $K \subset\subset \Omega$, alors la formule $T^*\Lambda(f) = \Lambda(Tf)$ définit une application linéaire $\mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, qui est continue comme composée d'applications linéaires continues. En particulier $T^*\Lambda$ est une distribution.

Soit $\alpha \in \mathbf{N}^d$. L'opérateur de dérivation partielle D^α est clairement continu sur chaque $\mathcal{D}_K$. En appliquant le principe précédent, on peut définir

Définition 2.11. Soit $\alpha \in \mathbf{N}^d$ et $\Lambda \in D'(\Omega)$. La dérivée $D^\alpha\Lambda$ de Λ est la distribution

$$D^\alpha\Lambda(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\varphi).$$

Cette définition est justifiée par la formule d'intégration par partie, qui implique

Lemme 2.12. *Soit f une fonction de classe C^N sur Ω. Alors pour tout $|\alpha| \leq N$, $D^\alpha\Lambda_f = \Lambda_{D^\alpha f}$.*

Démonstration. Par récurrence il suffit de traiter le cas où $|\alpha| = 1$, et alors $D^\alpha f = \partial_k f$ pour un $k \in \{1, \ldots, d\}$. Il faut montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \varphi \partial_k f = -\int_\Omega (\partial_k \varphi) f.$$

Par Fubini on se ramène au cas où $d = 1$. Alors on peut écrire Ω comme une réunion disjointe d'intervalles, et on applique la formule d'intégration par partie sur chacun de ces intervalles (les contributions au bord disparaissent car φ est à support compact). $\square$

Par le principe général, l'application $\Lambda \mapsto D^\alpha\Lambda$ est alors continue sur $\mathcal{D}'(\Omega)$. En particulier :

Proposition 2.13. *Soit Λ_n une suite de distributions qui converge vers Λ. Alors pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^d$, $D^\alpha\Lambda_n$ converge vers $D^\alpha\Lambda$.*

2.4. Multiplication par une fonction C^∞. Soit $f \in C^\infty(\Omega)$. On sait que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et par le théorème du graphe fermé (ou la formule de Leibniz si on veut rester explicite) la restriction à $\mathcal{D}_K$ de $\varphi \mapsto f\varphi$ est continue pour chaque $K \subset\subset \Omega$. On peut donc définir

Définition 2.14. Soit $f \in C^\infty(\Omega)$ et $\Lambda \in D'(\Omega)$. La multiplication de f par Λ, $f\Lambda$, est la distribution

$$f\Lambda(\varphi) = \Lambda(f\varphi).$$

Proposition 2.15 (Formule de Leibniz). *Soit $f \in C^\infty(\Omega)$. Alors $\Lambda \mapsto f\Lambda$ est continue sur $D'(\Omega)$. De plus pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^d$,*

$$D^\alpha(f\Lambda) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta}\Lambda.$$

Démonstration. Le fait que $\Lambda \mapsto f\Lambda$ est continue est le principe général ci-dessus. Pour la formule de dérivation, par récurrence on se ramène au cas où $|\alpha| = 1$, auquel cas il faut la tester sur tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Si $\alpha = (\delta_{j,k})_{j=1}^d$, $D^\alpha = \partial_f$ et

$$\partial_k(f\Lambda)(\varphi) = -\Lambda(f\partial_k\varphi) = -\Lambda(\partial_k(f\varphi) - (\partial_k f)\varphi) = (f\partial_k\Lambda)(\varphi) + ((\partial_k f)\Lambda)(\varphi).$$

Une preuve moins élémentaire consisterait à dire que par le lemme 2.12 et la formule de Leibniz pour les fonctions, la Proposition est vraie pour $\Lambda = \Lambda_g$ et $g \in C^\infty(\Omega)$, et de conclure par densité (lemme 2.10). $\square$

2.5. Support.

DÉFINITION 2.16. Le *support* de $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est le complémentaire de l'union de tous les ouverts ω sur lesquels Λ s'annule, i.e. tels que $\Lambda\varphi = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$.

DÉFINITION 2.17. On notera $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions à support compact sur Ω.

On a en fait la caractérisation suivante.

PROPOSITION 2.18. *Le support de Λ est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel Λ s'annule. De manière équivalente, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est nulle au voisinage du support de Λ, alors $\Lambda\varphi = 0$.*

DÉMONSTRATION. Il faut montrer que si Λ s'annule sur une famille d'ouverts $(\omega_i)_{i\in I}$, alors Λ s'annule sur $\cup_i \omega_i$. Soit donc $\varphi \in \mathcal{D}(\cup_i \omega_i)$. Par la proposition 2.2 il existe une famille finie $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ de fonctions C^∞ à support dans un des ω_i et telle que $\psi_1 + \cdots + \psi_n = 1$ sur le support de φ. Alors

$$\Lambda(\varphi) = \Lambda(\sum_i \psi_i \varphi) = \sum_i \Lambda(\psi_i \varphi) = 0.$$

□

REMARQUE 2.19. Attention : il n'est pas vrai que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est nulle sur le support de Λ, alors $\Lambda\varphi = 0$. Un contre-exemple est donné pour $\Omega = \mathbf{R}$ et $\Lambda = \delta'$. Le support de Λ est $\{0\}$ et il existe des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nulles en 0 telles que $\Lambda\varphi = -\varphi'(0) \neq 0$.

THÉORÈME 2.20. *Une distribution $\Lambda \in \mathcal{E}'(\Omega)$ à support compact est d'ordre fini. Et même il existe C, N et un compact $K \subset\subset \Omega$ tel que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), |\Lambda\varphi| \leq C \max_{|\alpha|\leq N} \max_K |D^\alpha \varphi| \leq C\|\varphi\|_N. \tag{3}$$

De plus, Λ s'étend de manière unique en une forme linéaire continue sur $C^\infty(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\psi(\Omega) \subset [0,1] \text{ et } \psi = 1 \text{ sur le support de } \Lambda.$$

L'existence de ψ est assurée par la Proposition 2.2. Alors $\psi\Lambda = \Lambda$. Soit $K = supp(\psi)$, et C_K, N tels que $|\Lambda(\phi)| \leq C_K \|\phi\|_N$ pour $\phi \in \mathcal{D}_K$. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$|\Lambda(\varphi)| \leq C_K \|\psi\varphi\|_N \leq C' \max_{|\alpha|\leq N} \max_K |D^\alpha \psi| \leq C'\|\varphi\|_N.$$

La dernière inégalité découle de la formule de Leibniz.

La formule $|\Lambda\varphi| \leq C \sup_{|\alpha|\leq N} \sup_K |D^\alpha \varphi|$ implique que Λ est continue pour la topologie d'espace de Fréchet de $C^\infty(\Omega)$, donc Λ s'étend en une forme linéaire continue sur l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $C^\infty(\Omega)$, qui est $C^\infty(\Omega)$. □

THÉORÈME 2.21 (Distributions à support singleton). *Soit Λ une distribution dont le support est un singleton $\{a\}$. Soit N l'ordre de Λ, alors il existe $(c_\alpha)_{|\alpha|\leq N} \subset$ $\mathbf{R}$ tel que*

$$\Lambda = \sum_{|\alpha|\leq N} c_\alpha D^\alpha \delta_a$$

où δ_a est l'évaluation en a : $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$.

Démonstration. Par le lemme 1.37 il suffit de montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $D^\alpha\varphi(a) = 0$ pour tout $|\alpha| \leq N$, alors $\Lambda(\varphi) = 0$. Tout d'abord la formule de Taylor implique que pour $|\beta| \leq N$

$$|D^\beta\varphi(x)| = O(|x-a|^{N+1-|\beta|}) \text{ au voisinage de } a.$$

Pour pouvoir appliquer (3), on va tronquer φ au voisinage de a.

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ qui vaut 1 sur un voisinage de 0 et 0 sur $\mathbf{R}^d \setminus B(0,1)$, et $\psi_n(x) = \psi(n(x-a))$. Alors le support de ψ_n est contenu dans $B(a, 1/n)$ et donc pour n assez grand $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, et comme $1-\psi_n$ est nulle au voisinage de a, $\psi_n\Lambda = \Lambda$. Si $|\alpha| \leq N$, la formule de Leibniz ainsi que la formule de Taylor donnent

$$\begin{aligned}\|D^\alpha(\psi_n\varphi)\|_\infty &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\|D^\beta\psi_n D^{\alpha-\beta}\varphi\|_\infty \\ &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}n^{|\beta|}\|D^\beta\psi\|_\infty \sup_{x\in B(a,1/n)}|D^{\alpha-\beta}\varphi(x)| = O(1/n).\end{aligned}$$

On a donc en utilisant (3)

$$|\Lambda(\varphi)| = |\Lambda(\psi_n\varphi)| = O(1/n).$$

On conclut $\Lambda(\varphi) = 0$ en faisant $n \to \infty$. □

2.6. Localisation et recollement. Si $\omega \subset \Omega$ sont deux ouverts, et si $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on conviendra de dire que $\Lambda_1 = \Lambda_2$ sur ω si $\Lambda_1(\varphi) = \Lambda_2(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$. Le théorème suivant permet de dire qu'une distribution est déterminée localement.

Théorème 2.22. *Soit Γ un recouvrement ouvert de Ω, et pour tout $\omega \in \Gamma$, soit $\Lambda_\omega \in \mathcal{D}'(\omega)$. On suppose que $\forall\omega,\omega' \in \Gamma$, on a $\Lambda_\omega = \Lambda_{\omega'}$ sur $\omega\cap\omega'$ dès lors que $\omega\cap\omega' \neq \emptyset$.*

Alors il existe une unique $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que

$$\forall\omega \in \Gamma, \Lambda = \Lambda_\omega \text{ sur } \omega.$$

Démonstration. Soit (ψ_n) une partition de l'unité donnée par la Proposition 2.2, et notons K_n le support de ψ_n. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors $\varphi = \sum_n \psi_n\varphi$ (somme finie), de sorte qu'on n'a pas le choix pour définir Λ : pour avoir une forme linéaire qui coincide avec Λ_{ω_n} sur ω_n, on doit poser

$$\Lambda(\varphi) = \sum_n \Lambda_{\omega_n}(\psi_n\varphi).$$

Il reste à voir que Λ est une distribution et que $\Lambda = \Lambda_\omega$ sur ω pour tout $\omega \in \Gamma$.

Soit $K \subset\subset \Omega$. Alors il existe N tel que

$$\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^N \Lambda_{\omega_n}(\psi_n\varphi)\forall\varphi \in \mathcal{D}_K,$$

et la continuité de Λ sur $\mathcal{D}_K$ découle donc de la continuité de $\varphi \in \mathcal{D}_K \mapsto \psi_n\varphi \in \mathcal{D}_{K_n}$, et de la continuité de Λ_{ω_n} sur $\mathcal{D}_{K_n}$.

Maintenant, si $\omega \in \Gamma$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, en utilisant la définition de Λ, l'hypothèse $\Lambda_\omega = \Lambda_{\omega_n}$ sur $\omega\cap\omega_n$ et la linéarité de Λ_ω, on a

$$\Lambda(\varphi) = \sum_n \Lambda_{\omega_n}(\psi_n\varphi) = \sum_n \Lambda_\omega(\psi_n\varphi) = \Lambda_\omega(\varphi),$$

ce qui prouve bien que $\Lambda = \Lambda_\omega$ sur ω. $\square$

3. Convolution

Cette section traite de convolution de distributions. Il est plus pratique (mais pas indispensable) de se restreindre à $\Omega = \mathbf{R}^d$.

3.1. Convolution d'une fonction et d'une distribution. Pour deux fonctions f et g sur $\mathbf{R}^d$ convenables, la convolution de f et g est définie par

$$f * g(x) = \int f(y)g(x-y)dy.$$

Cette formule suggère naturellement la généralisation suivante :

DÉFINITION 2.23. Soit $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. La convolution $\Lambda * g$ est la fonction définie par

$$\Lambda * g(x) = \Lambda(y \mapsto g(x-y)).$$

Pour simplifier les notations, on notera $g(x-\cdot)$ la fonction $y \mapsto g(x-y)$. On a les propriétés élémentaires suivantes

PROPOSITION 2.24. *Soient $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. Alors*

$$supp(\Lambda * g) \subset supp(\Lambda) + supp(g).$$

De plus $\Lambda * g \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ et pour $\alpha \in \mathbf{N}^d$

$$D^\alpha(\Lambda * g) = (D^\alpha \Lambda) * g = \Lambda * D^\alpha g.$$

DÉMONSTRATION. Si $x \notin supp(\Lambda) + supp(g)$, l'application $y \mapsto g(x-y)$ est à support contenu dans $\mathbf{R}^d \setminus supp(\Lambda)$, et donc $\Lambda * g(x) = 0$ par la proposition 2.18. Pour montrer que $\Lambda * g$ est C^∞, par récurrence on se ramène à montrer que $\Lambda * g$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbf{R}^d$, et que

$$D^\alpha(\Lambda * g) = (D^\alpha \Lambda) * g = \Lambda * D^\alpha g \text{ pour } |\alpha| = 1.$$

La formule $D^\alpha \Lambda * g = \Lambda * D^\alpha g$ découle de la définition du produit de convolution et de la dérivée des distribution. On fixe donc $x \in \mathbf{R}^d$ et on montre $D^\alpha(\Lambda * g)(x) = \Lambda * D^\alpha g(x)$. Or on a

$$\frac{1}{h}(\Lambda * g(x+he_k) - \Lambda * g(x)) = \Lambda\left(\frac{1}{h}(g(x+he_k-\cdot) - g(x-\cdot))\right).$$

Le support de $\frac{1}{h}(g(x+he_k-\cdot) - g(x-\cdot))$ est contenu dans le compact $K = \{y, x-y \in supp(g) + B(0,1)\}$ dès que $|h| \leq 1$, et la formule de Taylor implique que, pour tout $\beta \in \mathbf{N}^d$, $D^\beta(\frac{1}{h}(g(x+he_k-\cdot) - g(x-\cdot)))$ converge uniformément vers $\partial_k g(x-\cdot)$ lorsque $h \to 0$. Par définition des distributions, cela implique que $\Lambda\left(\frac{1}{h}(g(x+he_k-\cdot) - g(x-\cdot))\right)$ converge vers $\Lambda(\partial_k g(x-\cdot))$ et conclut la preuve de $D^\alpha(\Lambda * g)(x) = \Lambda * D^\alpha g(x)$. $\square$

Ce résultat permet de reprouver de manière élémentaire que $C^\infty(\mathbf{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$. En fait on a plus fort :

THÉORÈME 2.25. *Toute distribution sur $\mathbf{R}^d$ est limite au sens des distributions d'une suite de fonctions C^∞.*

Démonstration. (Esquisse) Soit $\rho : \mathbf{R}^d \to [0, \infty)$ une fonction C^∞ à support dans la boule unité et d'intégrale 1. On pose $\rho_n(x) = n^{-d}\rho(nx)$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ on calcule

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} \Lambda * \rho_n(x)\varphi(x)dx &= \int_{\mathbf{R}^d} \Lambda(y \mapsto \varphi(x)\rho_n(x-y))dx \\ &= \Lambda(y \mapsto \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x)\rho_n(x-y)dx) \to \Lambda\varphi.\end{aligned}$$

Le passage de la première à la deuxième ligne se justifie en passant par des sommes de Riemann, et la dernière égalité se justifie en observant que $y \mapsto \int_{\mathbf{R}^d} g\varphi(x)\rho_n(x-y)dx$ converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers φ. $\square$

3.2. Convolution de deux distributions. On ne peut pas définir de notion raisonnable de convolution de deux distributions arbitraires : il faut faire attention à leur support. En effet, une notion raisonnable devrait satisfaire les équations suivantes (sur $\mathbf{R}$, où $H = 1_{\mathbf{R}^+}$ est la fonction de Heaviside) :

$$(1 * \delta') * H = (1 * \delta)' * H = 0 * H = 0$$

et

$$1 * (\delta' * H) = 1 * (\delta * H)' = 1 * \delta = 1;$$

En particulier la convolution ne serait pas associative. Tout se passe bien dès que l'une des distributions est à support compact.

Lorsque $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d), \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, $\Lambda * \psi$ a été défini précédemment et

$$\int (\Lambda * \psi)(x)\varphi(x)dx = \Lambda\left(\int \varphi(x)\psi(x-\cdot)dx\right) = \Lambda\left(\int \varphi(x+\cdot)\psi(x)dx\right).$$

Cette formule justifie la définition suivante :

Définition 2.26. Soient $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ et $\mathrm{M} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$. La convolution de Λ par M est la distribution définie par

$$\Lambda * \mathrm{M}\varphi = \Lambda\psi \text{ où } \psi(x) = \mathrm{M}\left(\varphi(x+\cdot)\right) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d). \tag{4}$$

De manière équivalente,

$$\Lambda * \mathrm{M}\varphi = \Lambda(\widehat{\mathrm{M}} * \varphi) \text{ où } \widehat{\mathrm{M}}\psi = \mathrm{M}(\psi(-\cdot)).$$

On a les propriétés

Proposition 2.27. *Soient* $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ *et* $\mathrm{M}, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2 \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$. *Alors*

$$\Lambda * \delta = \Lambda.$$

$$supp(\Lambda * \mathrm{M}) \subset supp(\Lambda) + supp(\mathrm{M}),$$

$$ordre(\Lambda * \mathrm{M}) \leq ordre(\Lambda) + ordre(\mathrm{M}),$$

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}^d, D^\alpha(\Lambda * \mathrm{M}) = (D^\alpha\Lambda) * \mathrm{M} = \Lambda * D^\alpha \mathrm{M},$$

$$\mathrm{M}_1 * \mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_2 * \mathrm{M}_1, \ (\Lambda * \mathrm{M}_1) * \mathrm{M}_2 = \Lambda * (\mathrm{M}_1 * \mathrm{M}_2).$$

Démonstration. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, $\Lambda * \delta(\varphi) = \Lambda\psi$ où $\psi(x) = \delta(\varphi(x+\cdot)) = \varphi(x)$. On a donc bien $\Lambda * \delta = \Lambda$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ nulle sur un voisinage ouvert U de $supp(\Lambda) + supp(\mathrm{M})$. On pose $\psi(x) = \mathrm{M}(\varphi(x+\cdot))$. Comme $\varphi(x+\cdot)$ est nulle sur l'ouvert $U - x$, on a que ψ est nulle sur l'ensemble V des x tels que $supp(\mathrm{M}) \subset U - x$. V contient $supp(\Lambda)$, et par compacité de $supp(\mathrm{M})$ l'ensemble V est un ouvert. Par la proposition 2.18, $\Lambda(\psi) = 0$, ce qui prouve bien que $supp(\Lambda * \mathrm{M}) \subset supp(\Lambda) + supp(\mathrm{M})$.

Supposons que Λ est d'ordre fini N_1, et notons N_2 l'ordre de M, qui est aussi l'ordre de $\widehat{\mathrm{M}}$. Soit $K \subset\subset \mathbf{R}^d$ et $\varphi \in \mathcal{D}_K$. Notons $\psi(x) = \mathrm{M}\psi(x+\cdot) = (\widehat{\mathrm{M}} * \varphi)(x)$. Par le théorème précédent, le support de ψ est contenu dans un compact qui ne dépend que de K, et donc il existe C tel que $|\Lambda * \mathrm{M}\varphi| \leq C\|\psi\|_{N_1}$. Mais par 2.20,

$$\|\psi\|_{N_1} = \max_{|\alpha|\leq N_1} \|(\widehat{\mathrm{M}} * D^\alpha\varphi)\|_0 \leq C' \max_{|\alpha|\leq N_1, |\beta|\leq N_2} \|D^\beta D^\alpha \varphi\|_0 = C'\|\varphi\|_{N_1+N_2}.$$

On a donc bien $ordre(\Lambda * \mathrm{M}) \leq ordre(\Lambda) + ordre(\mathrm{M})$.

Soit $\alpha \in \mathbf{N}^d$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. Alors par la définition de la dérivée de distributions, la définition de la convolution de distributions et le théorème précédent,

$$D^\alpha(\Lambda * \mathrm{M})\varphi = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(\widehat{\mathrm{M}} * (D^\alpha\varphi)) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha(\widehat{\mathrm{M}} * \varphi)) = (D^\alpha\Lambda) * \mathrm{M}\varphi.$$

De même, en utilisant de plus que $D^\alpha\widehat{\mathrm{M}} = (-1)^{|\alpha|}\widehat{D^\alpha\mathrm{M}}$ on a

$$D^\alpha(\Lambda * \mathrm{M})\varphi = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(\widehat{\mathrm{M}} * (D^\alpha\varphi)) = \Lambda(\widehat{D^\alpha\mathrm{M}} * \varphi) = \Lambda * (D^\alpha\mathrm{M})\varphi.$$

Lorsque M_1 et M_2 sont à support compact, l'égalité $\mathrm{M}_1 * \mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_2 * \mathrm{M}_1$ pourrait se montrer d'abord lorsque $\mathrm{M}_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, puis par approximation. On n'écrit pas les détails puisque ce sera une conséquence d'un résultat plus fort (Théorème 2.41).

La relation $(\Lambda * \mathrm{M}_1) * \mathrm{M}_2 = \Lambda * (\mathrm{M}_1 * \mathrm{M}_2)$ découle simplement des définitions. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
(\Lambda * \mathrm{M}_1) * \mathrm{M}_2\varphi &= (\Lambda * \mathrm{M}_1)(y \mapsto \mathrm{M}_2(\varphi(y+\cdot))) \\
&= \Lambda(x \mapsto \mathrm{M}_1(y \mapsto \mathrm{M}_2(\varphi(x+y+\cdot)))) \\
&= \Lambda(x \mapsto (\mathrm{M}_1 * \mathrm{M}_2)(\varphi(x+\cdot)) \\
&= \Lambda * (\mathrm{M}_1 * \mathrm{M}_2)\varphi.
\end{aligned}$$

□

3.3. Applications : solutions fondamentales d'équations aux dérivées partielles.

PROPOSITION 2.28. *Soit $(c_\alpha)_{|\alpha|\leq N}$ une famille finie de nombres complexes. On considère l'équation aux dérivées partielles linéaire*

$$\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha u = f \tag{5}$$

d'inconnue u et de donnée f.

Supposons que l'équation fondamentale associée

$$\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha u = \delta$$

admette une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$. Alors l'équation (5) admet au moins une solution dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ pour tout $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$, à savoir $u*f$. En particulier lorsque $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, $u * f$ est une solution dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ de (5).

Si la solution fondamentale appartient à $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$, alors $f * u$ est solution de (5) pour tout $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$.

DÉMONSTRATION. Supposons $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$. Alors par la proposition 2.27, on peut calculer

$$\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha(u * f) = (\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha u) * f = \delta * f = f.$$

De même si $u \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$, alors le même calcul donne pour tout $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$

$$\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha (f * u) = f * (\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha u) = f * \delta = f.$$

□

EXEMPLE 2.29. **Équation de Laplace.** Soit $d \geq 2$. Sur $\mathbf{R}^d$, on rappelle que le Laplacien est l'opérateur différentiel $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_i^2$. Un calcul donne que la fonction

$$E(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & d = 2 \\ \frac{1}{d(d-2)|B(0,1)|} |x|^{2-d} & d \geq 3 \end{cases}$$

est solution au sens des distributions de $\Delta E = \delta$. Donc pour tout $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ $E * f$ est solution de $\Delta(E * f) = f$. En particulier, si f est de classe C^2 à support compact, $E * f$ est une fonction de classe C^2 solution de $\Delta(E * f) = f$.

EXEMPLE 2.30. **Équation de la chaleur.** On considère les coordonnées (x, t) sur $\mathbf{R}^{d+1} = \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$, et alors Δ correspond à $\sum_{i=1}^d \partial_i^2$. Le noyau de la chaleur est la fonction

$$k(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/4t} 1_{\{t>0\}}.$$

On calcule que k est solution au sens des distributions de l'équation $(\partial_t - \Delta)k = \delta$. On en déduit des solutions de $(\partial_t - \Delta)u = f$ pour tout $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ sous la forme $k * f$.

EXEMPLE 2.31. **Équation des ondes.** On considère les coordonnées (x, t) sur $\mathbf{R}^2$, et on appelle l'opérateur $\partial_t^2 - \partial_x^2$ *opérateur des ondes*. Alors la fonction $E(x, t) = \frac{1}{2} 1_{|x| \leq t}$ est solution au sens des distribution de $(\partial_t^2 - \partial_x^2)E = \delta$. On obtient donc des solutions de $(\partial_t^2 - \partial_x^2)u = f$ pour tout $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ sous la forme $E * f$.

4. Transformée de Fourier

4.1. Rappels sur la transformée de Fourier des fonctions. Lorsque $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ on peut définir la transformée de Fourier $\mathcal{F}f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ par la formule

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

On admettra les propriétés suivantes, vues en cours d'intégration :

THÉORÈME 2.32. *La transformée de Fourier a les propriétés suivantes.*

(1) Si $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$, $\mathcal{F}f$ est continue et $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq (2\pi)^{-d/2} \|f\|_{L^1}$.

(2) Soit $N \in \mathbf{N}$. Si $f \in C^N(\mathbf{R}^d)$ est telle que $D^\alpha f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ pour tout $|\alpha| \leq N$ alors

$$\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}f(\xi).$$

(3) Soit $N \in \mathbf{N}$. Si $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ est telle que $\int |x|^N |f(x)| dx < \infty$, alors $\mathcal{F}f$ est de classe C^N et pour $\alpha \in \mathbf{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq N$,

$$D^\alpha(\mathcal{F}f) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f)$$

où $x^\alpha f$ est la fonction qui à x associe $x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} f(x)$.

(4) Si $f, g \in L^1(\mathbf{R}^d)$, alors $\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{d/2} \mathcal{F}f \mathcal{F}g$.

(5) *Si $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ et $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ alors $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$, où la transformé de Fourier inverse est définie par*

$$\overline{\mathcal{F}}g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbf{R}^d} e^{ix\cdot\xi} g(\xi) d\xi.$$

(6) *(Formule de Parceval) $\mathcal{F}$ s'étend en une isométrie de $L^2(\mathbf{R}^d)$, d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$.*

On voudrait définir la transformée de Fourier par dualité. Ce n'est pas possible naïvement car $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ n'est pas stable par la transformée de Fourier. La solution consiste à considérer un espace plus gros que $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, qui, lui, est stable par $\mathcal{F}$. Les propriétés (2) et (3) disent que $\mathcal{F}$ échange les propriétés de régularité et d'intégrabilité ; il est donc naturel de considérer les fonctions qui ont de bonnes propriétés de régularité et d'intégrabilité.

Définition 2.33. On note $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et appelle *classe de Schwartz* l'espace vectoriel des fonctions $f \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ à décroissance rapide, *i.e.* telles que pour tout N,

$$\sup_{|\alpha|\le N} \sup_{x\in\mathbf{R}^d} (1+|x|)^N |D^\alpha f(x)| < \infty. \tag{6}$$

Alors la famille de seminormes (en fait de normes) (6) lorsque $N \in \mathbf{N}$ définit une structure d'*evtlc* sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, et on vérifie sans difficulté que $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ est un espace de Fréchet : une suite de Cauchy pour cette structure est en particulier de Cauchy dans $C_b(\mathbf{R}^d)$, donc y converge vers une fonction continue bornée φ. On vérifie facilement que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et que la convergence a lieu dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. On énonce les propriétés de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ sous la forme du

Théorème 2.34. *La classe de Schwartz est stable par dérivation, multiplication par les polynômes, et les opérations de dérivation ou de multiplication par un polynôme sont continues.*

$\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

La transformée de Fourier préserve $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et est un isomorphisme (linéaire continu) de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

Démonstration. La stabilité de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ par dérivation et multiplication par un polynôme est claire : si $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et $\beta \in \mathbf{N}^d$,

$$\sup_{|\alpha|\le N} \sup_{x\in\mathbf{R}^d} (1+|x|)^N |D^\alpha D^\beta f(x)| \le \sup_{|\alpha|\le N+|\beta|} \sup_{x\in\mathbf{R}^d} (1+|x|)^{N+|\beta|} |D^\alpha f(x)|.$$

De même si P est un polynôme de degré n, par la formule de Leibniz et le fait que $D^\beta P = 0$ si $|\beta| > n$, on a

$$\sup_{|\alpha|\le N} \sup_{x\in\mathbf{R}^d} (1+|x|)^N |D^\alpha (Pf)(x)| \le C \sup_{|\alpha|\le N+n} \sup_{x\in\mathbf{R}^d} (1+|x|)^{N+n} |D^\alpha f(x)|$$

pour une constante C qui ne dépend que de P. La continuité de ces opérations découle de ces estimations, ou bien du théorème du graphe fermé.

Si $\psi : \mathbf{R}^d \to [0,1]$ est une fonction C^∞ à support compact égale à 1 sur $B(0,1)$, et si $\psi_n(x) = \psi(x/n)$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, $\psi_n\varphi$ converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. En effet, pour $|\alpha| \le N$

$$D^\alpha((1-\psi_n)\varphi) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta(1-\psi_n) D^{\alpha-\beta}\varphi.$$

Tout d'abord, $\sup_x |D^\beta(1-\psi_n)| = n^{-|\beta|} \sup_x |D^\beta(1-\psi)| \leq \|\psi\|_N$. Et comme $1-\psi_n$ est nulle sur $B(0,n)$, on a la majoration

$$\begin{aligned}
\sup_x |(1+|x|)^N D^\beta(1-\psi_n) D^{\alpha-\beta}\varphi| &\leq \|\psi\|_N \sup_{|x|\geq n} |(1+|x|)^N D^\alpha \varphi(x)| \\
&\leq \frac{\|\psi\|_N}{n} \sup_x |(1+|x|)^{N+1} |D^\alpha \varphi(x)| \\
&= O(1/n).
\end{aligned}$$

En sommant sur β on obtient

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^d} (1+|x|)^N |D^\alpha(\varphi - \psi_n\varphi)(x)| = O(1/n),$$

ce qui montre bien que $\psi_n\varphi$ tend vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

Le fait que $\mathcal{F}$ préserve $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ découle des propriétés de la transformée de Fourier et de l'observation que $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \subset L^1(\mathbf{R}^d)$. En effet si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et α, β, comme $x^\alpha\varphi$ et toutes ses dérivées appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, on a

$$\xi^\beta D^\alpha(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(D^\beta(x^\alpha\varphi))(\xi),$$

ce qui montre en particulier par (1) que

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}^d} |\xi^\beta D^\alpha(\mathcal{F}\varphi)(\xi)| \leq (2\pi)^{-d/2} \|D^\beta(x^\alpha\varphi)\|_{L^1} < \infty$$

et implique bien que $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. La continuité de $\mathcal{F}$ découlent des ces égalités, ou bien du théorème du graphe fermé. Le fait que $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = Id$ découle de (5) dans le théorème 2.32 □

4.2. Distributions tempérées et transformée de Fourier.

Définition 2.35. Une distribution $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ est dite tempérée et on écrit $\Lambda \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ s'il existe $N \in \mathbf{N}$ et $C \in \mathbf{R}^+$ tel que

$$|\Lambda\varphi| \leq C \sup_{|\alpha|\leq N} \sup_{x\in\mathbf{R}^d} (1+|x|)^N |D^\alpha\varphi(x)|$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$.

Par densité de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, une distribution tempérée s'étend de manière unique en une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Réciproquement, toute forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ définit par restriction une distribution tempérée par restriction à $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ est donc bien naturellement le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ (ouf !). On équipera $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ de la topologie préfaible.

Exemple 2.36. Les distributions à support compact appartiennent à $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.

De même les fonctions L^1 (ou plus généralement les fonctions qui croissent moins vite qu'un polynôme) sont dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$. Si une fonction positive croît trop vite, elle n'est pas dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$. Par exemple $x \mapsto e^{|x|}$.

Proposition 2.37. $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ *est stable par dérivation et multiplication par les polynômes.*

Démonstration. Cela découle des résultats analogues pour $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et de la définition de la dérivée d'une distribution et de la mutliplication d'une distribution par une fonction C^∞. □

Comme la transformée de Fourier (et la transformée de Fourier inverse) est une application linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, la définition suivante est licite.

Définition 2.38. La transformée de Fourier (respectivement inverse) d'une distribution tempérée $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ est la distribution $\mathcal{F}u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ (respectivement définie par $\overline{\mathcal{F}}u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$)

$$\mathcal{F}u\varphi = u(\mathcal{F}\varphi)\,\big(\text{ respectivement } \overline{\mathcal{F}}u\varphi = u(\overline{\mathcal{F}}\varphi)\big)\,.$$

Heureusement, cette notion coïncide avec le transformée de Fourier des fonctions L^1.

Lemme 2.39. *Si $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$, $\Lambda_{\mathcal{F}f} = \mathcal{F}\Lambda_f$.*

Démonstration. Il faut montrer que si $f \in L^1$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$,

$$\int (\mathcal{F}f)g = \int f(\mathcal{F}g),$$

ce qui est vrai par Fubini. □

Comme conséquence du théorème 2.34, on a

Théorème 2.40. *$\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$.*

La plupart des propriétés de la transformée de Fourier de fonctions restent vraies, par dualité, pour les distributions. En particulier,

Théorème 2.41. *Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ et $v \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$. Alors $\mathcal{F}v \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$. De plus $u * v \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ et $\mathcal{F}(u*v) = (2\pi)^{d/2}\mathcal{F}v\mathcal{F}u$.*

Démonstration. On commence par prouver que $u*v \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$. Par définition de $u*v$, on a $u*v(\varphi) = u(\hat{v}*\varphi)$. Et si K, C et N sont donnés par le théorème 2.20 pour la distribution à support compact $\hat{v}$, on a que $\hat{v}*\psi$ a un sens pour tout $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ et que

$$|\hat{v}*\psi(x)| \le C \sup_{|\beta|\le N}\sup_{y\in x+K} |D^\beta\psi(y)|.$$

Pour $N' \in \mathbf{N}$, et $|\alpha| \le N'$, calculons en appliquant la Proposition 2.24

$$\begin{aligned}
\|(1+|x|)^{N'}D^\alpha(\hat{v}*\varphi)\|_\infty &= \|(1+|x|)^{N'}\hat{v}*(D^\alpha\varphi)\|_\infty \\
&\le C\sup_{|\beta|\le N}\sup_{x\in\mathbf{R}^d, y\in x+K} |(1+|x|)^{N'}(D^{\alpha+\beta}\varphi)(y)| \\
&\le C\sup_{|\beta|\le N+N'}\sup_{y\in\mathbf{R}^d} |(1+|y|+R)^{N'}(D^\beta\varphi)(y)| \\
&\le C'\sup_{|\beta|\le N+N'}\sup_{y\in\mathbf{R}^d} |(1+|y|)^{N+N'}(D^\beta\varphi)(y)|.
\end{aligned}$$

où R est tel que $K \subset B(0,R)$. La dernière inégalité est vraie par exemple pour $C' = C(1+R)^{N'}$. Cela implique que $\varphi \mapsto \hat{v}*\varphi$ est une application linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. En donc $u(\hat{v}*\varphi)$ est bien définie pour tout $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ et $u*v(\varphi) = u(\hat{v}*\varphi)$ définit une distribution tempérée.

On montre maintenant que $\mathcal{F}v \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$. Par le théorème 2.20, v s'étend de manière unique en une forme linéaire continue sur $C^\infty(\mathbf{R}^d)$. On pose $f(\xi) = (2\pi)^{-d/2}v(x \mapsto e^{-ix\cdot\xi})$. Comme la fonction $x \mapsto e^{-ix\cdot\xi}$ dépend continûment de ξ (pour la topologie de $C^\infty(\mathbf{R}^d)$), f est une fonction continue. De même par le même argument que dans la preuve de la proposition 2.24, f est de classe C^∞ et $D^\alpha f(\xi) = (2\pi)^{-d/2} v(x \mapsto (-ix)^\alpha e^{-ix\cdot\xi})$. En approchant l'intégrale par des sommes de Riemann (attention : l'argument est un peu délicat puisqu'il faut montrer que si on approche la mesure de Lebesgue par des combinaisons linéaires μ_n de masses de Dirac, $x \mapsto \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\mu_n(\xi)$ approche $x \mapsto \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi$ au sens de la topologie sur $C^\infty(\mathbf{R}^d)$), on obtient donc que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$

$$\int f(\xi)\varphi(\xi)d\xi = v(x \mapsto (2\pi)^{-d/2}\int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi) = v(\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}v(\varphi).$$

Ceci prouve que $\mathcal{F}v = \Lambda_f$.

Prenons maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ et $x \in \mathbf{R}^d$. Alors on a en notant que $\mathcal{F}\varphi(x + y) = \mathcal{F}(\xi \mapsto e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi))(y)$, la formule précédente donne

$$\hat{v} * (\mathcal{F}\varphi)(x) = v(y \mapsto \mathcal{F}\varphi(x+y)) = \int f(\xi)e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi = (2\pi)^{d/2}\mathcal{F}(f\varphi)(x).$$

En appliquant la distribution u, on obtient

$$\mathcal{F}(u * v)\varphi = u(\hat{v} * (\mathcal{F}\varphi)) = (2\pi)^{d/2} u(\mathcal{F}(f\varphi)) = (2\pi)^{d/2}(\mathcal{F}u)(f\varphi),$$

ce qui prouve bien que les distributions $\mathcal{F}(u*v)$ et $(2\pi)^{d/2}(\mathcal{F}v)(\mathcal{F}u)$ coïncident sur $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Chapitre 3

Espaces de Sobolev

De bonnes références pour ce chapitre sont [**AF03**] et [**Bre83**].

1. Espaces de Sobolev d'indice entier

1.1. Définitions et densité.

Définition 3.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$, $p \in [1, \infty]$ et $k \in \mathbf{N}$. On note $W^{k,p}(\Omega)$ l'ensemble des distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pour tout $|\alpha| \leq k$.

Remarque 3.2. Les espaces de Sobolev ont des propriétés très différentes selon que $p = \infty$ ou $p < \infty$. Dans ce cours on n'étudiera quasiment pas le cas $p = \infty$.

Proposition 3.3. *Muni de la norme*

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p},$$

$W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, qui est séparable si $p < \infty$, et réflexif (et même uniformément convexe) si $1 < p < \infty$. Si $p = 2$, $W^{k,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. Si on note $I_k = \{\alpha \in \mathbf{N}^d, |\alpha| \leq k\}$, l'application $\iota \colon u \mapsto (D^\alpha u)_{\alpha \in I_k}$ est une isométrie linéaire de $W^{k,p}(\Omega)$ sur $L^p(I_k \times \Omega)$ (pour la mesure produit de la mesure de comptage sur I_k et de la mesure de Lebesgue sur Ω). Comme $L^p(I_k \times \Omega)$ est un espace de Banach, séparable si $p < \infty$, et réflexif (et même uniformément convexe) si $1 < p < \infty$ (et un espace de Hilbert si $p = 2$), la seule chose à montrer est que $\iota(W^{k,p}(\Omega))$ est un sous-espace fermé (pour justifier la réflexivité, on a le Corollaire 1.49). Soit donc $u_n \in W^{k,p}(\Omega)$ tel que $\iota(u_n)$ converge vers $(v_\alpha)_{\alpha \in I_k}$, c'est-à-dire $D^\alpha u_n$ converge vers v_α dans $L^p(\Omega)$ pour tout $\alpha \in I_k$. Comme la convergence dans L^p est plus forte que la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on a en particulier que $D^\alpha u_n$ converge vers v_α dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, et donc par continuité de la dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, $v_\alpha = \lim_n D^\alpha u_n = D^\alpha(\lim_n u_n) = D^\alpha v_0$, et donc $(v_\alpha)_{\alpha \in I_k} = \iota(v_0) \in W^{k,p}(\Omega)$. □

Un outil pratique est le

Lemme 3.4 (Approximation par convolution). *On suppose* $1 \leq p < \infty$. *Soit $\rho \in \mathcal{D}(R^d)$ positive d'intégrale 1 et de support contenu dans $B(0,1)$, et $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$. Alors pour tout n, $u * \rho_n \in W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$ et $u * \rho_n$ converge vers u dans $W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$.*

De plus supp$(u * \rho_n) \subset$ supp$(u) + B(0, 1/n)$.

Démonstration. Pour $|\alpha| \leq k$, on écrit

$$D^\alpha(u - \rho_n * u)(x) = D^\alpha u(x) - (\rho_n * D^\alpha u)(x) = \int \rho_n(y)(D^\alpha u(x-y) - D^\alpha u(x))dy,$$

d'où on déduit par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\|D^\alpha(u-\rho_n*u)\|_{L^p} &\le \int \rho_n(y)\|D^\alpha u(\cdot-y)-D^\alpha u\|_{L^p}dy\\ &\le \sup_{y\in supp(\rho)/n}\|D^\alpha u(\cdot-y)-D^\alpha u\|_{L^p}\end{aligned}$$

qui converge vers 0 par les propriétés bien connues des espaces L^p. Cela montre que $u*\rho_n$ vers u dans $W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$. L'inclusion des supports a été prouvée dans la Proposition 2.24. □

On en déduit

THÉORÈME 3.5. *Soit* $1\le p<\infty$*. Alors* $C^\infty(\Omega)\cap W^{k,p}(\Omega)$ *est dense dans* $W^{k,p}(\Omega)$*.*

DÉMONSTRATION. Soit $(\psi_n)_{n\ge1}$ une partition de l'unité dans Ω (relativement à un recouvrement ouvert arbitraire de Ω). Soit $u\in W^{k,p}(\Omega)$ et $\varepsilon>0$. Pour tout n le Lemme 3.4 donne $w_n\in\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\|w_n-\psi_n u\|_{W^{k,p}}<2^{-n}\varepsilon$. De plus on peut s'arranger pour que le support de w_n soit suffisament proche de celui de $\psi_n u$ pour que $w(x):=\sum_n w_n(x)$ soit une somme finie sur tout compact, et en particulier définisse une fonction dans $C^\infty(\Omega)$. Alors $w-u=\sum_n w_n-\psi_n u$ (somme finie sur tout compact), et donc $\|w-u\|_{W^{k,p}}\le\sum_n\|w_n-\psi_n u\|_{W^{k,p}}<\varepsilon$. □

REMARQUE 3.6. $W^{k,p}(\Omega)$ aurait donc pu être défini sans même savoir ce qu'est une distribution, simplement comme le complété de l'ensemble des fonctions $\varphi\in C^\infty(\Omega)$ telles que $\|\varphi\|_{W^{k,p}(\Omega)}<\infty$ pour cette norme. Encore plus fort, dans les cas où Ω a un bord suffisament régulier, on verra plus tard que $W^{k,p}(\Omega)$ coïncide avec le complété des fonctions $C^\infty(\Omega)$ qui s'étendent, ainsi que toutes leurs dérivées, en une fonction continue sur $\overline{\Omega}$.

PROPOSITION 3.7. *Si* $1\le p<\infty$*,* $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ *est dense dans* $W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$*.*

DÉMONSTRATION. Par le Lemme 3.4, il suffit de montrer que $W^{k,p}(\mathbf{R}^d)\cap\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ est dense dans $W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$, puisque pour $u\in W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$ à support compact, $u*\rho_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ qui converge vers u.

Prenons $\psi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ constante égale à 1 sur $B(0,1)$. Si $u\in W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$, vérifions que $\psi(\cdot/n)u$ converge dans $W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$ vers u. Cela découle de la formule de Leibniz : pour $|\alpha|\le k$,

$$\begin{aligned}\|D^\alpha(u-\psi(\cdot/n)u))\|_{L^p} &\le \sum_{|\beta|\le|\alpha|}\binom{\alpha}{\beta}\|D^\beta(1-\psi(\cdot/n))D^{\alpha-\beta}u\|_{L^p}\\ &\le \sum_{|\beta|\le|\alpha|}\binom{\alpha}{\beta}\|D^\beta(1-\psi)\|_{L^\infty}\|D^{\alpha-\beta}u1_{B(0,n)^c}\|_{L^p},\end{aligned}$$

qui converge bien vers 0 par le théorème de convergence dominée. □

Cette proposition n'est plus du tout vraie pour un ouvert Ω arbitraire. On introduit donc

DÉFINITION 3.8. On note $W_0^{k,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\Omega)$.

1.2. Prolongement. On peut toujours prolonger une fonction de $W_0^{k,p}(\Omega)$ par 0 à un ouvert plus grand :

PROPOSITION 3.9. *Soient $\Omega \subset \Omega_1$ deux ouverts de $\mathbf{R}^d$. Si $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$, la function $\widetilde{u}\colon \Omega_1 \to \mathbf{C}$ donnée par*

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \textit{si } x \in \Omega \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

appartient à $W_0^{k,p}(\Omega_1)$ et est de même norme que u.

DÉMONSTRATION. Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{k,p}(\Omega)$ par définition, il suffit de vérifier la proposition lorsque $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, auquel cas c'est évident. □

Pour étendre une fonction de $W^{k,p}(\Omega)$, il faut plus d'hypothèses sur le bord de Ω (penser à $\Omega =]-1,1[\setminus\{0\}$ et $u(x) = signe(x)$). C'est par exemple le cas pour $\Omega = \mathbf{R}_+^d = \{(x_1,\dots,x_d) \in \mathbf{R}^d, x_d > 0\}$, ou bien pour des domaines bornés réguliers.

En guise d'apéritif, on peut commencer par prouver une forme de réciproque à la proposition précédente

LEMME 3.10. *Soit $1 \le p < \infty$, $\Omega = \mathbf{R}_+^d$ et $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Alors la fonction $\widetilde{u}$ définie dans la proposition 3.9 appartient à $W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$ si et seulement si $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. Une direction a déjà été prouvée dans la proposition 3.9. Pour la réciproque, supposons $\widetilde{u} \in W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$. Par l'hypothèse $p < \infty$ et les propriétés bien connues de $L^p(\mathbf{R}^d)$, $\widetilde{u}$ est limite dans $W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$ (et donc a fortiori dans $W^{k,p}(\Omega)$) des fonctions $\widetilde{u}_\varepsilon(x) = \widetilde{u}(x - \varepsilon e_d)$. Il suffit donc de prouver que $\widetilde{u}_\varepsilon$ appartient à $W_0^{k,p}(\Omega)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Par la proposition 3.7, il existe $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ qui converge vers $\widetilde{u}_\varepsilon$ dans $W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$. Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\psi(t) = 0$ sur $(-\infty, 0]$ et $\psi(t) = 1$ sur $[\varepsilon, \infty)$. Alors par les calculs de la proposition 3.7, $\varphi_n\psi$ converge vers $\widetilde{u}_\varepsilon\psi = \widetilde{u}_\varepsilon$ dans $W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$ (et donc a fortiori dans $W^{k,p}(\Omega)$). Cela montre que $\widetilde{u}_\varepsilon \in W_0^{k,p}(\Omega)$. □

THÉORÈME 3.11. *Soit $1 \le p < \infty$ et soit $\Omega = \mathbf{R}_+^d$, ou bien un ouvert borné dont le bord est une variété de classe C^k. Alors il existe une application $P\colon W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$ linéaire bornée de prolongement, c'est-à-dire telle $Pu\,|_\Omega = u$.*

REMARQUE 3.12. Ce théorème n'est pas optimal : la condition $\partial\Omega$ est C^1 (et même Lipschitz) est suffisante. Voir [**AF03**].

DÉMONSTRATION. On commence par traiter le cas $\Omega = \mathbf{R}_+^d$. Pour comprendre la preuve on commence par étudier le cas simple où $k = 1$. Alors on définit $Pu(x', x_d) = u(x', |x_d|)$, et on vérifie que $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^d)} = 2^{1/p}\|u\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}_+^d)}$. La seule chose à prouver est que la dérivée au sens des distributions $\partial_i(Pu)$ coïncide avec la fonction $\partial_i u(x', |x_d|)$ si $i < d$ et $sgn(x_d)\partial_d u(x', |x_d|)$ si $i = d$, et on laisse cette vérification en exercice.

Pour $k \ge 1$ arbitraire, voici une preuve complète [1]. On cherche P sous la forme

$$Pu(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_d > 0 \\ \sum_{j=1}^{k+1} a_j u(x', -jx_d) & \text{si } x_d < 0 \end{cases} \quad \forall x = (x', x_d) \in \mathbf{R}^d$$

1. remarquez que pour $k = 1$, la construction de Pu est un peu plus compliquée que celle donnée précédemment, mais la preuve est plus simple.

pour des nombres a_j à déterminer. On montrera que pour un bon choix des a_j, $\|Pu\|_{W^{k,p}(\mathbf{R}^d)} \leq (1 + \sum_{j=1}^{k+1} |a_j|j^k)\|u\|_{W^{k,p}(\mathbf{R}^d_+)}$ pour tout $u \in W^{k,p}(\mathbf{R}^d_+)$. Par un argument de densité il suffit de vérifier cela lorsque $u \in C^\infty(\mathbf{R}^d_+) \cap W^{1,p}(\mathbf{R}^d_+)$. Et même, en utilisant que $u(\cdot + \varepsilon e_d)$ converge vers u dans $W^{k,p}(\mathbf{R}^d_+)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, on peut supposer que u est C^∞ sur un voisinage de $\overline{\mathbf{R}^d_+}$. Mais si pour une telle fonction u, Pu est une fonction de classe C^k sur $\mathbf{R}^d$, l'inégalité est claire. Il faut donc choisir les a_j de telle sorte que Pu soit bien de classe C^k sur $\mathbf{R}^d$. Comme Pu est clairement C^∞ sur $\{(x', x_d), x_d \neq 0\}$, il faut juste s'assurer que les dérivées à gauche et à droite sur $\mathbf{R}^{d-1} \times \{0\}$ coïncident, c'est-à-dire

$$D^\alpha u(x', 0) = \left(\sum_{j=1}^{k+1} a_j (-j)^{\alpha_d} \right) D^\alpha u(x', 0)$$

pour tout $|\alpha| \leq k$. Pour cela il suffit que $\sum_{j=1}^{k+1} a_j(-j)^m = 1$ pour $m = 0, 1, \ldots, k$. Ce système de Vandermonde a une (unique) solution, et par ce qui précède ce choix de (a_j) convient.

On passe maintenant au cas où le domaine Ω est borné et son bord est une sous-variété (compacte) de classe C^k. Par compacité on peut trouver un nombre fini d'ouverts de $\mathbf{R}^d$, $\omega_1, \ldots, \omega_n$, qui recouvrent $\partial\Omega$ et des C^k-difféomorphismes $\phi_i \colon \omega_i \to U_i$ sur un voisinage U_i de 0 qui envoient $\Omega \cap \omega_i$ sur $\mathbf{R}^d_+ \cap U_i$, $\partial\Omega \cap \omega_i$ sur $\mathbf{R}^{d-1} \times \{0\} \cap U_i$ et le complémentaire dans ω_i de $\overline{\Omega}$ sur $\mathbf{R}^d_- \cap U_i$. Par un argument de partition de l'unité on peut trouver $\psi_0, \ldots, \psi_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ positives telles que $\sum_i \psi_i = 1$ au voisinage de $\overline{\Omega}$ et telle que $\psi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi_i \in \mathcal{D}(\omega_i)$. Enfin, prenons $\xi_i \in \mathcal{D}(U_i)$ qui est constante égale à 1 sur le support K_i de $\psi_i \circ \phi_i^{-1}$. On définit alors $\widetilde{P} : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$ par

$$\widetilde{P}u = (\psi_0 u) 1_\Omega + \sum_i \left[\xi_i P\left((\psi_i u) \circ \phi_i^{-1} \right) \right] \circ \phi_i 1_{\omega_i}.$$

Avec des mots, cette formule veut dire que l'on écrit $u = \sum_i \psi_i u$, et on étend de façon indépendante chacun des $\psi_i u$. Comme $\psi_0 u$ est à support compact, on l'étend par 0. Pour $i \geq 1$, le difféormorphisme ϕ_i permet de voir $\psi_i u$ comme une fonction sur $U_i \cap \mathbf{R}^d_+$ à support dans $K_i \cap \mathbf{R}^d_+$. En l'étendant par 0 sur $\mathbf{R}^d_+ \setminus U_i$, on obtient alors une fonction sur $\mathbf{R}^d_+$, qui en fait appartient à $W^{k,p}(\mathbf{R}^d_+)$ (par les formules habituelles de changement de variables). On peut donc l'étendre à tout $\mathbf{R}^d$ par la première partie du théorème, on obtient la fonction $P\left((\psi_i u) \circ \phi_i^{-1} \right) \in W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$. Pour s'assurer que son support est contenu dans U_i, on la multiplie par ξ_i, ce qui ne change pas ses valeurs sur $\mathbf{R}^d_+$ par choix de ξ_i. En composant à nouveau par ϕ_i et en étendant par 0 en dehors de ω_i, on obtient alors une fonction dans $W^{k,p}(\mathbf{R}^d)$ qui prolonge $\psi_i u$. $\square$

En combinant le théorème 3.11 et la proposition 3.7 on obtient

COROLLAIRE 3.13. *Soit Ω comme dans le théorème précédent et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace des restrictions à Ω des fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ est dense dans $W^{k,p}(\Omega)$.*

2. Injections de Sobolev

On appelera un espace de Banach (respectivement de Fréchet) de distribution un espace de Banach (respectivement de Fréchet) E constitué de distributions, et tel que les évaluations $u \in E \mapsto u(f)$ sont continues pour tout $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. De façon équivalente, l'inclusion $E \to \mathcal{D}'(\Omega)$ est continue. Par le théorème du graphe fermé, si E et F sont deux espaces de Banach de distributions, $E \subset F$ est équivalent à dire qu'il existe une constante c telle que $\|u\|_F \leq c\|u\|_E$. Pour montrer une telle inclusion, on procède généralement de manière inverse : on montre que l'inégalité $\|u\|_F \leq c\|u\|_E$ est valable sur un sous-espace dense de E et on en déduit l'inclusion $E \subset F$.

Le but de cette section est de montrer plusieurs résultats d'*injections* d'espaces de Sobolev dans d'autres espaces de Banach de distributions. Comme nous venons de voir, ces énoncés, de type $W^{k,p}(\Omega) \subset E$, seront des raccourcis pour des inégalités du type $\|u\|_E \leq c\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ pour tout $u \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$. On énonce les résultats pour $W^{1,p}$. On peut ensuite obtenir des résultats du même type pour $W^{k,p}$, en utilisant simplement que $u \in W^{k,p}$ si et seulement si $D^\alpha u \in W^{1,p}$ pour tout $|\alpha| \leq k-1$.

2.1. Cas $p > d$. Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ et $\alpha \in (0,1)$, on note $C^\alpha(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions uniformément α-Hölderiennes sur Ω, ie telles que $\sup_{x,y} |u(x) - u(y)|/|x-y|^\alpha < \infty$. Si $x_0 \in \Omega$, c'est un espace de Banach de distributions, pour la norme $\|u\|_{C^\alpha} = |u(x_0)| + \sup_{x,y} |u(x) - u(y)|/|x-y|^\alpha$.

Théorème 3.14 (Morrey). *Soit $\Omega = \mathbf{R}^d$, ou $\mathbf{R}^d_+$, ou un domaine borné de bord C^1. Alors pour $d < p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega) \subset C^\alpha(\overline{\Omega})$ où $\alpha = 1 - d/p$.*

Démonstration. Par les résultats de densité 3.7 et d'extension 3.11, il suffit de traiter le cas $\Omega = \mathbf{R}^d$ et de montrer que $\|u\|_{C^\alpha} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^d)}$ pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. Soit $x \in \mathbf{R}^d$ et B une boule de rayon r contenant x. On montre que

$$|u(x) - \frac{1}{|B|}\int_B u(y)dy| \leq Cr^\alpha \|\nabla u\|_{L^p}.$$

Il suffit de traiter le cas $x = 0$, et alors pour $y \in B$, $|u(y) - u(0)| \leq |y| \int_0^1 |\nabla u(ty)|dt$ et on peut majorer

$$\begin{aligned}
|u(0) - \frac{1}{|B|}\int_B u(y)dy| &\leq \frac{1}{|B|}\int_B |y| \int_0^1 |\nabla u(ty)|dtdy \\
&\leq \frac{1}{|B|}\int_0^1 2rt^{-d}\int_{tB} |\nabla u(y)|dydt \\
&\leq \frac{1}{|B|}\int_0^1 2rt^{-d}\|\nabla u\|_{L^p}|tB|^{1-1/p}dt \leq Cr^{1-d/p}\|\nabla u\|_{L^p}
\end{aligned}$$

Cela implique (en choisissant une boule de rayon $|x-y|$ qui contient x et y) que $|u(x) - u(y)| \leq 2C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p}$. De plus en utilisant la majoration $|\frac{1}{|B|}\int_B u(y)dy| \leq |B|^{-1/p}\|u\|_{L^p} \leq Cr^{-d/p}\|u\|_{L^p}$, on obtient pour tout $r > 0$ la majoration

$$|u(0)| \leq C(r^\alpha \|\nabla u\|_{L^p} + r^{-d/p}\|u\|_{L^p}),$$

qui implique bien $|u(0)| \leq C\|u\|_{L^p}^{1-d/p}\|\nabla u\|_{L^p}^{d/p}$ en prenant $r = \|u\|_{L^p}/\|\nabla u\|_{L^p}$. Ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 3.15. Par un argument d'homogénéité, l'exposant du théorème de Morrey est optimal. En effet, si α est tel que $W^{1,p} \subset C^\alpha$, alors en particulier il existe une constante c telle que $|u(x)-u(y)| \leq c|x-y|^\alpha \|u\|_{W^{1,p}}$. En remplaçant u par $u(\lambda\cdot)$ avec $\lambda > 1$, et en utilisant que $\|u(\lambda\cdot)\|_{W^{1,p}} \leq \lambda^{1-d/p}\|u\|_{W^{1,p}}$, on obtient l'inégalité

$$|u(x)-u(y)| \leq \lambda^{1-d/p-\alpha} c|x-y| \|u\|_{W^{1,p}},$$

ce qui entraîne (en faisant $\lambda \to \infty$) $1-d/p-\alpha \geq 0$.

2.2. Cas $p < d$.

Théorème 3.16. *Soit $\Omega = \mathbf{R}^d$, ou $\mathbf{R}^d_+$, ou un domaine borné de bord C^1. Alors*
— *(Gagliardo-Nirenberg) $W^{1,1}(\Omega) \subset L^{d/(d-1)}(\Omega)$.*
— *(Sobolev) Si $1 < p < d$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{dp/(d-p)}(\Omega)$.*

Démonstration. Comme précédemment, il suffit de traiter la cas où $\Omega = \mathbf{R}^d$ et $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. On commence par prouver Gagliardo-Nirenberg. On prouve même plus, à savoir que

$$\|u\|_{L^{d/(d-1)}(\mathbf{R}^d)} \leq (\prod_j \|\partial_j u\|_{L^1})^{1/d}. \tag{7}$$

Pour $1 \leq j \leq d$, Posons

$$F_j(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_d) = \int_{\mathbf{R}} |\partial_j u(x_1,\dots,x_d)| dx_j,$$

de sorte que $u(x_1,\dots,x_d) \leq F_j(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_d)$ pour tout $(x_1,\dots,x_d) \in \mathbf{R}^d$. En particulier, on a

$$|u(x_1,\dots,x_d)| \leq \prod_{j=1}^d F_j(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_d)^{1/d}.$$

On conclut par le Lemme suivant, dont on présentera la preuve plus bas.

Lemme 3.17. *Soient $d \geq 2$ et $G_1,\dots,G_d \in L^d(\mathbf{R}^{d-1})$. Alors la fonction $G\colon \mathbf{R}^d \to C$ définie par*

$$G(x) = \prod_{j=1}^d G_j(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_d)$$

appartient à $L^{d/(d-1)}(\mathbf{R}^d)$ et $\|G\|_{L^{d/(d-1)}} \leq \prod_{j=1}^d \|G_j\|_{L^d(\mathbf{R}^{d-1})}$.

On démontre maintenant l'inégalité de Sobolev, en se ramenant au cas $p = 1$. Soit $s > 1$ à déterminer. Pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, la fonction $|u|^s$ est C^1 à support compact, donc en particulier appartient à $W^{1,1}(\mathbf{R}^d)$. Par (7), $\||u|^s\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbf{R}^d)} \leq \max_j \|\partial_j |u|^s\|_{L^1}$, et par l'inégalité de Hölder

$$\|\partial_j |u|^s\|_{L^1} \leq s\||u|^{s-1}\partial_j u\|_{L^1} \leq s\|\partial_j u\|_{L^p}\||u|^{s-1}\|_{L^{p'}} = s\|\partial_j u\|_{L^p}\|u\|^{s-1}_{L^{p'(s-1)}}.$$

On obtient donc

$$\|u\|_{\frac{sd}{d-1}} \leq s(\max_j \|\partial_j u\|_{L^p})^{1/s}\|u\|^{1-1/s}_{p'(s-1)}. \tag{8}$$

Si s est choisi de telle sorte que $p'(s-1) = sd/(d-1)$, c'est-à-dire $s = p(d-1)/(d-p)$ (qui est bien > 1 car $p < d$), on a $p'(s-1) = sd/(d-1) = pd/(d-p)$ et l'inégalité précedente devient $\|u\|_{pd/(p-d)} \leq s^s \max_i \|\partial_j u\|_{L^p}$, ce qui implique bien $W^{1,p} \subset L^{pd/(d-p)}$ $\square$

Il reste à donner la

Démonstration du Lemme 3.17. On fait la preuve par récurrence sur d. Pour $d=2$ c'est évident. Pour alléger les notations pour $x \in \mathbf{R}^d$ on pose

$$\hat{x}_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^{d-1}.$$

Supposons le Lemme pour $d-1 \geq 2$. On prend G_j et G comme dans l'énoncé. Pour x_d fixé, en utilisant l'inégalité de Hölder pour $q = d-1$ (et donc $q' = (d-1)/(d-2)$) puis l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^{d-1}} |G(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx_1 \dots dx_{d-1} &\leq \|G_d\|_{L^d}^{\frac{d}{d-1}} \left(\int \prod_{j<d} |G_j(\hat{x}_j)|^{\frac{d}{d-2}} dx_1 \dots dx_{d-1} \right)^{\frac{d-2}{d-1}} \\ &\leq \|G_d\|_{L^d}^{\frac{d}{d-1}} \prod_{j=1}^{d-1} \| y \in \mathbf{R}^{d-2} \mapsto |G_j(y, x_d)|^{\frac{d}{d-1}} \|_{L^{d-1}}.\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x_d et en utilisant l'inégalité de Hölder on obtient $\|G\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{\frac{d}{d-1}} \leq \prod_{j=1}^d \|G_j\|_{L^d}^{\frac{d}{d-1}}$. □

2.3. Cas $p = d$.

Théorème 3.18. *Soit $\Omega = \mathbf{R}^d$, ou $\mathbf{R}^d_+$, ou un domaine borné de bord C^1. Alors $W^{1,d}(\Omega)$ n'est pas inclus dans $L^\infty(\Omega)$, mais $W^{1,d}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour tout $d \leq q < \infty$.*

Démonstration. Pour montrer que $W^{1,d}(\Omega)$ n'est pas inclus dans L^∞, il suffit par le théorème d'extension de considérer le cas où Ω est une boule, par exemple $\Omega = B(0,1)$. Soit alors $u(x) = (-\ln|x|)^\alpha$. Alors $u \notin L^\infty$ dès que $\alpha > 0$. Or $u \in L^d$, et $|\partial_j u(x)| \leq \alpha(-\ln|x|)^{\alpha-1}/|x|$ est dans L^d dès que $1 - \alpha > 1/d$.

Pour l'inclusion, il suffit encore de considérer le cas $\Omega = \mathbf{R}^d$, et de prendre $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. Notons $d' = d/(d-1)$. Rappelons l'inégalité (8), qui dans le cas $p = d$ devient

$$\|u\|_{sd'} \leq s(\max_j \|\partial_j u\|_{L^d})^{1/s} \|u\|_{(s-1)d'}^{1-1/s}$$

pour tout $s > 1$. Cette inégalité dit donc que si $q \geq d$ est tel que $W^{1,d}(\mathbf{R}^d) \subset L^q$, alors (en prenant $(s-1)d' = q$) $W^{1,d}(\mathbf{R}^d) \subset L^{q+d'}$. Par récurrence cela implique donc que $W^{1,d}(\mathbf{R}^d) \subset L^{d+kd'}(\mathbf{R}^d)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Donc

$$W^{1,d}(\mathbf{R}^d) \subset \cap_{k \in \mathbf{N}} L^{d+kd'}(\mathbf{R}^d) = \cap_{d \leq q < \infty} L^q(\mathbf{R}^d)$$

où la dernière égalité découle de l'inégalité de Hölder, qui implique que $L^p \cap L^q \subset L^r$ pour tout $p \leq r \leq q$. □

2.4. Injections compactes. Une conséquence des résultats précédents sont des *injections compacts*. Ici une injection $E \subset F$ est dite compacte si la boule unité de E est relativement compacte pour la topologie forte sur F.

Théorème 3.19 (Rellich-Kondrachov). *Soit Ω un domaine borné de bord C^1.*
- *pour $d < p < \infty$, et $0 < \beta < 1 - d/p$, $W^{1,p}(\Omega) \subset C^\beta(\overline{\Omega})$ est une injection compacte.*
- *pour $1 \leq p < d$, et $1 \leq q < dp/(d-p)$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\overline{\Omega})$ est une injection compacte.*

— *pour $p = d$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\overline{\Omega})$ est une injection compacte pour tout $1 \le q < \infty$.*

DÉMONSTRATION. Le premier point découle du théorème de Morrey et du fait général suivant : pour un ouvert borné Ω, et $0 < \beta < \alpha$, $C^\alpha(\overline{\Omega}) \subset C^\beta(\overline{\Omega})$ est compacte. Prouvons ce fait. Soit (u_n) une suite bornée dans $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Alors la suite (u_n) est en particulier équicontinue, donc par le théorème d'Ascoli elle converge dans $C(\overline{\Omega})$, vers une limite u dans $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Il s'agit de montrer que cette convergence a lieu dans $C^\beta(\overline{\Omega})$. Quitte à remplacer u_n par $u_n - u$ on peut supposer que $u = 0$. Il faut donc montrer que $\lim_n \sup_{x\neq y} |u_n(x) - u_n(y)|/|x-y|^\beta = 0$. Pour cela on utilise une majoration différente selon que x et y sont très proches ou pas :

$$\frac{|u_n(x) - u_n(y)|}{|x-y|^\beta} \le \min\left(\frac{2\|u_n\|_\infty}{|x-y|^\beta}, \|u_n\|_{C^\alpha}|x-y|^{\alpha-\beta}\right).$$

On conclut facilement en utilisant que $\lim_n \|u_n\|_\infty = 0$ et $\sup_n \|u_n\|_{C^\alpha} < \infty$.

On ne prouve pas ici les points suivants (peut-être en td ?). □

3. Espace de Sobolev d'indices fractionnaires

Dans cette section on cherche à étendre la définition des espaces de Sobolev à k non entier. Pour des raisons techniques, on se restreindra au cas $p = 2$, qui a l'avantage de donner une théorie hilbertienne.

3.1. Définition. La définition des espaces de Sobolev d'indices fractionnaires est basée sur la transformée de Fourier, et repose sur l'observation suivante

LEMME 3.20. *Soit $k \in \mathbf{N}$. $W^{k,2}(\mathbf{R}^d)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions dans $L^2(\mathbf{R}^d)$ telles que $\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{k/2}\mathcal{F}u(\xi) \in L^2(\mathbf{R}^d)$. De plus*

$$\|u\|_{W^{k,2}(\mathbf{R}^d)} \le \|(1+|\cdot|^2)^{k/2}\mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \le (d+1)^{\frac{k}{2}}\|u\|_{W^{k,2}(\mathbf{R}^d)}.$$

DÉMONSTRATION. D'une part, en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, on peut réécrire

$$\|u\|^2_{W^{k,2}(\mathbf{R}^d)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_2^2 = \sum_{|\alpha|\le k} \|\mathcal{F}(D^\alpha u)\|_2^2 = \sum_{|\alpha|\le k} \|\xi^\alpha \mathcal{F}u\|_2^2$$

D'autre part, on peut développer $(1+|\xi|^2)^k$ comme une somme de $(d+1)^k$ termes, qu'on peut regrouper sous la forme $\sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha \xi^{2\alpha}$, avec $1 \le c_\alpha \le (d+1)^k$ (si on veut on a même la formule explicite $c_\alpha = \frac{k!}{\alpha_1!\ldots\alpha_d!(k-|\alpha|)!}$). Et donc on a

$$\|(1+|\cdot|^2)^{k/2}\mathcal{F}u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^d)} = \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha \int \xi^{2\alpha}|\mathcal{F}u|^2 d\xi = \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha \|\xi^\alpha|\mathcal{F}u|^2\|_2^2.$$

L'inégalité $1 \le c_\alpha \le (d+1)^k$ permet de conclure. □

DÉFINITION 3.21. Pour $s \in \mathbf{R}$, l'espace de Sobolev fractionnaire $H^s(\mathbf{R}^d)$ est l'ensemble des distributions tempérées u telles que $(1+|\cdot|^2)^{s/2}\mathcal{F}u \in L^2(\mathbf{R}^d)$.

PROPOSITION 3.22. *$H^s(\mathbf{R}^d)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|u\|_{H^s} = \|(1+|\cdot|^2)^{s/2}\mathcal{F}u\|_{L^2}$. $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ est un sous-espace dense de $H^s(\mathbf{R}^d)$. Pour $s \in \mathbf{N}$, $H^s(\mathbf{R}^d)$ coïncide avec $W^{s,2}(\mathbf{R}^d)$ (normes équivalentes).*

Démonstration. Comme tout espace L^2, $L^2(\mathbf{R}^d, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$ est un espace de Hilbert, et il est facile de vérifier qu'il est constitué de distributions tempérées. $H^s(\mathbf{R}^d)$ est défini comme $\mathcal{F}^{-1}(L^2(\mathbf{R}^d, (1+|\xi|^2)^s d\xi))$, c'est donc un espace de Hilbert pour la norme transportée.

Comme $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ est un sous-espace dense de $L^2(\mathbf{R}^d, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$, et comme $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, on a que $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ est un sous-espace dense de $H^s(\mathbf{R}^d)$. De plus on sait que $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, donc a fortiori pour la norme de H^s. On obtient donc la densité de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ dans H^s.

Le cas $s \in \mathbf{N}$ a été traité dans le Lemme 3.20. □

Remarque 3.23. (Pour la culture) Par les propriétés de la transformée de Fourier, pour u régulière et $s \in 2\mathbf{N}$, on a $(1+\Delta)^{s/2}u = \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}u)$. Cette formule permet de donner un sens à $(1+\Delta)^{s/2}u$ pour tout $s \in \mathbf{R}$ (et même pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$), et alors $\|u\|_{H^s} = \|(1+\Delta)^{s/2}u\|_{L^2}$. Cette formule permettrait de définir les espaces $H^{s,p}(\mathbf{R}^d)$ comme l'ensemble des distributions tempérées u telles que $(1+\Delta)^{s/2}u \in L^p$. Il est encore vrai que pour $s \in \mathbf{N}$ ces espaces coïncident avec les espaces $W^{s,p}(\mathbf{R}^d)$ (au moins pour $1 < p < \infty$), mais c'est beaucoup plus dur à montrer.

Pour définir les espace H^s sur un ouvert arbitraire Ω, ce n'est pas si simple car il n'y a pas de transformée de Fourier sur Ω. Mais le Théorème d'extension 3.11 justifie la

Définition 3.24. Pour Ω un ouvert arbitraire de $\mathbf{R}^d$, on note $H^s(\Omega)$ l'ensemble des restrictions à Ω des éléments de $H^s(\mathbf{R}^d)$.

Proposition 3.25. *Muni de la norme*

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf_{v \in H^s(\mathbf{R}^d), v|_\Omega = u} \|v\|_{H^s(\mathbf{R}^d)},$$

$H^s(\mathbf{R}^d)$ est un espace de Hilbert. Si $s \in \mathbf{N}$ et Ω est $\mathbf{R}^d_+$, ou bien un ouvert borné de bord C^s, $H^s(\Omega)$ coïncide avec $W^{s,2}(\mathbf{R}^d)$ (avec des normes équivalentes).

Démonstration. $H^s(\Omega)$ est défini comme le quotient de $H^s(\mathbf{R}^d)$ par le sous-espace des éléments de $H^s(\mathbf{R}^d)$ dont la restriction à Ω est nulle. Comme ce sous-espace est fermé, la première partie de la proposition découle du fait général que le quotient d'un espace de Hilbert par un sous-espace fermé est un espace de Hilbert pour la norme quotient. La deuxième partie de la proposition découle du théorème 3.11. □

3.2. Théorèmes de traces.

Théorème 3.26. *Soit $\Omega = \mathbf{R}^d_+$ et $s > 1/2$. Alors l'application qui à $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ associe sa restriction à $\partial\Omega$ s'étend (de manière unique) en une application continue et surjective de $H^s(\Omega)$ dans $H^{s-1/2}(\partial\Omega)$.*

Remarque 3.27. Ce théorème est aussi vrai dès que Ω est un ouvert borné à bord suffisamment régulier. On ne prouve pas cet énoncé ici, puisque la principale difficulté consiste à donner un sens à $H^s(\partial\Omega)$.

Démonstration. L'unicité découle du corollaire 3.13.

Pour l'existence, par la définition de $H^s(\mathbf{R}^d_+)$, il s'agit de montrer que

$$\|x \in \mathbf{R}^{d-1} \mapsto u(x,0)\|_{H^{s-1/2}} \leq C\|u\|_{H^s(\mathbf{R}^d)} \text{pour tout } u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d).$$

La formule de Fourier inverse nous permet d'exprimer la transformée de Fourier de la fonction $\widetilde{u}\colon x \mapsto u(x,0)$:

$$u(x,0) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbf{R}^d} e^{i(x,0)\cdot\xi} \mathcal{F}u(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \int_{\mathbf{R}^{d-1}} e^{ix\cdot\xi'} v(\xi')d\xi' \tag{9}$$

où $v(\xi') = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{F}u(\xi', \xi_d)d\xi_d$. Et donc $v = \mathcal{F}\widetilde{u}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis l'hypothèse $s > 1/2$

$$\begin{aligned} |v(\xi')|^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} (1 + |\xi'|^2 + \xi_d^2)^{-s} d\xi_d \int_{\mathbf{R}} (1 + |\xi'|^2 + \xi_d^2)^{s/2} |\mathcal{F}u(\xi', \xi_d)|^2 d\xi_d \\ &\leq C(1 + |\xi'|^2)^{-(s-1/2)} \int_{\mathbf{R}} (1 + |\xi'|^2 + \xi_d^2)^{s/2} |\mathcal{F}u(\xi', \xi_d)|^2 d\xi_d. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\|u(\cdot,0)\|^2_{H^{s-1/2}} = \int_{\mathbf{R}^{d-1}} (1 + |\xi'|^2)^{s-1/2} |v(\xi')|^2 d\xi' \leq C\|u\|^2_{H^s}.$$

Montrons que cette application de restriction est surjective. Pour cela on aura besoin d'une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\int \theta(t)dt = 1$. Soit $g \in H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{d-1})$. Soit $\hat{g} \in L^2(\mathbf{R}^{d-1}, (1+|\xi|^2)^{s-1/2}d\xi)$ sa transformée de Fourier. On définit $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ par

$$\mathcal{F}f(\xi', \xi_d) = \sqrt{2\pi}\hat{g}(\xi')\theta\left(\frac{\xi_d}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}\right) \frac{1}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}$$

et on vérifie que $f \in H^s(\mathbf{R}^d)$:

$$\begin{aligned} &\int (1 + |\xi'|^2 + \xi_d^2)^s |\mathcal{F}f(\xi', \xi_d)|^2 d\xi' d\xi_d \\ &\qquad\qquad = 2\pi \int_{\mathbf{R}} (1+t^2)^s \theta^2(t)dt \int_{\mathbf{R}^{d-1}} (1 + |\xi'|^2)^{s-1/2} |\hat{g}(\xi')|^2 d\xi'. \end{aligned}$$

L'application $g \mapsto f$ est donc une application linéaire bornée de $H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{d-1})$ dans $H^s(\mathbf{R}^d)$. Pour vérifier que la restriction de f à $\mathbf{R}^{d-1}$ est g pour tout $g \in H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{d-1})$ on peut donc supposer que $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{d-1})$. Dans ce cas $\mathcal{F}f$ et donc f appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, et l'égalite $f|_{\mathbf{R}^{d-1}} = g$ est donc la combinaison de (9) appliqué à $u = f$ et de la formule de transformée de Fourier inverse pour g. $\square$

Chapitre 4

Théorie spectrale

Dans ce chapitre (sauf éventuellement dans la partie sur les opérateurs compacts), les espaces vectoriels seront toujours complexes. Ce n'est pas essentiel pour la partie sur les opérateurs compacts, mais ça l'est plus pour l'étude des espaces de Hilbert.

Un opérateur borné est une application linéaire continue entre espaces de Banach. On rappelle que l'espace des opérateurs bornés de X dans Y, noté $\mathcal{L}(X, Y)$, est un espace de Banach pour la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

L'objet de ce chapitre est d'étudier ce qui reste vrai de la réduction des endomorphismes en dimension finie, lorsqu'on travaille sur des espaces (de Banach) de dimension infinie. On peut facilement voir que tout ne marche pas : le décalage sur ℓ^2 ($e_n \mapsto e_{n-1}$ si $n > 0$ et $e_0 \mapsto 0$) est un exemple d'opérateur surjectif non injectif. Comme le montre l'exemple de la multiplication par t sur $L^2([0, 1], dt)$, il existe aussi des opérateurs injectifs non surjectifs, et qui n'ont aucune valeur propre. Ce qui joue le rôle des valeurs propres est plutôt le spectre, qui est défini par

Définition 4.1. Le *spectre* d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est l'ensemble, noté $\sigma(T)$, des $\lambda \in \mathbf{C}$ [1] tels que $T - \lambda Id$ n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(X)$.

Remarque 4.2. Par le théorème de l'application ouverte, $\lambda \notin \sigma(T)$ si et seulement si $T - \lambda Id$ est injectif et surjectif.

Une première partie de ce chapitre consiste en l'étude des opérateurs compacts. Puis on se restreindra aux espaces de Hilbert.

1. Opérateurs compacts

Dans cette partie, X, Y désigneront toujours des espaces de Banach réels ou complexes.

1.1. Définitions. On aura besoin de la notion d'adjoint (Proposition 1.54). Étant donné un espace de Banach X, on note

$$\text{pour } A \subset X,\ A^\perp = \{x^* \in X^*, x^*(x) = 0\ \forall x \in A\},$$
$$\text{pour } A \subset X^*, {}^\perp A = \{x \in X, x^*(x) = 0\ \forall x^* \in A\}.$$

$A^\perp$ est un sous-espace fermé préfaible, et ${}^\perp A$ est un sous-espace fermé fort (et donc faible par le lemme de Mazur). Ces notations permettent d'utiliser le vocabulaire (et l'intuition) de la notion d'orthogonalité dans les espaces qui ne sont pas des

1. Lorsque l'espace X est réel, on définit bien sûr le spectre de T comme l'ensemble des *réels* tels que ...

espaces de Hilbert. Commençons par vérifier quelques propriétés qui restent vraies ici.

Lemme 4.3. *Si A est un sous-espace vectoriel de X, ${}^{\perp}(A^{\perp}) = \overline{A}$.*

Si A est un sous-espace fermé de X, $\dim A = \mathrm{codim} A^{\perp}$ *et* $\mathrm{codim} A = \dim A^{\perp}$ *(égalités dans $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$).*

Démonstration. L'inclusion $A \subset {}^{\perp}(A^{\perp})$ est évidente, et on obtient $\overline{A} \subset {}^{\perp}(A^{\perp})$ en prenant l'adhérence. Pour la réciproque, si $x \notin \overline{A}$, par Hahn-Banach il existe $x^* \in X^*$ tel que $x^*(x) = 1$ et $x^* = 0$ sur A (c'est-à-dire $x^* \in A^{\perp}$). Et donc $x \notin {}^{\perp}(A^{\perp})$.

Montrons que si $d = \dim A < \infty$, alors $A^{\perp}$ est de codimension finie d. Les autres égalités sont similaires. Soit $x_1^*, \dots, x_d^*$ une base de A^* étendue par Hahn-Banach en une famille (nécessairement libre) de X^*. Posons

$$F = vect(x_1^*, \dots, x_d^*) \subset X^*.$$

Clairement $F \cap A^{\perp} = \{0\}$. De plus pour tout $x^* \in X^*$, la restriction de x^* à A appartient à l'espace vectoriel engendré par les restrictions de x_i^* à A. Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ tel que $x^* - \sum_i \lambda_i x_i^* \in A^{\perp}$. Ce qui montre que $X^* = F \oplus A^{\perp}$, et donc conclut la preuve. □

Proposition 4.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors* $\ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^{\perp}$, *et* $\ker(T) = {}^{\perp}\mathrm{Im}(T^*)$.

Démonstration. Pour la première égalité, on a

$$\begin{aligned} y^* \in \ker(T^*) \Leftrightarrow T^* y^* = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X, \langle T^* y^*, x\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \forall x \in X, \langle y^*, Tx\rangle = 0 \Leftrightarrow y^* \in \mathrm{Im}(T)^{\perp}. \end{aligned}$$

La deuxième égalité est similaire. □

Définition 4.5. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est dit compact si $T(B_X)$ est relativement compact (pour la topologie forte de Y). On note $\mathcal{K}(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y), T \text{ compact }\}$.

Remarque 4.6. T est compact si et seulement si pour toute suite bornée (x_n) dans X, (Tx_n) a une sous-suite convergente.

Proposition 4.7. *Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*
— *Si T est de rang fini, T est compact.*
— *Si $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ est tel que* $\mathrm{Im}(T)$ *est fermé, alors T est de rang fini.*
— *$\mathcal{K}(X, Y)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Démonstration. Le premier point est vrai car en dimension finie, les fermés bornés sont compacts.

Soit $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ d'image fermé. Alors son image est un espace de Banach donc par le théorème de l'application ouverte, $T(B_X)$ contient une boule de $Im(T)$. Cela implique que $Im(T)$ est de dimension finie par le théorème de Riesz (la boule unité d'un espace vectoriel normé est relativement compacte si et seulement si l'espace est de dimension finie).

Si S et T sont compacts, on a $(T + S)(B_X) \subset T(B_X) + S(B_X)$ qui est relativement compact comme somme de relativement compacts. Il faut juste voir que $\mathcal{K}(X, Y)$ est fermé dans $\mathcal{L}(X, Y)$. Soit donc $T \in \overline{\mathcal{K}(X, Y)}$. Comme Y est complet, il s'agit de montrer que $T(B_X)$ est précompact, c'est-à-dire que pour tout

$\varepsilon > 0$, $T(B_X)$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε. Soit $S \in \mathcal{K}(X,Y)$ tel que $\|T - S\| < \varepsilon/2$ et (par compacité) $y_1, \dots, y_k \in Y$ tel que $S(B_X) \subset \cup_i B(y_i, \varepsilon/2)$. Alors $T(B_X) \subset \cup_i B(y_i, \varepsilon)$. cqfd. □

Théorème 4.8 (Schauder). *Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Alors T est compact si et seulement si T^* est compact.*

Démonstration. Supposons T compact. Soit y_n^* une suite dans B_{Y^*}, et notons f_n la fonction continue sur $K = \overline{T(B_X)}$ donnée par $f_n(y) = y_n^*(y)$. Alors la suite (f_n) est équicontinue (car $|f_n(y) - f_n(y')| \leq \|y - y'\|$) avec $f_n(0) = 0$, donc par le théorème d'Ascoli elle a une sous-suite qui converge uniformément sur K. En particulier elle est de Cauchy dans $C(K)$? Comme

$$\|T^* y_n^* - T^* y_m^*\|_{X^*} = \sup_{x \in B_X} |\langle T^* y_n^* - T^* y_m^*, x\rangle| = \sup_{y \in \overline{T(B_X)}} |(f_n - f_m)(y)|$$

pour tous entiers n, m, la suite $(T^* y_{\sigma(n)})_n$ est donc de Cauchy dans X^*, donc converge. Ceci montre que T^* est compact.

La réciproque est une conséquence formelle du sens direct, si l'on utilise l'inclusion canonique $J_Y \colon Y \to Y^{**}$. Si T^* est compact, alors T^{**} est compact par le point précédent. Or comme $J_Y \circ T = T^{**} \circ J_Y$, on a $J_Y(T(B_X)) = T^{**}(J_Y(B_X)) \subset T^{**}(B_{X^{**}})$ est relativement compact dans Y^{**} donc dans Y. □

1.2. Alternative de Fredholm. En dimension infinie, il n'est pas vrai qu'une application linéaire est injective si et seulement elle est surjective. L'alternative de Fredholm est un résultat important qui affirme cela reste vrai pour des perturbations compactes de l'identité.

Théorème 4.9. *Soit $T \colon X \to X$ compact et $\lambda \neq 0$. Alors*

(1) $\dim \ker(\lambda Id - T) < \infty$.

(2) $\mathrm{Im}(\lambda Id - T)$ *est fermé, de codimension finie et même* $\mathrm{Im}(\lambda Id - T) = {}^{\perp}\ker(\lambda Id - T^*)$.

(3) $\lambda Id - T$ *est injectif* $\Longleftrightarrow$ $\lambda Id - T$ *est surjectif.*

(4) Plus généralement, $\dim \ker(\lambda Id - T) = \mathrm{codim} \mathrm{Im}(\lambda Id - T) < \infty$.

Avant de donner la preuve, on énonce un petit lemme évident mais qui sera souvent utile.

Lemme 4.10. *Soit E un sous-espace vectoriel fermé de X et $x \in X \setminus E$. Alors il existe $x' \in x + E$ tel que $\|x'\| \leq 2d(x', E)$. Il existe aussi $x'' \in Vect(x, E)$ tel que $\|x''\| = 1$ et $d(x'', E) \geq 1/2$.*

Démonstration. Quitte à remplacer T par $\lambda^{-1} T$, on peut supposer $\lambda = 1$.

Commençons par montrer (1). En effet, $T\big|_{\ker(Id - T)} = Id\big|_{\ker(Id-T)}$ est à la fois compact et d'image fermé, donc de rang fini par la Proposition 4.7.

Ensuite montrons que $\mathrm{Im}(Id - T)$ est fermé. Soit une suite $y_n = x_n - Tx_n$ qui converge vers y. Pour tout n, x_n est défini modulo le sous-espace de dimension finie $\ker(T - Id)$, donc par le lemme 4.10 on peut supposer $\|x_n\| \leq 2d_n$ où $d_n = d(x_n, \ker(T - Id)) = \inf_{x \in \ker(T - Id)} \|x_n - x\|$. On aura fini si on montre que la suite x_n est bornée, puisqu'alors quitte à extraire on aura Tx_n qui converge, et donc $x_n = y_n + Tx_n$ aussi vers x, et donc $y = x - Tx \in \mathrm{Im}(Id - T)$. Si x_n n'était pas bornée, alors on pourrait extraire une sous-suite telle que $d_{\sigma(n)} \to \infty$

et $T(x_{\sigma(n)}/d_{\sigma(n)}) \to z \in X$. Si $z_n = x_{\sigma(n)}/d_{\sigma(n)}$, alors $d(z_n, \ker(T - Id)) = 1$ et $\lim_n z_n = \lim_n y_{\sigma(n)}/d_{\sigma(n)} + T(z_n) = z$. En particulier $z \in \ker(T - Id)$ ce qui contredit que $d(z_n, \ker(T - Id)) = 1$ pour tout n.

On en déduit (2) : comme par Hahn-Banach ${}^\perp(M^\perp) = M$ pour tout sous-espace fermé $M \subset X$, on obtient donc $\mathrm{Im}(Id - T) = {}^\perp \ker(Id - T^*)$ est de codimension finie car T^* est compact par le théorème de Schauder.

Pour (3), on commence par montrer la direction $\Longrightarrow$. Supposons par l'absurde que $Id-T$ est injectif mais pas surjectif. On pose $X_n = \mathrm{Im}(Id-T)^n$. C'est une suite décroissante de sous-espaces fermés X par le point précédent. Ils sont tous distincts. En effet par hypothèse il existe $x_0 \in X \setminus \mathrm{Im}(Id-T)$ et alors $(Id-T)^n x_0 \in X_n \setminus X_{n+1}$ car $(Id - T)^n$ est injectif. Le lemme 4.10 permet de construire une suite $e_n \in X_n$ tel que $\|e_n\| = 1$ et $d(e_n, X_{n+1}) \geq 1/2$. Alors pour tout $n > m$ on peut écrire

$$Te_m - Te_n = e_m + (Id - T)(e_n - e_m) - e_n \in e_m + X_{m+1},$$

et en particulier $\|Te_m - Te_n\| \geq 1/2$, ce qui contredit le fait que T est compact. Réciproquement, si $Id-T$ est surjectif alors par (2) $Id-T^*$ est injectif donc surjectif par la direction qu'on vient de prouver. $Id - T$ est donc injectif par la Proposition 4.4.

Pour (4) il suffit de même de montrer l'inégalité $d = \dim \ker(Id - T) \geq d' = \mathrm{codimIm}(Id - T)$. Supposons par l'absurde que $d < d'$. Soit F un sous-espace de X de dimension d' tel que $F \oplus \mathrm{Im}(Id - T) = X$, et $\Lambda\colon \ker(Id - T) \to F$ une application injective non surjective. Comme $\ker(T - Id)$ est de dimension finie, il existe P un projecteur continu sur $\ker(T - Id)$ (c'est-à-dire $P \in \mathcal{L}(X)$ tel que $P^2 = P$ et $\mathrm{Im}(P) = \ker(T - Id)$). On pose $S = T + \Lambda \circ P \in \mathcal{K}(X)$. D'une part $\mathrm{Im}(Id - S) \subset \mathrm{Im}(Id - T) + \mathrm{Im}(\Lambda)$ donc $Id - S$ n'est pas surjectif. D'autre part $Id - S$ est injectif (si $(Id - S)(x) = 0$, $x - Tx = \Lambda(Px) \in F \cap \mathrm{Im}(T - id) = \{0\}$; donc $x \in \ker(T - Id)$ et $x \in \ker \Lambda = \{0\}$) donc surjectif par (3). C'est absurde. □

1.3. Spectre d'un opérateur compact.

Théorème 4.11. *Soit X un espace de Banach de dimension infinie et $T \in \mathcal{K}(X)$. Alors*

— $0 \in \sigma(T)$.

— $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est l'ensemble des valeurs propres non nulles de T, qui sont toutes de multiplicité finie.*

— $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est ou bien un ensemble fini, ou bien l'ensemble des valeurs d'une suite tendant vers* 0.

Démonstration. Si $0 \notin \sigma(T)$, T est inversible donc $Id = T \circ T^{-1}$ est compacte. Donc $\dim(X) < \infty$, ce qui contredit l'hypothèse.

Soit $\lambda \in \sigma(T)$ non nul. Alors par l'alternative de Fredholm, $T - \lambda Id$ n'est pas injectif, c'est-à-dire que λ est une valeur propre de T. Toujours par l'alternative de Fredholm, $\ker(T - \lambda Id)$ est de dimension finie.

Pour montrer le dernier point, il suffit de montrer que $\sigma(T) \setminus B(0, r)$ est fini pour tout $r > 0$. Soit par l'absurde λ_n une suite de valeurs propres distinctes avec $|\lambda_n| \geq r$. Pour tout n, soit $x_n \neq 0$ un vecteur propre pour la valeur propre λ_n. La famille x_n est libre, donc par le lemme 4.10 on peut trouver des vecteurs de norme 1 $y_n \in \mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_n)$ tel que $d(y_{n+1}, \mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_n)) \geq 1/2$. Alors on peut écrire pour $n > m$,

$$\frac{Ty_n}{\lambda_n} - \frac{Ty_m}{\lambda_m} = y_n + \frac{Ty_n - \lambda_n y_n}{\lambda_n} - \frac{Ty_m}{\lambda_m} \in y_n + \mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

et donc $\|\frac{Ty_n}{\lambda_n} - \frac{Ty_m}{\lambda_m}\| \geq 1/2$, ce qui contredit le fait que l'on peut extraire de $\frac{Ty_n}{\lambda_n}$ une sous-suite convergente. □

2. Quelques propriétés du spectre, et algèbres de Banach

À partir de maintenant, tous les espaces vectoriels considérés seront complexes.

2.1. Algèbres de Banach et spectre.

DÉFINITION 4.12. Une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ est un espace de Banach (complexe) qui est aussi une algèbre avec unité 1, vérifiant les relations de compatibilité $\|1\| = 1$ et $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ pour tout $x, y \in \mathcal{A}$.

Pour nous une algèbre de Banach est munie d'une unité, mais cette terminologie n'est pas standard. Certains préfèrent parler d'algèbre de Banach *unifère*.

EXEMPLE 4.13. Si X est un espace de Banach, $\mathcal{L}(X)$ est une algèbre de Banach. Réciproquement (exercice!) toute algèbre de Banach est isométriquement isomorphe à une sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(X)$ pour un certain espace de Banach X. (considérer $\mathcal{A}$ agissant sur $X = \mathcal{A}$ par multiplication à gauche).

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach.

LEMME 4.14. *Si $x \in \mathcal{A}$, $\|x\| < 1$ alors $1 - x$ est inversible, et $\|(1-x)^{-1} - 1\| \leq \frac{\|x\|}{1-\|x\|}$.*

DÉMONSTRATION. Comme $\|x^n\| \leq \|x\|^n$, la série $\sum_{n\geq 0} x^n$ (avec la convention $x^0 = 1$) converge dans $\mathcal{A}$, et on calcule

$$(1-x)\sum_{n\geq 0} x^n = \sum_{n\geq 0} x^n - \sum_{n\geq 1} x^n = 1 = \sum_{n\geq 0} x^n(1-x).$$

Donc $(1-x)^{-1} = \sum_n x^n$, et on peut majorer

$$\|(1-x)^{-1} - 1\| \leq \sum_{n\geq 1} \|x\|^n = \frac{\|x\|}{1-\|x\|}.$$

□

On en déduit

PROPOSITION 4.15. *L'ensemble $\mathcal{A}^\dagger$ des éléments inversibles de $\mathcal{A}$ est ouvert; l'application $x \mapsto x^{-1}$ est continue sur $\mathcal{A}^\dagger$. De plus, pour tout $x, y \in \mathcal{A}$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{A}^*$, l'application*

$$\lambda \in \mathbf{C} \mapsto \varphi((x + \lambda y)^{-1})$$

est holomorphe sur son domaine.

DÉMONSTRATION. Si x est inversible, alors pour tout $\|h\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$, on a $\|x^{-1}h\| < 1$ donc par le lemme précédent, $(1 - x^{-1}h)$ est inversible. Comme $\mathcal{A}^\dagger$ est un groupe, $x(1 - x^{-1}h) = x - h$ est aussi inversible. Donc $\mathcal{A}^\dagger$ est ouvert. De plus, $\|(x+h)^{-1} - x^{-1}\| \leq \|x^{-1}\|\|(1 - x^{-1}h)^{-1} - 1\| \leq \|x^{-1}\|\frac{\|x^{-1}h\|}{1-\|x^{-1}h\|}$, qui tend vers 0 quand $\|h\|$ tend vers 0. D'où la continuité de l'inverse.

Pour $x, y \in \mathcal{A}$, l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $x + \lambda y$ est inversible est un ouvert car $\mathcal{A}^\dagger$ est un ouvert. Pour de tels λ, λ', on utilise la relation $a^{-1} - b^{-1} = a^{-1}(b-a)b^{-1}$ pour écrire

$$\frac{(x+\lambda y)^{-1} - (x+\lambda' y)^{-1}}{\lambda - \lambda'} = -(x+\lambda y)^{-1} y (x+\lambda' y)^{-1},$$

qui a une limite quand $\lambda' \to \lambda$ par la continuité de l'inverse. A fortiori en appliquant φ on obtient que $\lambda \mapsto \varphi((x+\lambda y)^{-1})$ est dérivable au sens complexe, c'est-à-dire holomorphe. $\square$

On peut étendre la définition du spectre aux éléments d'une algèbre de Banach.

Définition 4.16. Le *spectre* d'un élément x d'une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ est l'ensemble, noté $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$, des $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $x - \lambda$ n'est pas inversible dans $\mathcal{A}$.

Remarque 4.17. On insiste sur la dépendance de $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ sur l'algèbre $\mathcal{A}$: par exemple si $\mathcal{A}$ est l'adhérence des polynômes en z dans l'algèbre de Banach $C(\mathbb{T})$ des fonctions continues sur le cercle $\{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$, alors z est inversible dans $C(\mathbb{T})$ mais pas dans $\mathcal{A}$. Lorsqu'il n'y a aucune ambiguité possible sur $\mathcal{A}$, on écrira simplement $\sigma(x)$.

On a alors les propriétés

Théorème 4.18. *Le spectre d'un élement $x \in \mathcal{A}$ est un compact non vide de $\mathbf{C}$, contenu dans $\{\lambda, |\lambda| \leq \|x\|\}$.*

Démonstration. Par la proposition 4.15, le complémentaire du spectre est ouvert (car $\mathcal{A}^\dagger$ est ouvert) et contient l'ensemble des λ tels que $|\lambda| > \|x\|$. $\sigma(x)$ est donc fermé borné, donc compact. Supposons par l'absurde que $\sigma(x)$ est vide. Par Hahn-Banach il existe $\varphi \in \mathcal{A}^*$ tel que $\varphi(x^{-1}) \neq 0$. Considérons $f(\lambda) = \varphi((x-\lambda)^{-1})$. Par la proposition 4.15, c'est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$, qui tend vers 0 à l'infini et qui est non nulle en 0. Cela contredit le théorème de Liouville qui affirme que toute fonction entière et bornée est constante. $\square$

2.2. Formule du rayon spectral.

Définition 4.19. Soit $x \in \mathcal{A}$. Le rayon spectral de x est

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Par le théorème 4.18, $\rho(x) \leq \|x\|$. On va montrer

Théorème 4.20. *Pour tout $x \in \mathcal{A}$,*

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

Pour la preuve on aura besoin du

Lemme 4.21. *Soit $x \in \mathcal{A}$ et $P \in \mathbf{C}[X]$. Alors $\sigma(P(x)) = P(\sigma(x))$.*

Démonstration. Si $P = 0$ c'est évident. Supposons donc $P \neq 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, décomposons $P - \lambda = C\prod_i (X - \lambda_i)$. Alors $P(x) - \lambda = C\prod(x - \lambda_i)$, et le lemme découle de l'observation que $\prod(x-\lambda_i)$ est inversible si et seulement si $x - \lambda_i$ est inversible pour tout i. Un sens est immédiat car $\mathcal{A}^\dagger$ est un groupe. L'autre direction est vraie car les $x - \lambda_i$ commutent. En effet, si y est l'inverse de $\prod(x-\lambda_i)$, alors $x - \lambda_i$ a un inverse à gauche, $y\prod_{j\neq i}(x-\lambda_j)$, et un inverse à droite, $\prod_{j\neq i}(x-\lambda_j)y$. Par associativité du produit, ces deux inverses coïncident et $x - \lambda_i$ est inversible. $\square$

Démonstration du Théorème 4.20. Par le lemme on a $\rho(x)^n = \rho(x^n) \leq \|x^n\|$ et donc $\rho(x) \leq \liminf \|x^n\|^{1/n}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{A}^*$. Considérons la série entière $\theta(z) = \sum_n \varphi(x^n) z^n$. Son rayon de convergence est $R = 1/\limsup_n |\varphi(x^n)|^{1/n}$. D'autre part, elle est égale à $\varphi((1 - zx)^{-1})$ sur $B(0, \frac{1}{\|x\|})$, et cette formule définit une extension holomorphe de θ à $\{z, 1/z \notin \sigma(x)\}$. En particulier, θ est holomorphe sur $B(0, 1/\rho(x))$. Par la magie de l'analyse complexe on en déduit $R \geq 1/\rho(x)$, c'est-à-dire $\limsup_n |\varphi(x^n)|^{1/n} \leq \rho(x)$.

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, si on note $y = x/(\rho(x)+\varepsilon)$, on a $\sup_n |\varphi(y^n)| < \infty$ pour tout $\varphi \in \mathcal{A}^*$. Par le théorème de Banach-Steinhaus, on a $\sup_n \|y^n\| < \infty$, et donc $\limsup \|x^k\|^{1/k} \leq \rho(x) + \varepsilon$. On conclut en faisant $\varepsilon \to 0$. □

3. Opérateurs autoadjoints et normaux sur un espace de Hilbert

3.1. Rappels sur les espaces de Hilbert. Un espace de Hilbert H est un espace de Banach complexe dont la norme provient d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une application $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H \times H \to \mathbf{C}$ qui est *sesquilinéaire* (c'est-à-dire linéaire en la première variable, antilinéaire en la seconde variable) et telle que $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ pour tout $x \in H$. Pour éviter de rares problèmes, **on supposera toujours que les espaces de Hilbert sont séparables**.

Remarque 4.22. Le produit scalaire est uniquement déterminé par la norme, par les deux *formules de polarisation*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta} \|x + e^{i\theta} y\|^2 d\theta,$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2 \right).$$

On en déduit par exemple que $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ pour tout $x, y \in H$.

Exercice 4.23. Un espace de Banach complexe H est un espace de Hilbert si et seulement si $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ pour tout $x, y \in H$.

On rappelle le théorème de représentation de Riesz dans le cas complexe, qui prend exactement la même forme que dans le cas réel.

Théorème 4.24. *Soit H un espace de Hilbert et $\varphi \in H^*$. Il existe un unique $y \in H$ tel que*

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle \ \forall x \in H.$$

De plus $\|\varphi\|_{H^*} = \|y\|_H$.

Profitons-en pour en déduire le

Théorème 4.25 (Lax-Milgram). *Soit $a \colon H \times H \to \mathbf{C}$ une forme sesquilinéaire continue et coercive, c'est-à-dire il existe $c > 0$ tel que $\Re(a(v,v)) \geq c\|v\|^2$. Alors pour tout $\varphi \in H^*$ il existe un unique $u \in H$ tel que*

$$a(v, u) = \varphi(v) \ \forall v \in H.$$

Si de plus a est hermitienne ($a(u,v) = \overline{a(v,u)}$ pour tout u, v) alors u est caractérisé par la propriété

$$\frac{1}{2} a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2} a(v,v) - \Re\varphi(v) \right).$$

Démonstration. Par le théorème de Riesz, la donnée de a est équivalente à la donnée d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$, tel que $a(v,u) = \langle v, Au\rangle$. Il s'agit de montrer que A est inversible. A est clairement injectif car $\Re\langle u, Au\rangle \geq c\|u\|^2$. On déduit aussi de cette inégalité et de Cauchy-Schwarz $\|Au\| \geq c\|u\|$, donc que l'image de A est fermée. Enfin l'image est dense puisque si $v \in \mathrm{Im}(A)^\perp$, $\langle Au, v\rangle = 0$ pour tout u et donc en prenant $u = v$ on obtient $c\|v\|^2 = 0$.

Reste la formule variationnelle. Pour tout $v \in H$ on a

$$\frac{1}{2}a(v,v) - \Re\varphi(v) - \frac{1}{2}a(u,u) + \varphi(u) = \frac{1}{2}\left(a(v,v) + a(u,u) - 2\Re a(v,u)\right),$$

ce qui sous l'hypothèse que a est hermitienne se factorise en $\frac{1}{2}a(v-u, v-u)$, qui est ≥ 0 avec égalité si et seulement si $u = v$. □

Remarque 4.26. Le théorème de représentation de Riesz montre que H^* est aussi un espace de Hilbert, de même dimension que H. H et H^* sont donc isomorphes. Par contre, il est important de remarquer que (contrairement au cas des espaces de Hilbert réels) on n'a pas d'isomorphisme naturel entre H et H^*. Plus précisément, l'identification de φ avec *y n'est pas linéaire* mais antilinéaire : si $\varphi \in H^*$ correspond à $y \in H$, alors $i\varphi$ correspond à $-iy$. De manière plus sophistiquée, on dirait que H^* est naturellement isomorphe à $\overline{H}$ (qui est H comme $\mathbf{R}$-espace de Banach, mais dans lequel la nouvelle multiplication par un scalaire complexe, notée $\cdot$, est tordue par la conjugaison complexe : $\lambda \cdot x = \overline{\lambda} x$).

3.2. Adjoint hilbertien. Soit H un espace de Hilbert.

Définition 4.27. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$.
— On note $T^* \in \mathcal{L}(H)$ et on appelle *adjoint de* T l'unique opérateur tel que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \ \forall x, y \in H.$$

— T est dit *autoadjoint* si $T^* = T$.
— T est dit *normal* si $T^*T = TT^*$.

Si T est autoadjoint et $P \in \mathbf{R}[X]$, alors $P(T)$ est autoadjoint. Si $P \in \mathbf{C}[X]$, $P(T)$ est normal.

On fera attention à ce que $T \in \mathcal{L}(H) \mapsto T^* \in \mathcal{L}(H)$ n'est pas linéaire mais antilinéaire : $(\lambda T + \mu S)^* = \overline{\lambda}T^* + \overline{\mu}S^*$.

Exemple 4.28. Un opérateur $P \in \mathcal{L}(H)$ est une projection orthogonale si et seulement si $P = P^* = P^2$.

Exemple 4.29. Si $U \in \mathcal{L}(H)$ est une isométrie linéaire surjective (on dit que U est *unitaire*), alors $U^* = U^{-1}$. En effet, la relation $\|Ux\|^2 = \|x\|^2$ implique que $\langle U^*Ux, x\rangle = \langle x, x\rangle$. Par polarisation, on en déduit $U^*U = Id$, et donc $U^{-1} = U^*$ car U est supposée inversible.

Exemple 4.30. Une isométrie partielle est un opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ tel que U^*U et UU^* sont des projections. Dans ce cas U est une isométrie entre l'image de U^*U et l'image de UU^*, et est nulle sur l'orthogonal de l'image de U^*U.

Remarque 4.31. Cette notion d'adjoint diffère de la notion d'adjoint pour les espaces de Banach, puisqu'ici $T^* \in \mathcal{L}(H)$ alors que l'adjoint "espace de Banach" est un opérateur sur H^*. En fait ces deux notions coïncident via l'identification (antilinéaire) de H avec H^* donnée par le théorème de Riesz. Le fait que cette identification entre H et H^* est antilinéaire ce reflète dans l'antilinéarité de $T \in$

$\mathcal{L}(H) \mapsto T^* \in \mathcal{L}(H)$, alors que l'adjoint "espace de Banach" $T \in \mathcal{L}(H) \mapsto T^* \in \mathcal{L}(H^*)$ est une application linéaire. Mais comme tout ceci est un peu troublant, il vaut peut-être mieux dans ce chapitre oublier la notion d'adjoint "espaces de Banach" pour ne se souvenir que de la notion hilbertienne.

Une première observation est

LEMME 4.32. *Le spectre d'un opérateur autoadjoint est contenu dans* $\mathbf{R}$.

DÉMONSTRATION. Soit $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$. Commençons par observer que $\langle Tx, x\rangle$ est réel pour tout $x \in H$. En effet,

$$\overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle = \langle Tx, x\rangle.$$

Soit maintenant $\lambda \notin \mathbf{R}$. Il s'agit de montrer que $\lambda - T$ est inversible. Par ce qu'on vient d'observer,

$$\Im\langle(\lambda - T)x, x\rangle = \Im\lambda\|x\|^2,$$

et donc $a(x, y) = \pm i\langle(\lambda - T)x, y\rangle$ (en fonction du signe de λ) definit une forme sesquilinéaire et coercive. Par le théorème de Lax-Milgram on en déduit que $(T - \lambda)$ est inversible. □

On prouve maintenant la

PROPOSITION 4.33. *Soit T un opérateur normal. Alors $\rho(T) = \|T\|$.*

La preuve que l'on donne repose sur

LEMME 4.34. *Pour $T \in \mathcal{L}(H)$, $\|T^*T\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2$.*

DÉMONSTRATION. La formule $\|T\| = \sup_{x,y\in B_H} |\langle Tx, y\rangle|$ et la définition de l'adjoint impliquent que $\|T\| = \|T^*\|$. On en déduit que $\|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$. Pour l'inégalité inverse, on observe

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*T\|\|x\|^2.$$

□

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.33. Tout d'abord le Lemme 4.34 implique que $\|S^2\| = \|S\|^2$ si S est autoadjoint, et donc que $\|S^n\| = \|S\|^n$ pour tout n puissance de 2. Soit maintenant T normal. Alors pour n une puissance de 2, en utilisant successivement le Lemme 4.34, l'hypothèse que T est normal, l'observation précédente avec $S = T^*T$ puis le Lemme 4.34 on a

$$\|T^n\|^2 = \|(T^*)^n T^n\| = \|(T^*T)^n\| = \|T^*T\|^n = \|T\|^{2n}.$$

On conclut par le Théorème 4.20. □

3.3. Décomposition spectrale des opérateurs compacts autoadjoints.

THÉORÈME 4.35. *Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur compact normal. Alors T admet une base hilbertienne de vecteurs propres.*

DÉMONSTRATION. Par le théorème 4.11, $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est fini (de cardinal N) ou bien constitué d'une suite tendant vers 0. Indexons le par $\{1, 2, \ldots, N\}$ ou $\mathbf{N}^*$. En notant $\lambda_0 = 0$, on peut donc écrire $\sigma(T) = (\lambda_n)_{0\leq n\leq N}$ ou $\sigma(T) = (\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$, que l'on abrège en $\sigma(T) = (\lambda_n)_{n\geq 0}$. Soit $E_n = \ker(T - \lambda_n Id)$. Alors E_n est de dimension finie pour tout $n \geq 1$. De plus, E_n est stable par T^* puisque T et T^* commute. De plus, si $x, y \in E_n$ on a

$$\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \overline{\lambda_n}\langle x, y\rangle.$$

Cette inégalité montre que $T^*x - \overline{\lambda_n}x$ est orthogonal à E_n ; comme ce vecteur appartient à E_n par ce qui précède, il est nul et $T^*x = \overline{\lambda_n}x$. On en déduit que les E_n sont orthogonaux deux a deux. En effet, pour $x \in E_n$ et $y \in E_m$ on a

$$\lambda_n\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \lambda_m\langle x, y\rangle.$$

En particulier si $n \neq m$ on a bien que E_n et E_m sont orthogonaux deux à deux. Montrons maintenant que l'orthogonal de $F = \oplus_{n\geq 1}E_n$ est E_0. L'inclusion $E_0 \subset F^\perp$ découle de ce qu'on vient de montrer. Pour la réciproque, tout d'abord F est stable par T et par T^*, il en est de même de son orthogonal $F^\perp$ (si $x \in F^\perp$, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = 0$ pour tout $y \in F$ et de même pour T^*). On peut donc considérer l'opérateur T', la restriction de T à $F^\perp$. C'est un operateur compact normal sans valeur propre non nulle. Donc son spectre est réduit à $\{0\}$, et par la Proposition 4.33, $T' = 0$. Cela implique donc que $F^\perp \subset E_0$.

Pour résumer, on a une décomposition orthogonale $H = \oplus_{n\geq 0}E_n$. On obtient donc une base hilbertienne de vecteurs propres de T en prenant pour tout n une base hilbertienne de E_n. □

3.4. Application à l'équation de la chaleur sur un domaine borné. Cette section est basée sur le chapitre $IX.8$ et le dernier chapitre de [**Bre83**]. Soit Ω un domaine borné de $\mathbf{R}^d$. On étudie l'équation de la chaleur sous la forme du problème suivant, d'inconnue $u\colon \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbf{C}$ et de donnée initiale $u^0\colon \overline{\Omega} \to \mathbf{C}$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u\,|_{\partial\Omega} = 0, & \\ u(\cdot, 0) = u^0. & \end{array}\right. \tag{10}$$

Cette équation modélise l'évolution de la distribution de température dans le domaine Ω, si l'on maintient le bord à température nulle.

Proposition 4.36. *Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ un ouvert borné. Il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $L^2(\Omega)$ et une suite de réels strictement positifs $\lambda_n \to \infty$ telles que $e_n \in C^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$ dans Ω.*

Le preuve utilise

Lemme 4.37 (Inégalité de Poincaré). *$u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente sur $H_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. Il suffit de trouver une constante C telle que $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\partial_1 u\|_{L^2}$ pour tout $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, ce qui est facile en écrivant $u(x) = \int_{-\infty}^0 \partial_1 u(x + te_1)dt$ et en se souvenant que Ω est borné. □

Démonstration de la Proposition 4.36. On travaille sur $H_0^1(\Omega)$ que l'on voit par l'inégalité de Poincaré comme un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$, où $\cdot$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbf{C}^d$: $x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i\overline{y_i}$. Pour tout $f \in L^2$, la forme linéaire $\varphi \in H_0^1 \mapsto \int \varphi\overline{f}$ est continue sur H_0^1 (et non nulle sauf si $f = 0$), donc par le théorème de Riesz il existe un unique $u \in H_0^1$ tel que cette forme linéaire correspond à $\varphi \mapsto \langle\varphi, u\rangle$. On note cette fonction Tf, et $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$. Comme $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ est une injection compacte, on peut voir T comme un opérateur compact sur $L^2(\Omega)$. Il est autoadjoint : pour tout $f, g \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$,

$$\int (Tf)\overline{g} = \int \nabla(Tf) \cdot \nabla(Tg) = \int f\overline{Tg}.$$

En prenant $f = g$ on obtient $\int Tf\overline{f} = \int |\nabla(Tf)|^2 \geq 0$, donc les valeurs propres de T sont toutes positives. Elles sont même strictement positives car T est injectif. Par le théorème 4.35, $L^2(\Omega)$ a une base hilbertienne e_n de vecteurs propres de T, de valeur propre $\mu_n > 0$ qui tend vers 0. En particulier pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la distribution Δe_n vérifie

$$\mu_n(-\Delta e_n)\varphi = \int \nabla(\mu_n e_n) \cdot \nabla\overline{\varphi} = \int e_n \varphi,$$

et donc $-\Delta e_n = 1/\mu_n e_n$ au sens des distributions. En utilisant de la régularité elliptique (voir tds) on a en fait que $e_n \in \cap_{m \geq 0} H^m(\omega) = C^\infty(\omega)$ pour tout ouvert ω relativement compact dans Ω. $\square$

REMARQUE 4.38. En écrivant $\int \nabla e_n \cdot \nabla e_m = -\int \Delta e_n \overline{e_m} = \lambda_n \int e_n \overline{e_m} = \lambda_n \delta_{n,m}$, on obtient que la famille $(e_n/\sqrt{\lambda_n})$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. Et même une fonction $u = \sum_n a_n e_n \in L^2$ appartient à H_0^1 si et seulement si $\sum_n \lambda_n |a_n|^2 < \infty$.

On peut maintenant résoudre l'équation (10) (sans le terme de bord) dans le cas où $u^0 \in L^2(\Omega)$ et où on cherche $u \in C^1([0,\infty); L^2(\Omega))$. En effet, on décompose alors pour tout t $u(\cdot, t)$ dans la base hilbertienne des e_n donnée par la proposition 4.36 :

$$u(x,t) = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n(t) e_n(x).$$

L'équation $\partial_t u - \Delta u = 0$ devient donc $a_n'(t) + \lambda_n a_n(t) = 0$, et donc $a_n(t) = e^{-\lambda_n t} a_n(0)$, où $a_n(0)$ est déterminé par $u^0 = \sum_n a_n e_n$. Et a posteriori on voit que $u(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $t > 0$ puisque $\sum_n \lambda_n e^{-2\lambda_n t} |a_n|^2 < \infty$ dès que $\sum |a_n|^2 < \infty$ et $t > 0$. Il faut plus de travail (et de conditions de régularité sur le bord de Ω) pour obtenir plus de régularité sur u (voir [**Bre83**] et les références qui y sont citées).

3.5. Calcul fonctionnel pour les opérateurs normaux. Dans cette partie, le premier énoncé nous permettra de donner un sens à $f(T)$ pour tout opérateur normal T et toute fonction continue sur $\sigma(T)$. On parle de *calcul fonctionnel continu.*

THÉORÈME 4.39. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, et $K = \sigma(T) \subset \mathbf{C}$. Il existe une unique application linéaire $\tau \colon C(K) \to \mathcal{L}(H)$ tel que*

— $\tau(z \mapsto 1) = Id$
— $\tau(z \mapsto z) = T$
— $\tau(\overline{f}) = \tau(f)^*$
— $\tau(fg) = \tau(f)\tau(g)$
— $\|\tau(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f\|_{C(K)}$

REMARQUE 4.40. En fait on écrira toujours $\tau(f) = f(T)$. Heureusement cette notation est consistante lorsque P est un polynôme.

Nous donnerons deux preuves de ce théorème. La première que nous donnons maintenant, ne marche que pour les opérateurs autoadjoint. La seconde utilise la théorie de Gelfand, qui consitituera le dernier chapitre de ce cours.

Démonstration. Dans cette preuve on ne traite que le cas particulier où T est autoadjoint. Pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$, $P(T)$ est un opérateur normal, donc par les lemmes 4.21 et 4.33 on a

$$\|P(T)\|_{\mathcal{L}(H)} = \rho(P(T)) = \sup\{|P(\lambda)|, \lambda \in \sigma(T)\} = \|P\|_{C(K)}.$$

En particulier, $P(T)$ de dépend que de la fonction $P|_K : \lambda \mapsto P(\lambda) \in C(K)$. On peut donc poser $\tau(P|_K) = P(T)$. Cela définit τ du sous-espace des fonctions polynomiales à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$, qui vérifie toutes les conditions du théorème. On peut donc étendre par continuité τ à l'adhérence des fonctions polynomiales dans $C(K)$, qui est $C(K)$ tout entier par le théorème de Weierstrass. Les conditions du théorème restent vraies par densité. $\square$

Définition 4.41. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit diagonalisable s'il existe un espace mesuré (X, μ), une isométrie linéaire surjective $U\colon H \to L^2(X, \mu)$, et une fonction $g \in L^\infty(X, \mu)$ telle que $T = U^{-1} \circ M_g \circ U$, où $M_g \in \mathcal{L}(L^2(X, \mu))$ est l'opérateur de multiplication par g.

Remarque 4.42. Pour un opérateur diagonalisable T, on peut donc donner un sens à $f(T)$ pour toute fonction f borélienne sur $\mathbf{C}$, on posant $f(T) = U^{-1} M_{f \circ g} U$. En travaillant un peu plus (voir par exemple le chapitre 2 de [**Con00**]), on montre que $M_{f\circ g}$ ne dépend que des valeurs de f sur $\sigma(T)$. On a donc donné un sens à $f(T)$ pour toute fonction borélienne f sur $\sigma(T)$. On parle de *calcul fonctionnel borélien.*

Remarque 4.43. Pour tout ensemble borélien $\Delta \subset \sigma(T)$, l'opérateur $E(\Delta) = U^{-1} M_{1_\Delta \circ g} U$ est une projection qui commute avec T. On peut vérifier que E vérifie plusieurs des axiomes des mesures : $E(\emptyset) = 0$, $E(\sigma(T)) = 1$, $E(\Delta \cup \Delta') = E(\Delta) + E(\Delta') - E(\Delta \cap \Delta')$, et si (Δ_n) sont des parties mesurables disjointes, $\langle E(\cup_n \Delta_n)x, y\rangle = \sum_n \langle E(\Delta_n)x, y\rangle$. E est appelé une mesure à valeur projections, et on écrit $f(T) = \int f dE$.

On peut observer qu'un opérateur diagonalisable est nécessairement normal. On va montrer la réciproque.

Théorème 4.44. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Alors T est diagonalisable.*

Dans la preuve on aura besoin de la notion de vecteur cyclique.

Définition 4.45. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Un vecteur $\xi \in H$ est cyclique pour T si H est le seul sous-espace fermé de H qui contient ξ et qui est invariant par T et T^*.

Lemme 4.46. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. On suppose de plus qu'il existe un vecteur cyclique ξ. Alors T est diagonalisable.*

Démonstration. Notons $K = \sigma(T)$. Soit $\tau\colon C(K) \to B(H)$ donné par le théorème 4.39. On définit une forme linéaire φ sur $C(K)$ par $\varphi(g) = \langle \tau(g)\xi, \xi\rangle$. Elle est continue car

$$|\varphi(g)| \leq \|\tau(g)\|_{\mathcal{L}(H)} \|\xi\|^2 = \|g\|_{C(K)} \|\xi\|^2.$$

De plus elle est positive : si $g \in C(K)$ est positive, on peut écrire $g = \overline{h}h$ pour $h \in C(K)$, et donc

$$\varphi(f) = \langle \tau(\overline{h}h)\xi, \xi \rangle = \langle \tau(h)^*\tau(h)\xi, \xi \rangle = \|\tau(h)\xi\|^2 \geq 0.$$

Par le théorème de Riesz pour les mesures, il existe une mesure μ borélienne sur K telle que $\varphi(g) = \int g d\mu$. Soit $W \colon C(K) \to H$ l'application $W(g) = \tau(g)\xi$. Alors $\|W(g)\| = \langle \tau(g)\xi, \tau(g)\xi \rangle = \langle \tau(|g|^2)\xi, \xi \rangle = \int |g|^2 d\mu$. W est donc une isométrie pour les normes L^2. Comme $C(K)$ est dense dans $L^2(X, \mu)$ on peut donc étendre W en une isométrie $U \colon L^2(X, \mu) \to H$. Soit $f \in C(K)$ la fonction définie par $f(z) = z$. Alors pour tout $g \in C(K)$, $U(M_f g) = W(fg) = \tau(fg)\xi = TU(g)$. Par densité l'égalité $U \circ M_f = T \circ U$ est valable sur tout $L^2(X, \mu)$. Pour conclure il suffit de voir que U est surjectif. Mais son image est un sous-espace fermé contenant ξ et invariant par T et T^*. C'est donc H. $\square$

Démonstration du théorème 4.44. On commence par prouver qu'il existe une décomposition orthogonale (finie ou dénombrable puisque H est supposé séparable) $H = \oplus_i H_i$ en sous-espace invariants par T et T^* et admettant un vecteur cyclique pour T. En effet, par le lemme de Zorn, il existe une famille maximale (H_i) de tels espaces deux à deux orthogonaux. Si par l'absurde l'inclusion $\oplus_i H_i \subset H$ était stricte, alors posons $H_0 = (\oplus_i H_i)^\perp$. Comme chacun des H_i est invariant par T (resp. T^*), H_0 est invariant pas T^* (resp. T). Soit $\xi \in H_0 \setminus \{0\}$. Alors $H_0' = \overline{\mathrm{vect}(T^n(T^*)^m\xi, n, m \in \mathbf{N})}$ est cyclique, invariant par T et T^*, et orthogonal à chaque H_i, ce qui contredit la maximalité de (H_i).

Écrivons donc $H = \oplus_i H_i$, et prenons pour tout i un vecteur cyclique $\xi_i \in H_i$. Par le lemme précédent on a des espaces mesurés (X_i, μ_i), des fonctions $g_i \in L^\infty(X_i, \mu_i)$ et des isométries linéaires $U_i \colon H_i \to L^2(X_i, \mu_i)$ telles que $T|_{H_i} = U_i^{-1} \circ M_{f_i} U_i$. Définissons $(X, \mu) = \oplus_i (X_i, \mu_i)$ (c'est-à-dire X est la réunion disjointe des X_i, μ est la mesure σ-finie $\mu(E) = \sum_i \mu_i(E \cap X_i)$ définie sur la tribu des E tels que $E \cap X_i$ est mesurable pour tout i) et $f(x) = f_i(x)$ si $x \in X_i$. Alors $L^2(X, \mu) \simeq \oplus_i L^2(X_i, \mu_i)$, d'où on déduit une isométrie surjective $U \colon H \to L^2(X, \mu)$ telle que $T = U^{-1} M_f U$. $\square$

3.6. Applications du calcul fonctionnel continu.

Proposition 4.47. *Soit $T \in B(H)$ un opérateur normal dont le spectre est contenu dans $\mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$ (ou plus généralement dans un ouvert simplement connexe de $\mathbf{C} \setminus \{0\}$). Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un opérateur normal S tel que $S^n = T$.*

Démonstration. Il existe une détermination continue du logarithme, donc de la racine n-ème sur $\mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$ (ou plus généralement sur tout ouvert simplement connexe de $\mathbf{C} \setminus \{0\}$). On pose donc $S = f(T)$ pour une telle détermination. L'égalité $S^n = T$ résulte des propriétés du calcul fonctionnel continu et de $f(z)^n = z$ sur $\mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$. $\square$

Proposition 4.48. *(Décomposition polaire) Soit $T \in B(H)$. Alors il existe une unique factorisation $T = US$ où U est une isométrie partielle et S est opérateur autoadjoint S de spectre contenu dans $\mathbf{R}^+$ tel que U^*U est la projection othogonale sur l'adhérence de l'image de S.*

Démonstration. Si $T = US$ est une telle décomposition, alors

$$T^*T = SU^*US = S^2$$

et donc nécessairement $S = \sqrt{T^*T}$. Donc S est uniquement déterminé par T, et U aussi, puisque U est nécessairement nulle sur l'orthogonal de l'image de S. Pour l'existence, on pose $S = \sqrt{T^*T}$. On remarque que pour tout $\xi \in H$, $\|T\xi\|^2 = \langle T^*T\xi, \xi\rangle = \|S\xi\|^2$, et donc on peut définir une isométrie de l'image de S dans l'image de T telle que $U(S\xi) = T\xi$. Elle s'étend en une isométrie de l'adhérence de l'image de S sur l'adhérence de l'image de T, et en définissant U par 0 sur l'orthogonal de l'image de S on obtient l'isométrie partielle recherchée. □

Proposition 4.49. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Si $\lambda \in \sigma(T)$ est isolé, alors λ est une valeur propre de T.*

Démonstration. Si λ est isolé, f, la fonction indicatrice de λ, est une fonction continue sur $\sigma(T)$. Notons $P = f(T)$. Par les propriétés du calcul fonctionnel, on a $\|P\| = \|f\|_{C(\sigma(T))} = 1$ donc en particulier P est non nul. De plus comme $zf(z) = \lambda f(z)$ pour tout $z \in \sigma(T)$, on a $TP = \lambda P$. Autrement dit les éléments de l'image de P sont des vecteurs propres pour la valeur propre λ.

En fait, P est la projection orthogonale sur $\ker(T-\lambda)$. Comme f est réelle et $f^2 = f$, $P = P^*$ et $P^2 = P$ par les propriétés du calcul fonctionnel. Ceci implique que P est la projection orthogonale sur son image. On a déjà vu que son image est contenu dans $\ker(T - \lambda Id)$. Pour la réciproque, Montrons que $Im(P)^\perp = \ker P$ ne contient pas de vecteur propre de valeur propre λ. Pour cela, considérons la fonction g continue sur $\sigma(T)$ égale à $g(z) = (z-\lambda)^{-1}$ si $z \neq \lambda$ et 0 sinon. Alors $(z-\lambda)g = (1-f)$, et donc si $x \in \ker P \cap \ker(T-\lambda)$,

$$x = (1-P)x = g(T)(T-\lambda)x = 0.$$

□

Proposition 4.50. *(Lemme de Schur) Soit S une partie de $B(H)$ stable par $x \mapsto x^*$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *Les seuls sous-espaces fermés invariants par tous les éléments de S sont $\{0\}$ et H.*
(2) *Le commutant de S est trivial : si $a \in B(H)$ est tel que $ax = xa$ pour tout $x \in S$, alors $a \in \mathbf{C}Id$*

Démonstration. (2)⇒(1) est évident car la projection orthogonale P sur un sous-espace fermé invariant par S vérifie $xP = PxP$ pour tout $x \in S$, et donc $Px = (x^*P)^* = (Px^*P)^* = PxP = xP$ puisque $x^* \in S$.

Pour la réciproque (1)⇒(2), on commence par traiter le cas où $a \in B(H)$ commute avec S et est autoadjoint. Si a n'est pas un multiple de l'identité, son spectre $\sigma(a)$ contient au moins deux élements distincts, et donc il existe deux fonctions f et g continues sur $\sigma(a)$ et non nulles telles que $fg = 0$. Alors l'adhérence K de l'image de $f(a)$ est un sous-espace fermé non nul de H, qui est invariant par S : si $x \in S$ et $\xi \in H$, $xf(a)\xi = f(a)x\xi \in K$. De plus K est distinct de H puisque $g(a)$ est nul sur K : $g(a)f(a)\xi = (fg)(a)\xi = 0$. Dans le cas général, si $a \in B(H)$ appartient au commutant de S, alors a^* aussi car $S = S^*$, et donc également les parties réelle et imaginaire de a. Par le cas autoadjoint, on en déduit que les parties réelle et imaginaire de a sont des multiples de l'identité, et donc a aussi. □

3.7. Application : Théorème ergodique de von Neumann. On donne ici une application du théorème de diagonalisation des opérateurs normaux. Le cadre est le suivant :

Soit (Ω, μ) un espace de probabilité et $T\colon \Omega \to \Omega$ une bijection mesurable d'inverse mesurable et préservant la mesure. On dira que φ est *ergodique* si les seuls ensembles essentiellement invariants par φ sont ceux de mesure totale ou nulle :

$$\forall A \subset \Omega \text{ mesurable } \mu(A \Delta T(A)) = 0 \Rightarrow \mu(A) \in \{0, 1\}.$$

THÉORÈME 4.51 (Théorème ergodique de von Neumann). *Soit T une transformation ergodique d'un espace de probabilité (Ω, μ). Alors pour tout $f \in L^2(\Omega, \mu)$,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \to \int f d\mu$$

dans $L^2(\Omega, \mu)$.

On peut traduire l'énoncé précédent purement en termes d'espaces de Hilbert. En effet, si T est une transformation préservant la mesure de (Ω, μ), l'opérateur $U\colon f \in L^2(\Omega, \mu) \mapsto f \circ T$ est un opérateur unitaire de $L^2(\Omega, \mu)$. Si de plus T est ergodique, $\ker(U - 1)$ se réduit aux fonctions constantes : en effet si $Uf = f$, l'ensemble $\{x, f(x) \in B\}$ est essentiellement T-invariant pour tout borélien B de $\mathbf{C}$, donc de mesure nulle ou pleine par ergodicité. Ceci montre bien que f est constante. Le théorème de von Neumann découle donc du

THÉORÈME 4.52. *Soit H un espace de Hilbert et U un opérateur unitaire sur H. On note P la projection orthogonale sur* $\ker(U - 1)$. *Alors pour tout $\xi \in H$,*

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k\xi = P\xi.$$

DÉMONSTRATION. Un opérateur unitaire est normal. Par le théorème 4.44 on peut supposer que $H = L^2(X, \nu)$ et $U = M_g$ pour un espace mesuré (X, ν) et une fonction $g \in L^\infty(X, \nu)$. Alors $1 = UU^* = M_{|g|^2}$, donc g est presque sûrement de module 1, et la projection P est la multiplication par la fonction indicatrice de $\{x, g(x) = 1\}$. On a donc presque sûrement

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k\xi(x) = \begin{cases} \xi(x) & \text{si } g(x) = 1 \\ \frac{1}{n}\frac{g(x)^n - 1}{g(x) - 1}\xi(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k\xi(x)$ converge presque sûrement vers $P\xi(x)$, et la convergence a aussi lieu dans L^2 par le théorème de convergence dominée. □

4. C^*-algèbres commutatives

4.1. Spectre d'une algèbre de Banach et transformée de Gelfand. Dans cette partie, $\mathcal{A}$ sera une algèbre de Banach commutative.

DÉFINITION 4.53. Un *caractère* de $\mathcal{A}$ est une forme linéaire Λ sur $\mathcal{A}$ telle que $\Lambda(1) = 1$ et $\Lambda(xy) = \Lambda(x)\Lambda(y)$ pour tout $x, y \in \mathcal{A}$.

Le *spectre* de $\mathcal{A}$ est l'ensemble $\widehat{\mathcal{A}}$ des caractères de $\mathcal{A}$.

Remarquons qu'un caractère n'est pas supposé continu. C'est automatique, comme le montre le

LEMME 4.54. *Si Λ est un caractère de $\mathcal{A}$ et $x \in \mathcal{A}$, $\Lambda(x) \in \sigma(x)$.*

Tout caractère de $\mathcal{A}$ est continu, et de norme 1. *Le spectre de $\mathcal{A}$, muni de la restriction de la topologie préfaible, est compact.*

Démonstration. Si Λ est un caractère et $\lambda \notin \sigma(x)$, on a

$$1 = \Lambda\left((x-\lambda)(x-\lambda)^{-1}\right) = \Lambda(x-\lambda)\Lambda(x-\lambda)^{-1}.$$

En particulier $\Lambda(x-\lambda) = \Lambda(x) - \lambda \neq 0$. Ce qui montre bien que $\Lambda(x) \in \sigma(x)$.

Comme le rayon spectral est plus petit que la norme, on obtient que $|\Lambda(x)| \leq \|x\|$. Et donc Λ est continue et de norme inférieure ou égale à 1. L'inégalité inverse est claire car $\Lambda(1) = 1$.

Il est facile de vérifier que $\widehat{\mathcal{A}}$ est une partie préfaiblement fermée de $\mathcal{A}^*$. Elle est bornée par ce qui précède ; elle est donc préfaiblement compacte par le théorème de Banach-Alaoglu (Théorème 1.42). ☐

Exemple 4.55. Soit $\mathcal{A} = \ell^1(\mathbf{Z})$ pour le produit de convolution : si $a = (a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ alors $a * b = (\sum_k a_k b_{n-k})_{n\in\mathbf{Z}}$. La correspondance $a \mapsto f_a$ où f_a est la fonction 2π-périodique $f_a(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n e^{int}$ identifie $\mathcal{A}$ avec l'ensemble des fonctions 2π-périodiques dont la suite des coefficients de Fourier est sommable, et $f_{a*b} = f_a f_b$.

$\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach commutative, et son spectre s'identifie à $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, le caractère correspondant à $t + 2\pi\mathbf{Z}$ étant $a \mapsto f_a(t)$.

Démonstration. Tout $t \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ définit clairement un caractère de A, et deux nombres distincts t, t' définissent des caractères distincts. Réciproquement, si χ est un caractère de $\mathcal{A}$, posons $z = \chi(e^{i\cdot})$ (où on identifie la fonction 2π-périodique $e^{i\cdot}$ avec sa suite de coefficients de Fourier $(\delta_{n,1})_{n\in\mathbf{Z}}$). Alors $|z| \leq \|e^{i\cdot}\|_A = 1$ et de plus comme $1/z = \chi(e^{-i\cdot})$, on a $|1/z| \leq 1$, ce qui prouve que $|z| = 1$. Si $t \in \mathbf{R}$ est tel que $e^{it} = z$, alors $\chi(a) = f_a(t)$ pour tout polynôme trigonométrique, et donc pour tout $a \in \mathcal{A}$ par densité. ☐

Définition 4.56. Un idéal $I \subset \mathcal{A}$ est un sous-espace strict de $\mathcal{A}$ tel que

$$x \in I \text{ et } y \in \mathcal{A} \Longrightarrow xy \in I.$$

Lemme 4.57. *Un idéal ne contient aucun élément inversible.*
Tout idéal maximal est fermé.
Tout idéal est contenu dans un idéal maximal.

Démonstration. Le premier point est clair : un idéal qui contiendrait un élément inversible contiendrait 1, et donc tout élément de $\mathcal{A}$. Pour le deuxième, remarquons que l'adhérence de tout idéal est un idéal (comme il n'intersecte pas l'ouvert des éléments inversibles, son adhérence non plus). Le troisième découle du lemme de Zorn. ☐

Le résultat essentiel suivant est dû à Gelfand.

Proposition 4.58. *L'application $\Lambda \in \widehat{\mathcal{A}} \mapsto \ker \Lambda$ réalise une bijection entre le spectre de $\mathcal{A}$ et les idéaux maximaux de $\mathcal{A}$.*

Démonstration. Cette application est injective : en effet si deux formes linéaires ont même noyau et prennent tous les deux la valeur 1 en 1, elles sont égales.

Pour la surjectivité c'est plus subtil. Soit I un idéal maximal. Il est fermé par le lemme précédent. On munit l'espace quotient $\mathcal{A}/I$ d'une structure d'algèbre de Banach de la façon suivante. Si $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$ est l'application quotient, on définit $\|\pi(x)\| = \inf_{y\in\mathcal{I}} \|x+y\|$. Cela fait de $\mathcal{A}/I$ un espace de Banach car I est fermé.

On définit un produit par $\pi(x)\pi(y) = \pi(xy)$. Il est bien défini car I est un idéal, et cela munit $\mathcal{A}/I$ d'une structure d'algèbre de Banach, et π est un morphisme d'algèbres de Banach. Dans cette algèbre, tout élément non nul est inversible. En effet, si $\pi(x) \neq 0$, cela signifie que $x \notin I$. Donc $I + x\mathcal{A} = \mathcal{A}$ (sinon ce serait un idéal contenant strictement I, contredisant la maximalité). En particulier il existe $y \in \mathcal{A}$ tel que $xy - 1 \in I$, et donc $\pi(x)\pi(y) = 1$. Donc $\pi(x)$ est inversible. Cela implique que $\mathcal{A}/I$ est isomorphe à $\mathbf{C}$: si $\pi(x) \in \mathcal{A}/I$, il existe $\lambda \in \sigma(\pi(x))$ par le théorème 4.18, et par ce qui précède $\pi(x) - \lambda = 0$. Donc π est en fait un caractère de $\mathcal{A}$, de noyau exactement I par construction. □

On en déduit

Proposition 4.59. *Soit $x \in \mathcal{A}$. Alors*

$$\sigma(x) = \{\Lambda(x), \Lambda \in \widehat{\mathcal{A}}\}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(x) \quad &\Leftrightarrow \quad x - \lambda \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \quad x - \lambda \text{ est contenu dans un idéal maximal} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \Lambda \in \widehat{\mathcal{A}}, \Lambda(x - \lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \Lambda \in \widehat{\mathcal{A}}, \Lambda(x) = \lambda. \end{aligned}$$

□

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative. Pour tout $x \in \mathcal{A}$, la fonction $\gamma(x) \colon \Lambda \in \widehat{\mathcal{A}} \mapsto \Lambda(x)$ est continue. Pour $x = 1$, c'est la fonction constante égale à 1. De plus $\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y)$ et par la proposition 4.59, $\sup_{\Lambda \in \widehat{\mathcal{A}}} |\Lambda(x)| = \rho(x) \leq \|x\|$. γ est donc un morphisme d'algèbres de Banach (unifères). Cela justifie la définition

Définition 4.60. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative. La *transformée de Gelfand* est le morphisme d'algèbres de Banach $\gamma \colon \mathcal{A} \mapsto C(\widehat{\mathcal{A}})$ défini par

$$\gamma(x)(\Lambda) = \Lambda(x).$$

Dans l'exemple 4.55, la transformée de Gelfand est l'application $a \mapsto f_a$.

Le théorème suivant est un résultat célèbre dû à Wiener. La preuve que l'on donne est due à Gelfand. Donner une preuve élémentaire de ce résultat était une de ses motivations pour développer la théorie des algèbres de Banach commutatives.

Théorème 4.61. *Soit $(a_n)_n \in \ell^1(\mathbf{Z})$. On suppose que $f(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n e^{int}$ ne s'annule pas sur $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Soit $g(t) = 1/f(t)$. Alors la suite $(\widehat{g}(n))_{n\in\mathbf{Z}}$ des coefficients de Fourier de g est dans $\ell^1(\mathbf{Z})$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{A}$ l'algèbre de Banch $\ell^1(\mathbf{Z})$ pour le produit de convolution comme dans l'exemple 4.55. L'hypothèse que f ne s'annule pas sur $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ équivaut à dire que $\chi(a) \neq 0$ pour tout caractère de l'algèbre de convolution $\ell^1(\mathbf{Z})$, et donc par la proposition précédente que a est inversible : il existe $b \in \ell^1(\mathbf{Z})$ tel que $a * b = 1$. Reste à voir que $(b_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier de g. Pour cela on évalue $a * b = 1$ en les caractères de $\ell^1(\mathbf{Z})$, et on obtient $f(t)f_b(t) = 1$ où $f_b(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} b_n e^{int}$. Et donc $g(t) = f_b(t) = \sum_n b_n e^{int}$, ce qu'il fallait démontrer. □

4.2. C^*-algèbres commutatives.

Définition 4.62. Une C^*-algèbre est une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ munie d'une opération $*\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ appelée involution, et qui vérifie les axiomes

— $x \mapsto x^*$ est antilinéaire.
— $(xy)^* = y^*x^*$ pour tout $x, y \in \mathcal{A}$.
— $(x^*)^* = x$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.
— $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Exemple 4.63. Si K est un espace topologique compact, $C(K)$ est une C^*-algèbre, pour la norme et le produit usuels, et l'involution $f^*(x) = \overline{f(x)}$.

Exemple 4.64. $\mathcal{L}(H)$ est une C^*-algèbre pour tout espace de Hilbert H ; pour l'opération d'adjoint hilbertien. Plus généralement toute sous-algèbre fermée et stable par l'adjoint est une C^*-algèbre. Un théorème qu'on ne montre pas ici affirme que toute C^*-algèbre peut être réalisée de cette manière.

De même que dans $\mathcal{L}(H)$ on définit les éléments autoadjoints, unitaires, les isométries partielles, normaux d'une C^*-algèbre.

Lemme 4.65. *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre. Si $x \in \mathcal{A}$ vérifie $x^* = x$, alors $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \mathbf{R}$.*

Démonstration. On a prouvé ce lemme pour $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$ en utilisant le théorème de Lax-Milgram. Voici une preuve valable en général. Soit $\lambda = a + ib \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Alors pour tout $t \in \mathbf{R}$, $a+i(b+t) \in \sigma_{\mathcal{A}}(x+it)$ et donc $|a+i(b+t)|^2 \leq \|x+it\|^2$, ce qui devient en utilisant le dernier axiome des C^*-algèbres

$$a^2 + (b+t)^2 \leq \|(x-it)(x+it)\| = \|x^2 - t^2\| \leq \|x\|^2 + t^2,$$

et donc $2bt \leq \|x\|^2 - a^2 - b^2$. Comme cette inégalité est vraie pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a bien $b = 0$, ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 4.66. *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre et $x \in \mathcal{A}$ est normal, alors $\rho(x) = \|x\|$.*

Démonstration. La même preuve que dans la Proposition 4.33 s'applique. □

En général, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ est une inclusion d'algèbres de Banach de même unité, un élément de $\mathcal{A}$ peut être inversible dans $\mathcal{B}$ sans être inversible dans $\mathcal{A}$. Autrement dit pour $x \in \mathcal{A}$, l'inclusion évidente $\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ peut être stricte (Remarque 4.17). Un fait important est que ce n'est pas possible pour des C^*-algèbres : on continuera donc à écrire $\sigma(x)$ sans se soucier de la C^*-algèbre dans laquelle on se place.

Proposition 4.67. *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ des C^*-algèbres (avec la même unité et la même norme) et $x \in \mathcal{A}$. Alors $\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{B}}(x)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si x est inversible dans $\mathcal{B}$, alors x est inversible dans $\mathcal{A}$. On commence par traiter le cas où x est auto-adjoint. Alors pour tout $t \in \mathbf{R}^*$, $\sigma_A(x+it) \subset \mathbf{R} + it$ par le Lemme 4.65, et en particulier $x + it$ est inversible dans $\mathcal{A}$. Or par continuité de l'inverse dans l'algèbre de Banach $\mathcal{B}$, $(x+it)^{-1}$ tend quand $t \to 0$ vers x^{-1} (l'inverse de x dans $\mathcal{B}$). Donc x^{-1} appartient à $\mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est complet donc fermé.

Supposons maintenant $x \in \mathcal{A}$ arbitraire, mais inversible dans $\mathcal{B}$. Alors x^*x est un élément de $\mathcal{A}$ autoadjoint et inversible dans $\mathcal{B}$, donc par le point précédent son inverse $(x^*x)^{-1} = x^{-1}(x^*)^{-1}$ appartient à $\mathcal{A}$, donc $x^{-1} = (x^*x)^{-1}x^*$ aussi. □

Si $T \in \mathcal{L}(H)$, la C^*-algèbre engendrée par T est l'adhérence des polynômes non commutatifs en T et T^*. C'est une C^*-algèbre commutative si et seulement si T est normal. Étudier les C^*-algèbres commutatives est presque étudier les opérateurs normaux.

THÉORÈME 4.68. *Si $\mathcal{A}$ est une C^*-algèbre commutative, la transformée de Gelfand est un isomorphisme d'algèbres de Banach, et elle vérifie $\gamma(x^*) = \overline{\gamma(x)}$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, comme $\mathcal{A}$ est commutative, tout élément $x \in \mathcal{A}$ est normal, et donc par les propositions 4.66 et 4.59

$$\|\gamma(x)\|_{C(\widehat{\mathcal{A}})} = \sup_{\Lambda \in \widehat{\mathcal{A}}} |\Lambda(x)| = \rho(x) = \|x\|.$$

Donc γ est isométrique. On prouvera que γ est surjective à la fin.

Si $x = x^* \in \mathcal{A}$, on obtient que pour tout $\Lambda \in \widehat{\mathcal{A}}$, $\Lambda(x) \in \sigma(x) \subset \mathbf{R}$. Pour x arbitraire, on peut écrire $x = a + ib$ où $a = (x + x^*)/2$ et $b = (ix^* - ix)/2$ sont autoadjoints, et on en déduit que $\Lambda(x^*) = \Lambda(a) - i\Lambda(b) = \overline{\Lambda(x)}$. Cela démontre donc que $\gamma(x^*) = \overline{\gamma(x)}$.

L'image de γ est donc une sous-algèbre fermée de $C(\widehat{\mathcal{A}})$ qui sépare les points et qui est stable par $f \mapsto \overline{f}$. Elle est donc tout $C(\widehat{\mathcal{A}})$ par le théorème de Stone-Weierstrass. □

On peut maintenant donner une preuve complète du calcul fonctionnel continu pour les opérateurs normaux.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.39. Notons $\mathcal{A}$ la C^*-algèbre engendrée par T. Comme T est normal, $\mathcal{A}$ est commutative et on peut considérer $\gamma\colon \mathcal{A} \to C(\widehat{\mathcal{A}})$ la transformée de Gelfand, qui est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach. Alors comme $\{\Lambda(T), \Lambda \in \widehat{\mathcal{A}}\} = \sigma(T)$, pour toute fonction f sur $\sigma(T)$, $f \circ \gamma(T)$ est bien définie comme une fonction continue sur $\widehat{\mathcal{A}}$[2]. On peut donc poser $\tau(f) = \gamma^{-1}(f \circ \gamma(T))$. Les propriétés du théorème 4.39 sont toutes évidentes à partir des propriétés de la transformée de Gelfand. □

2. Remarquons qu'ici on utilise de façon cruciale la proposition 4.67

Chapitre 5

Problèmes

Ce chapitre contient les énoncés de problèmes, donnés comme devoirs à la maison, examens partiels ou examens finaux.

1. Représentabilité finie, ultraproduits et super-reflexivité

Devoir à la maison en 2013

Représentabilité finie. Dans tout cet exercice, les espaces de Banach seront sur le corps des réels. Pour $1 \le p \le \infty$, on notera ℓ^p l'espace de Banach des suites de nombres réels telles que $\|(x_k)_k\|_p = (\sum_k |x_k|^p)^{1/p} < \infty$, et on notera c_0 le sous-espace fermé de ℓ^∞ des suites qui tendent vers 0. On pourra utiliser sans preuve que si $1 < p \le \infty$ (respectivement si $p = 1$) et si q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ℓ^p s'identifie au dual de ℓ^q (respectivement c_0) pour la dualité $\langle x, y\rangle = \sum_{k\in\mathbf{N}} x_k y_k$. On notera aussi ℓ_n^p l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de la norme ℓ^p, et on pourra utiliser que ℓ_n^p est le dual de ℓ_n^q pour la dualité $\sum_{k=1}^n x_k y_k$ pour tout p, q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Plus généralement si $p \in [1, \infty]$, E est un espace de Banach et et si $\ell_p^N(E)$ désigne l'espace de Banach E^N muni de la norme $\|(x_1, \dots, x_N)\| = \|(\|x_1\|_X, \dots, \|x_N\|_X)\|_{\ell_p^N}$, alors le dual de $\ell_p^N(E)$ s'identifie isométriquement avec $\ell_q^N(E^*)$ pour la dualité $\langle(\varphi_1, \dots, \varphi_N), (x_1, \dots, x_N)\rangle = \sum_i \varphi_i(x_i)$ et $1/p + 1/q = 1$.

Soient E, F des espaces normés. On dit que E est *finiment représentable* dans F si pour tout sous-espace vectoriel V de E de dimension finie et tout $\varepsilon > 0$, il existe une application linéaire $u : V \to F$ telle que

$$(1-\varepsilon)\|x\|_E \le \|u(x)\|_F \le \|x\|_E . \forall x \in V \tag{11}$$

1) Montrer que la relation "est finiment représentable dans" est transitive : si E est finiment représentable dans F et F est finiment représentable dans G, alors E est finiment représentable dans G.

2) Soit E un sous-espace vectoriel dense dans un espace normé F. Montrer que F est finiment représentable dans E. (Indication : si $x^{(1)}, \dots, x^{(d)}$ est une base d'un sous-espace $V \subset F$, et $(x_n^{(i)})_n \subset E$ est une suite qui converge vers $x^{(i)}$, on considérera la suite $u_n \in \mathcal{L}(V, E)$ définie par $u_n(x^{(i)}) = x_n^{(i)}$ et on montrera que, pour tout $\varepsilon > 0$, u_n vérifie (11) pour n assez grand.)

3) Soit $1 \le p < \infty$. On note L^p l'espace $L^p([0,1], dx)$ par rapport à la mesure de Lebesgue dx. On note $\mathcal{A}_n$ la tribu finie de $[0,1]$ dont les atomes sont $[0, 1/n), [1/n, 2/n), \dots, [1-1/n, n]$.
a) Montrer que $L^p([0,1], \mathcal{A}_n, dx)$ est isométriquement isomorphe à ℓ_n^p. En déduire que ℓ^p est finiment représentable dans L^p (on utilisera 1 et 2).
b) Montrer par la même méthode que L^p est finiment représentable dans ℓ^p (on pourra utiliser sans preuve que $\cup_n L^p([0,1], \mathcal{A}_n, dx)$ est dense dans $L^p([0,1], dx)$).

4) Le but de cette question est de montrer le **principe de réflexivité locale** : si E un espace de Banach, son bidual E^{**} est finiment représentable dans E. Soit donc V un sous-espace de dimension finie n de E^{**} et $\varepsilon > 0$.
a) Montrer qu'il existe un ensemble fini S d'éléments de norme 1 dans E^* tel que $\max_{\varphi \in S} \varphi(x) > (1-\varepsilon)\|x\|$ pour tout $x \in V \setminus \{0\}$.
b*) On admet dans cette question que pour tout espace normé de dimension finie V le bidual de $\mathcal{L}(V,E)$ s'identifie isométriquement à $\mathcal{L}(V,E^{**})$, et que l'inclusion $J : \mathcal{L}(V,E) \to \mathcal{L}(V,E^{**})$ correspondante est donnée par $J(u) = J_E \circ u$ pour tout $u : V \to E$. On note $X = \mathcal{L}(V,E^{**})$ et B_X la boule unité de X. Montrer que $\{u \in B_X, \forall x \in V \text{ tq } \|x\| = 1, \max_{\varphi \in S} \varphi(u(x)) > (1-\varepsilon)\}$ est un ouvert préfaible de B_X. En déduire l'existence de $u : V \to E$ satisfaisant (11) (on pensera au Lemme de Goldstine).

5**) Dans cette question on montre le résultat admis à la question précédente.
a) On suppose que $V = \ell^1_N$. Montrer que si $e_1, \ldots, e_N$ est la base canonique de ℓ^1_N, alors l'application $\mathcal{L}(V,E) \to \ell^\infty_N(E)$ qui envoie u sur $(u(e_1), \ldots, u(e_N))$ est une isométrie. Conclure dans ce cas.
b) On suppose que la boule unité de V a un nombre fini $x_1, \ldots, x_N$ de points extrémaux. On note $q \colon \ell_1^N \to V$ l'application linéaire qui envoie $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ sur $\sum_i \lambda_i x_i$. Justifier que q est de norme 1, et que tout élément de x a un antécédent par q de même norme. En déduire que $\mathcal{L}(V,E)$ s'identifie isométriquement au sous-espace de $\mathcal{L}(\ell^1_N, E)$ des applications u telles que $ker(q) \subset ker(u)$. Conclure dans ce cas.
c) Traiter le cas général.

Ultraproduit d'espaces de Banach et représentabilité finie. On sait très bien que toute suite bornée de réels admet une valeur d'adhérence. Un **ultrafiltre** est un objet mathématique (une recette) qui permet de choisir, simultanément pour toutes les suites bornées, une valeur d'adhérence, et ceci de manière compatible avec l'addition et la multiplication terme-à-terme des suites réelles. Plus formellement,

Définition 5.1. Un ultrafiltre ω est un caractère de ℓ^∞ (c'est-à-dire une forme linéaire non nulle telle que $\omega((a_n b_n)_n) = \omega((a_n)_n)\omega((b_n)_n)$ pour tout $(a_n)_n, (b_n)_n \in \ell^\infty$) tel que $\omega(a_n) = \lim_n a_n$ pour toute suite convergente.

On admet l'existence d'un tel ultrafiltre (on en verra une preuve plus tard dans le cours, comme une conséquence du lemme de Zorn).

1) Soit ω un ultrafiltre au sens de la définition. Montrer que $\omega((b_n)_n) \geq 0$ si $b_n \geq 0$ pour tout n assez grand. En déduire que $\omega((a_n)_n)$ est, comme annoncé, une valeur d'adhérence de la suite (a_n). En déduire que si $(a_n)_n$ est une suite bornée dans $\mathbf{R}^d$, avec $d \geq 1$ (on écrit $a_n = (a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(d)})$), alors le vecteur $(\omega(a_n^{(1)})_n, \ldots, \omega(a_n^{(d)})_n) \in \mathbf{R}^d$ est une valeur d'adhérence de (a_n).

Notation On notera $\lim_\omega a_n$ la valeur $\omega((a_n)_n)$.

2) Soit F un espace de Banach. Montrer que $\ell^\infty(F) = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in F^{\mathbf{N}}, \sup_n \|x_n\| < \infty\}$ est un espace de Banach pour la norme $\sup_n \|x_n\|$. Montrer que $N_\omega = \{(x_n) \in \ell^\infty(X), \lim_\omega \|x_n\| = 0\}$ est un sous-espace fermé.

3) On note $\prod_\omega F$ le quotient de $\ell^\infty(F)$ par le sous-espace N_ω, c'est-à-dire l'ensemble des classes $\{x + N_\omega, x \in \ell^\infty(F)\}$. Montrer que $\|(x_n)_n + N_\omega\| := \lim_\omega \|x_n\|$ est bien défini et est une norme qui fait de $\prod_\omega F$ un espace de Banach.

4) Soit E un espace de Banach *séparable* finiment représentable dans un espace de Banach F. Dans cette question on montre que E est isométriquement isomorphe à un sous-espace vectoriel de $\prod_\omega F$.
a) Montrer qu'il existe une suite croissante V_n de sous-espaces de dimension finie de E telle que le sous-espace vectoriel $\cup_n V_n$ est dense dans E, et une suite $u_n : V_n \to F$ d'applications linéaires telles que vérifiant (11) avec $\varepsilon = 1/n$.
b) Pour tout $x \in \cup_n V_n$, on pose $u(x) = (u_n(x))_n + N_\omega \in \prod_\omega F$ où par convention $u_n(x) = 0$ si $x \notin V_n$. Montrer que u est linéaire et isométrique. Conclure.

5*) Réciproquement, montrer que $\prod_\omega F$ (et donc tous ses sous-espaces) est finiment représentable dans F (On utilisera la partie bleu de la question 1)).

Super-réflexivité. Si P est une propriété d'espaces de Banach, on dira qu'un espace de Banach F a *super* $-$ P si tout espace de Banach finiment représentable dans F a la propriété P. Une propriété est appelée une super-propriété si P est équivalent à *super* $-$ P.

Par exemple, un espace de Banach F est dit super-reflexif si tout espace de Banach finiment représentable dans F est réflexif.

On considère l'espace $X = \oplus_{\ell^2} \ell_n^\infty$, c'est-à-dire l'ensemble des suites $(x_n)_n$ avec $x_n \in \ell_n^\infty$ et $(\sum_n \|x_n\|^2)^{1/2} < \infty$.

1) Montrer que X est un espace de Banach. Montrer que son dual s'identifie isométriquement avec $\oplus_{\ell^2} \ell_n^1$. Montrer qu'il est réflexif.

2) Montrer que c_0 est finiment représentable dans X. En déduire que X est réflexif et non super-réflexif. En déduire que la réflexivité n'est pas une super-propriété.

3) Soit ω un ultrafiltre au sens de la partie précédente. Montrer que F est super-réflexif si et seulement si $\prod_\omega F$ est réflexif (on pourra admettre qu'un espace est réflexif si et seulement si tous ses sous-espaces séparables le sont).

4) En déduire qu'un espace de Banach isomorphe (pas nécessairement isométrique) à un espace super-réflexif est super-reflexif.

5) Montrer que l'uniforme convexité est une super-propriété. En déduire que tout espace de Banach qui est isomorphe à un espace uniformément convexe est superréflexif.

Remarque. Un théorème célèbre d'Enflo affirme la réciproque : tout espace de Banach super-rélfexif peut être renormé avec une norme équivalente qui est uniformément convexe.

2. Dentabilité et théorèmes de points fixes

Devoir à la maison en 2014

Remarque : Ce devoir à la maison est à rendre pour le jeudi 2 octobre. Il comporte trois exercices, de difficulté *décroissante*. Le résultat montré dans l'exercice i sera utilisé dans l'exercice $i+1$.

Dentabilité. Soit X un espace de Banach réel **séparable**, et $K \subset X$ une partie convexe et compacte pour la topologie faible. On fixe $\varepsilon > 0$. Dans cet exercice on montre qu'il existe une partie $K' \subset K$ convexe compacte (pour la topologie faible) telle que $K \setminus K'$ est non vide et de diamètre inférieur à ε.

(1) On note E l'ensemble des points extrémaux de K, et $\overline{E}$ son adhérence pour la topologie faible (c'est un compact pour la topologie faible). Montrer qu'il existe $y_0 \in \overline{E}$ tel que $\overline{B}(y_0, \varepsilon/3) \cap \overline{E}$ est d'intérieur non vide dans $\overline{E}$

pour la topologie faible (on pourra utiliser la forme suivante du théorème de Baire : dans un espace topologique compact, une union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide). Notons U cet intérieur.

(2) On définit K_1 comme l'adhérence de l'enveloppe convexe de $\overline{E} \setminus U$, et K_2 comme l'adhérence de l'enveloppe convexe de $\overline{B}(y_0, \varepsilon/3) \cap \overline{E}$. Montrer que
$$K = \{tv + (1-t)w, t \in [0,1], v \in K_1, w \in K_2\}.$$
Pour $\delta \in [0,1]$ on définit $K(\delta) = \{tv + (1-t)w, t \in [\delta, 1], v \in K_1, w \in K_2\}$.

(3) Montrer que $K(\delta)$ est une partie convexe compacte de K.

(4) Montrer que le diamètre de $K \setminus K(\delta)$ est strictement inférieur à ε si δ est assez petit.
Soit $y \in U \cap E$.

(5) Soit V un voisinage convexe de 0 (pour la topologie faible), et par compacité $z_1, \dots, z_k \in \overline{E} \setminus U$ tels que $\cup_i(z_i + V)$ contient $\overline{E} \setminus U$. Montrer que K_1 est contenu dans l'enveloppe convexe de $\cup_i(z_i + \overline{V}) \cap K$. En déduire que si $y \in K_1$, $(y - \overline{V})$ intersecte $E \setminus U$. Montrer que ce n'est pas possible pour un bon choix de V, et donc que $y \notin K_1$. En déduire que $y \notin K(\delta)$ pour tout $\delta > 0$.

Un théorème de point fixe. Dans tout cet exercice, X sera un espace de Banach sur $\mathbf{R}$ et $K \subset X$ une partie convexe qui est compacte pour la topologie faible $\sigma(X, X^*)$. On va démontrer le résultat suivant.

Il existe $x \in K$ tel que $gx = x$ pour toute isométrie linéaire g de X telle que $g(K) = K$.

1) Soit $F \in \mathcal{L}(X)$ linéaire telle que $F(K) \subset K$. On va montrer qu'il existe $x \in K$ tel que $F(x) = x$.
a) On note $F_n \in \mathcal{L}(X)$ l'application $F_n(x) = \frac{1}{n}(x + F(x) + F^2(x) + \cdots + F^{n-1}(x))$. Montrer que $F_n(K)$ est une partie compacte de K, et que $\cap_n F_n(K)$ est non vide.
b) Soit $x \in \cap_n F_n(K)$. Montrer que $F(x) = x$.

Jusqu'à nouvel ordre on suppose que X est séparable.

Soient $g_1, \dots, g_n$ des isométries linéaires de X telle que $g_i(K) = K$. On pose $F(x) = \frac{g_1(x) + \cdots + g_n(x)}{n}$.

2) Montrer que F a un point fixe x_0 dans K.

3) Dans cette question on montre qu'il existe i tel que $g_i(x_0) = x_0$. On suppose, par l'absurde, que ce n'est pas vrai et on pose $\varepsilon = \min_i \|g_i x_0 - x_0\| > 0$. On note G le sous-groupe des isométrie linéaires de X engendré par $g_1, \dots, g_n$. Soit $\widetilde{K} \subset K$ l'adhérence faible de l'enveloppe convexe de $\{hx_0, h \in G\}$. C'est un convexe faiblement compact tel que $g_i(\widetilde{K}) = \widetilde{K}$ pour tout i. Soit $\widetilde{K}' \subset \widetilde{K}$ donné par l'exercice de dentabilité.
Montrer qu'il existe $h \in G$ tel que $hx_0 \notin \widetilde{K}'$. Montrer en utilisant la propriété de dentabilité que $hg_ix_0 \in \widetilde{K}'$ pour tout i. En déduire que $hFx_0 \in \widetilde{K}'$. Conclure.

4) Montrer que $g_i(x_0) = x_0$ pour tout i.

On ne suppose plus que X est séparable.

5) Soient $g_1, \dots, g_n$ des isométries linéaires de X telle que $g_i(K) = K$. Soit $y \in K$. Montrer qu'il existe un sous-espace fermé séparable $Y \subset X$ contenant y et tel que $g_i(Y) = Y$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Montrer qu'il existe $x \in K \cap Y$ tel que $g_i(x) = x$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

6) Montrer qu'il existe $x \in K$ tel que $gx = x$ pour toute isométrie linéaire g de K telle que $g(K) = K$.

Un autre théorème de point fixe. Soit (X, μ) un espace mesuré σ-fini et posons $E = L^1(X, \mu)$. Soit A une partie bornée non vide de E. On montre qu'il existe une $f \in E$ fixé par toutes les isométries de E qui préservent A.

On rappelle que, comme tout espace de Banach, E s'identifie naturellement à un sous-espace de Banach de E^{**} (via l'application notée J_E dans le cours ; ici on omettra J_E et on identifiera $f \in E$ et son image par J_E). On admettra que E admet un supplémentaire fermé $E_0 \subset E^{**}$ tel que $\|f + x\|_{E^{**}} = \|f\| + \|x\|$ pour tout $x \in E_0$ et tout $f \in E$ (théorème de Yosida-Hewitt).

1) Pour A une partie bornée d'un espace de Banach V, on pose

$$\rho_V(A) = \inf\{r > 0, \exists x \in V \text{ tel que } A \subset \overline{B}(x, r)\}$$

et

$$C_V(A) = \{c \in V, A \subset \overline{B}(c, \rho_V(A))\}.$$

a) Montrer que $C_V(A)$ est une partie convexe bornée de V, et que $C_V(A)$ est non vide et préfaiblement compact si V est un espace de Banach dual. (Remarque culturelle : $C_V(A)$ est appelé centre de Chebychev de A ; il peut très bien être vide, ou bien infini...)

b) Montrer que $C_V(A)$ est réduit à un point si V est uniformément convexe.

2) On considère maintenant $E = L^1(X, \mu)$, et A une partie bornée non vide de E. Montrer que $C_{E^{**}}(A)$ est contenu dans E. En déduire que $C_E(A)$ est non vide et faiblement compact.

3) Conclure (on utilisera l'exercice précédent).

3. Distribution

Partiel 2013

Soit $d \geq 1$ un entier. On rappelle que δ est la distribution sur $\mathbf{R}^d$ donnée par $\delta\varphi = \varphi(0)$, et on note $\delta^{(\alpha)} = D^\alpha \delta$ pour $\alpha \in \mathbf{N}^d$.

Soit $d \geq 1$ un entier et $P \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$ un polynôme complexe en d indéterminées. On note m son degré et $(c_\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ ses coefficients :

$$P = P(X_1, \ldots, X_d) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha X^\alpha \text{ où } X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \ldots X_d^{\alpha_d} \text{ si } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbf{N}^d.$$

On note $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ la distribution $S = \sum_\alpha c_\alpha \delta^{(\alpha)}$.

(1) Quel est le support de S ? Quel est son ordre ? Quelle est sa transformée de Fourier ?

(2) Montrer qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ vérifie $\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha T = 0$ si et seulement si $T * S = 0$.

(3) Montrer qu'il existe une distribution tempérée non nulle T sur $\mathbf{R}^d$ telle que $\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha T = 0$ si et seulement si le polynôme $P(i\xi)$ possède une racine dans $\mathbf{R}^d$.

4. Distributions, encore

Partiel 2013

Soit $d \geq 2$. On rappelle que la distribution $E_d \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$E_d = \begin{cases} \log r & \text{si } d = 2 \\ r^{2-d} & \text{si } d \geq 3 \end{cases}$$

vérifie $\Delta E_d = c_d \delta$ pour une certaine constante $c_d > 0$.

(1) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi \equiv 1$ au voisinage de l'origine. Montrer que $\psi := \Delta(\varphi E_d) - c_d\delta$ est un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

(2) Montrer que $\partial_j(\varphi E_d) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $j = 1, \ldots, d$.

(3) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\partial_j T \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $j = 1, \ldots, d$. Montrer que $T \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

5. Moyennabilité

Partiel 2013

Soit X est un ensemble. Pour $1 \leq p \leq \infty$ on utilise la notation habituelle $\ell^p(X)$ pour l'espace de Banach des fonctions $f : X \to \mathbf{R}$ telles que $\|f\|_p < \infty$ où $\|f\|_p = (\sum_{x\in X} |f(x)|^p)^{1/p}$ si $p < \infty$ et $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$. On fera attention que $\ell^\infty(X)$ n'est pas séparable si X est infini. On rappelle que si $1 \leq p < \infty$ et $1 < q \leq \infty$ avec $1/p + 1/q = 1$, le dual de $\ell^p(X)$ s'identifie avec $\ell^q(X)$ pour la dualité $\langle f, g\rangle = \sum_x f(x)g(x)$.

On dira qu'une forme linéaire $\varphi \in \ell^\infty(X)^*$ est positive si $\varphi(f) \geq 0$ pour tout $f \in \ell^\infty(X)$ telle que $f(X) \subset \mathbf{R}^+$. On dira que $\varphi \in \ell^\infty(X)^*$ est une moyenne si φ est positive et $\varphi(1_X) = 1$.

A- Moyennabilité

Lorsque $X = \Gamma$ est un groupe pour une opération notée $\cdot$, on notera τ_g les translations à gauche sur $\ell^p(\Gamma)$: $\tau_g f(x) = f(g^{-1} \cdot x)$. On dira qu'une moyenne φ sur $\ell^\infty(\Gamma)$ est invariante (à gauche) si $\varphi(\tau_g f) = \varphi(f)$ pour tout $f \in \ell^\infty(\Gamma)$ et $g \in \Gamma$.

Etant donné un groupe dénombrable Γ et $1 \leq p < \infty$, on se propose de démontrer l'équivalence des propriétés suivantes.

(i) Il existe une moyenne invariante à gauche sur $\ell^\infty(\Gamma)$.

(ii) il existe une suite $f_n \in \ell^p(\Gamma)$ de norme 1 ($\|f_n\|_p = 1$) telle que $\lim_n \|f_n - \tau_g f_n\|_p = 0$ pour tout $g \in \Gamma$.

(iii) il existe une suite F_n de parties finies de Γ telles que $\lim_n |g \cdot F_n \Delta F_n|/|F_n| = 0$ pour tout $g \in \Gamma$ (où $|A|$ est le cardinal de A et $A\Delta B$ est la différence symétrique de A et B : $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et $g \cdot A = \{g \cdot a, a \in A\}$).

1) Fixons $p = 1$. Dans cette question on suppose non(ii) et on montre non(i). Notons M la partie convexe de $\ell^1(\Gamma)$ définie par $M = \{f \colon \Gamma \to \mathbf{R}^+, \sum_{x\in\Gamma} f(x) = 1\}$.

a) Montrer qu'il existe une partie finie $S \subset \Gamma$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\sum_{g\in S} \|\tau_g f - f\|_1 \geq \varepsilon$ pour tout $f \in M$.

b) Montrer qu'il existe $(h_g)_{g\in S} \in \ell^\infty(\Gamma)^S$ tel que $(\sum_{g\in S} \tau_{g^{-1}} h_g - h_g)(x) \geq 1$ pour tout $x \in \Gamma$.

c) En déduire non(i).

2) Ici on montre que la condition (ii) ne dépend pas de $p \in [1, \infty)$. Soit $q \in (1, \infty)$.

a) Montrer que pour tout $s, t \in \mathbf{R}$, $||s|^{1/q} - |t|^{1/q}| \leq |s-t|^{1/q}$.
b) Pour f dans $\ell^1(\Gamma)$, on note $\widetilde{f}(s) = |f(s)|^{1/q}$. Montrer que si f, f' sont de norme 1 dans $\ell^1(\Gamma)$, alors $\widetilde{f}, \widetilde{f'}$ sont de norme 1 dans $\ell^q(\Gamma)$ et $\|\widetilde{f} - \widetilde{f'}\|_q \leq \|f - f'\|_1^{1/q}$. En déduire que (ii) avec $p = 1$ implique (ii) avec $p = q$.
c) Montrer que pour tout $s, t \in \mathbf{R}$, $||s|^q - |t|^q| \leq q(|s| + |t|)^{q-1}|s-t|$. En déduire que (ii) avec $p = q$ implique (ii) avec $p = 1$.

3) Dans cette question on suppose à nouveau $p = 1$ et on montre (ii)$\Longrightarrow$(iii). Supposons donc (ii). Pour $r > 0$ on pose $F_n(r) = \{x \in \Gamma, |f_n(x)| \geq r\}$.
a) Montrer que $\int_0^\infty |F_n(r)|dr = 1$. En particulier $F_n(r)$ est finie pour tout $r > 0$.
b) Soient $s, t \geq 0$. Montrer que

$$|s-t| = \int_0^\infty |1_{s \geq r} - 1_{t \geq r}|dr.$$

En déduire que

$$\|f_n - \tau_g f_n\|_1 \geq \int_0^\infty |g \cdot F_n(r) \Delta F_n(r)|dr.$$

c) En déduire (iii).

4) Montrer (iii)$\Longrightarrow$(i) (on pourra considérer les moyennes φ_n données par $\varphi_n(f) = 1/|F_n| \sum_{x \in F_n} f(x)$).

On dira que Γ est moyennable si les conditions équivalentes (i), (ii) (iii) sont satisfaites.

5) Montrer que le groupe $\mathbf{Z}$ (pour l'opération d'addition) est moyennable (on montrera que la condition (iii) est vérifiée).

B- Actions de groupes moyennables

Soit Γ un groupe. On va montrer les équivalences suivantes.

(i') Γ est moyennable : il existe une moyenne invariante ϕ sur $\ell^\infty(\Gamma)$.

(ii') Toute action de Γ par homéomorphismes sur un espace toplogique compact préserve une mesure.

(iii') Pour tout evtcl E, pour tout morphisme de groupes $\alpha : \Gamma \to \mathcal{GL}(E)$ et tout compact convexe non vide $K \subset E$ tel que $\alpha(g)(K) = K$ pour tout $g \in G$, il existe un point de K fixe par tous les $\alpha(g)$.

6) On suppose (i'). Soit α une action de Γ par homéomorphismes sur espace compact X : autrement dit $\alpha\colon \Gamma \to Homeo(X)$ est un morphisme de groupes. Soit $x \in X$. On définit pour tout $F \in C(X)$, $\psi(F) = \phi(g \mapsto F(\alpha(g)x))$.
a) Montrer que ψ est une forme linéaire positive sur $C(X)$.
b) Par le théorème de Riesz, il existe donc une unique mesure de probabilité borelienne μ sur X telle que $\psi(F) = \int F d\mu$. Montrer que μ est invariante, c'est-à-dire $\mu(\alpha(g)(A)) = \mu(A)$ pour tout borélien $A \subset X$ et $g \in \Gamma$.

7) On suppose (ii'). Soit un evtlc E, $\alpha : \Gamma \to \mathcal{GL}(E)$ un morphisme de groupes et $K \subset E$ une partie convexe compacte (non vide) telle que $\alpha(g)(K) = K$ pour tout $g \in G$. Soit μ la mesure de probabilité sur K donnée par l'hypothèse (ii').
a) Montrer qu'il existe un unique point $x \in E$ tel que $\int \varphi(y)d\mu(y) = \varphi(x)$ pour tout $\varphi \in E^*$.
b) Montrer que $x \in K$.
c) Montrer que $\alpha(g)x = x$ pour tout $g \in \Gamma$.

8) Montrer (iii')$\Longrightarrow$(i').

9) Soit K un convexe compact d'un evtlc E et $T \in \mathcal{GL}(E)$ une application linéaire inversible de E telle que $T(K) = K$. Montrer que l'ensemble $\{x \in K, Tx = x\}$ est une partie convexe compacte non vide de K. En déduire que tout groupe commutatif est moyennable.

6. Distributions tempérées

Partiel 2014

Parmi ces distributions sur $\mathbf{R}$, lesquelles sont tempérées ?

1) $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{n!}\delta_n^{(n)}$ (où $\delta_n^{(n)}$ est la dérivée n-ième de la masse de Dirac en n).

2) $\sum_{n\in\mathbf{N}} e^n \delta_n$ (où δ_n est la masse de Dirac en n).

3) $\sum_{n\in\mathbf{N}} n^3 \delta'_n$ (où δ'_n est la dérivée de la masse de Dirac en n).

7. Théorème de Krein-Schmulian

Partiel 2014

Dans cet exercice pour tout espace de Banach F on note $B_F = \{x \in F, \|x\| \leq 1\}$ sa boule unité fermée.

Soit E un espace de Banach réel, et E^* son dual topologique. On note $\sigma(E^*, E)$ la topologie préfaible sur E^*. Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant.

Une partie convexe C de E^* est $\sigma(E^*, E)$-fermée si et seulement si $C \cap (nB_{E^*})$ est $\sigma(E^*, E)$-fermée pour tout entier $n \geq 1$.

1) Justifier la direction évidente.

Le reste de l'exercice est consacré à la réciproque. Soit donc $C \subset E^*$ une partie convexe telle que $C \cap (nB_{E^*})$ est $\sigma(E^*, E)$-fermée pour tout n. On veut montrer que C est $\sigma(E^*, E)$-fermée.

2) Montrer qu'il suffit de montrer que si 0 n'appartient pas à C, alors 0 n'appartient pas à l'adhérence préfaible de C.

Dans le reste de l'exercice on suppose que $0 \notin C$. On note $C_n = C \cap (nB_{E^*})$.

3) Montrer qu'il existe $x_1 \in E$ tel que $\xi(x_1) > 0$ pour tout $\xi \in C_1$.

4) On note $A_1 = \{x_1\}$. Construire par récurrence une suite $(A_n)_{n\geq 2}$ de parties finies de E telles que pour tout $n \geq 2$, $A_n \subset \frac{1}{n-1}B_E$ et $\sup_{x\in\cup_{i=1}^n A_i} \xi(x) > 1$ pour tout $\xi \in C_n$.

5) En déduire qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans E telle que $\lim_n \|x_n\| = 0$ et $\sup_n \xi(x_n) > 1$ pour tout $\xi \in C$.

6) En considérant la partie convexe $\{(\xi(x_n))_{n\geq 1}, \xi \in C\} \subset c_0$, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\xi(x) \geq 1$ pour tout $\xi \in C$ (on rappelle que $c_0^* = \ell^1$). Conclure

8. Spectre d'un opérateur de multiplication

Examen 2014

Convention : tous les espaces vectoriels considérés (en particulier les espaces L^p ou espaces de Sobolev) seront sur le corps des complexes.

Soit (X, μ) un espace de probabilité. Soit $f\colon X \to \mathbf{C}$ une fonction mesurable. Son image essentielle est définie comme l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ tels que pour tout voisinage U de z dans $\mathbf{C}$, $\mu(f^{-1}(U)) > 0$. Comme deux fonctions qui sont égales presque partout ont même image essentielle, on peut définir l'image essentielle de $f \in L^\infty(X, \mu)$ comme l'image essentielle de n'importe quelle fonction mesurable représentant f.

Soit $f \in L^\infty(X, \mu)$. On note $M_f\colon L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$ l'opérateur de multiplication par f : $M_f g = fg$ pour tout $g \in L^2(X, \mu)$.

1) Montrer que M_f est un opérateur borné et normal.

2) Montrer que l'image essentielle de f est fermée et bornée.

3) Montrer que $M_f - zId$ est inversible si et seulement si z n'appartient pas à l'image essentielle de f.

4*) On a donc montré que le spectre de M_f coincide avec l'image essentielle de f. Où a-t-on utilisé que μ est une mesure de probabilité ? Le résultat reste-t-il vrai si μ est une mesure σ-finie ? Pouvez-vous trouver un exemple (avec une mesure non σ-finie) pour lequel l'image essentielle de f est différente du spectre de M_f ?

9. Espaces de Sobolev

Examen 2014

Soit $I =]0, 1[$. Pour $1 \le p < \infty$ on note

$$B_p = \{u \in W^{1,p}(I), \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} \le 2\}.$$

Dans cet exercice on montre que B_p est fermée dans $L^p(I)$ si et seulement si $1 < p < \infty$.

1) On suppose $1 < p < \infty$. Soit (u_n) une suite dans B_p. Montrer qu'on peut en extraire une suite u_{n_k} qui converge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et telle que u'_{n_k} converge faiblement dans L^p. En déduire que B_p est une partie compacte, donc fermée, de $L^p(I)$.

2) On suppose $p = 1$. Montrer que la fonction indicatrice de l'intervalle $[1/2, 1[$ appartient à l'adhérence de B_1 dans $L^1(I)$. En déduire que B_1 n'est pas fermée dans $L^1(I)$.

10. Opérateurs compacts

Examen 2014

Soit (X, μ) un espace de probabilité. Soit $k \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$.

Pour $f \in L^2(X, \mu)$ et $x \in X$ on note $(Af)(x) = \int_X k(x, y) f(y) d\mu(y)$.

1) Montrer que cette formule définit un opérateur borné $A\colon L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$, et que $\|A\| \le \|k\|_{L^2}$.

2) On suppose que k est de la forme $k(x, y) = \sum_{i=1}^n g_i(x) h_i(y)$ pour $n \in \mathbf{N}$ et $g_i, h_i \in L^2(X, \mu)$. Montrer que l'image de A est contenue dans l'espace vectoriel engendré par $g_1, \ldots, g_n$.

3) On revient au cas général. Montrer que A est compact.

On suppose maintenant que $X = [0, 1]$, que μ est la mesure de Lebesgue et que $k(x, y) = 0$ sur $\{(x, y), x < y\}$.

4) Dans cette question on montre que le spectre de A est $\{0\}$.

a) Soit $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. On suppose que λ est une valeur propre de A et f un vecteur propre associée. On note $g(x) = \int_0^x |f(t)|^2 dt$. Montrer que $|\lambda|^2 |f(x)|^2 \leq g(x) \int_0^x k(x,y)^2 dy$. Aboutir à une contradiction (on pourra utiliser la formule d'intégration-dérivation $\log g(b) - \log g(a) = \int_a^b \frac{|f(x)|^2}{g(x)} dx$ valable pour tout $1 \geq b > a > 0$ tels que $g(a) > 0$).

b) Conclure

5*) On prend toujours $X = [0,1]$, et $k(x,y) = 1_{x \geq y}$. Montrer que $A + A^*$ est la projection orthogonale sur les fonctions constantes. On note $V = (1+A)^{-1}$. Montrer que V n'est pas l'identité, que le spectre de V est $\{1\}$ et que V est de norme 1.

6) Existe-t-il un opérateur V sur un espace de Hilbert de dimension finie satisfaisant les trois conditions $\|V\| = 1$, $\sigma(V) = \{1\}$ et $V \neq 1$? On pourra utiliser que toute matrice complexe est trigonalisable dans une base orthonormée.

11. Algèbre de Banach et théorie de Fourier

Examen 2014

Soit $\|\cdot\|$ une seminorme sur $C_c(\mathbf{R})$, l'espace des fonctions continues à support compact sur $\mathbf{R}$, vérifiant

$$\|g\| \leq \int_{\mathbf{R}} |g(t)| dt = \|g\|_{L^1(\mathbf{R})}$$

et

$$\|f * g\| \leq \|f\| \|g\|$$

pour tout $f, g \in C_c(\mathbf{R})$ (où $*$ désigne le produit de convolution usuel). Le but de cet exercice est de démontrer l'alternative suivante : ou bien $\|g\| = 0$ pour tout $g \in C_c(\mathbf{R})$, ou bien il existe $\xi \in \mathbf{R}$ telle que $|\int g(t) e^{-it\xi} dt| \leq \|g\|$ pour tout $g \in C_c(\mathbf{R})$.

On suppose que $\|\cdot\|$ n'est pas identiquement nulle. La stratégie est de considérer une algèbre de Banach associée à $\|\cdot\|$.

On commence par ajouter une unité. On note δ la distribution de Dirac $\delta f = f(0)$, et $A_0 = Vect(C_c(\mathbf{R}), \delta)$ (vue comme un sous-espace vectoriel de l'espace des distributions à support compact). On définit une seminorme sur A_0 on posant $\|f + t\delta\| = \|f\| + |t|$.

1) Vérifier que A_0 est stable par convolution et que l'inégalité $\|f * g\| \leq \|f\| \|g\|$ reste vraie sur A_0. Quelle est l'unité de A_0 ?

On note A l'espace de Banach obtenu en prenant le complété de A_0 pour la seminorme $\|\cdot\|$ (c'est-à-dire le quotient de l'espace des suites dans A_0 qui sont de Cauchy pour $\|\cdot\|$ par le sous-espace des suites dont la seminorme tend vers 0 ; la norme de (f_n) étant $\lim_n \|f_n\|$. On rappelle que l'application, notée i par la suite, qui à $f \in A_0$ associe la suite constante égale à f réalise le quotient de A_0 par $\{f, \|f\| = 0\}$ comme un sous-espace dense de A). Par l'hypothèse que $\|f * g\| \leq \|f\| \|g\|$, le produit $(f,g) \mapsto f * g$ s'étend en un produit sur A, qui fait de A une algèbre de Banach commutative (unitale).

On note B l'adhérence de l'image de $C_c(\mathbf{R})$ dans A.

2) Montrer que la restriction $i \colon C_c(\mathbf{R}) \to A$ s'étend de manière unique en une application de norme ≤ 1, toujours notée $i \colon (L^1(\mathbf{R}), \|\cdot\|_{L^1(\mathbf{R})}) \to A$. Montrer que $i(f * g) = i(f) * i(g)$ pour tout $f, g \in L^1(\mathbf{R})$.

3) On note X l'espace vectoriel des fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ (la classe de Schwartz) telles que $\mathcal{F}f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

a) Montrer que X est un sous-espace dense de $L^1(\mathbf{R})$.

b) Montrer qu'il existe $f \in X$ tel que $i(f) \neq 0$ (c'est le moment d'utiliser l'hypothèse que $\|\cdot\|$ n'est pas identiquement nulle !).

c) Justifier l'existence de $g \in X$ tel que $f * g = f$. Montrer que $i(g)$ a un rayon spectral ≥ 1.

d) En déduire qu'il existe un caractère χ de A qui n'est pas identiquement nul sur B.

4) a*) On suppose par l'absurde que pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ il existe $f \in C_c(\mathbf{R})$ dans le noyau de χ tel que $\mathcal{F}f(\xi) \neq 0$. En utilisant des partitions de l'unité montrer que le noyau de χ contient toutes les fonctions de $i(X)$, puis que χ est nul sur B.

b) En déduire qu'il existe $\xi \in \mathbf{R}$ tel que $\chi(i(f)) = \int f(t)e^{-it\xi}dt$ pour tout $f \in C_c(\mathbf{R})$.

5) Conclure.

12. Transformée de Hilbert et théorie de Calderón-Zygmund

Devoir à la maison 2013

A- Transformée de Hilbert : définition et continuité sur $L^2(\mathbf{R})$.

On rappelle que $vp(\frac{1}{x})$ est la distribution sur $\mathbf{R}$ définie par

$$\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}).$$

1) Montrer que $vp(\frac{1}{x}) = (\log|x|)'$ au sens des distributions (où comme d'habitude on identifie la fonction $\log|x| \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ avec la distribution associée). En déduire que $vp(\frac{1}{x}) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

2) a) Pour $a > 0$ on pose $f(a) = \int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi}e^{-a\xi}d\xi$. Montrer que f est dérivable sur $(0,\infty)$, calculer f' et en déduire que $f(a) = \arctan(1/a)$. Montrer de même que pour tout $A > 0$, $\int_A^\infty \frac{\sin\xi}{\xi}e^{-a\xi}d\xi$ est une fonction 1-Lipschitzienne de a.

b) Montrer en utilisant la question précédente que $\int_0^A \frac{\sin(\xi)}{\xi}d\xi$ tend vers $\pi/2$ quand A tend vers l'infini. En déduire que $\int_{\varepsilon<|\xi|<A}\frac{e^{-i\xi}}{\xi}d\xi$ est borné comme une fonction de $\{(\varepsilon, A) \in \mathbf{R}^+, \varepsilon \leq A\}$, et converge vers $-i\pi$ quand $\varepsilon \to 0, A \to \infty$.

c) Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on a

$$\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0, A\to\infty}\int_{\varepsilon<|x|<A}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

En déduire que la transformée de Fourier de $vp(\frac{1}{x})$ coïncide avec la fonction $\xi \mapsto -i\sqrt{\pi/2}sign(\xi)$.

Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ on définit

$$Hf(y) = \frac{1}{\pi}(vp(\frac{1}{x}) * f)(y) = \frac{1}{\pi}\langle vp(\frac{1}{x}), f(y - \cdot)\rangle.$$

3) Montrer que $Hf \in L^2(\mathbf{R})$ et que $\mathcal{F}(Hf)(\xi) = -isign(\xi)\mathcal{F}f(\xi)$ (on commencera par traiter le cas où $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$).

B- Continuité sur L^p.

Le but de cette partie est de démontrer que pour tout $p \in (1,\infty)$ il existe une constante C_p telle que

$$\|Hf\|_{L^p(\mathbf{R})} \le C_p \|f\|_{L^p(\mathbf{R})}\ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}). \tag{12}$$

On note C_p la plus petite constante telle que (12) a lieu, avec comme convention $C_p = \infty$ si (12) n'est pas vraie.

4) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Montrer que si $Hf \in L^1(\mathbf{R})$, alors $\mathcal{F}f(0) = 0$. En déduire que $C_1 = \infty$.

5) Montrer que $C_2 = 1$. Cela permet de donner un sens à $Hf \in L^2(\mathbf{R})$ pour tout $f \in L^2(\mathbf{R})$ par densité de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ dans $L^2(\mathbf{R})$.

6) Montrer l'identité $(Hf)^2 = f^2 + 2H(fHf)$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ (où $H(fHf)$ est bien défini par la question précédente puisque $fHf \in L^2(\mathbf{R})$).

7) Soit $p \in (1,\infty)$ et supposons que $C_p < \infty$. Montrer que (12) est vraie pour $2p$, et que $C_{2p} \le C_p + \sqrt{1 + C_p^2}$.

8) Montrer que (12) est vraie pour tout p de la forme 2^k avec k un entier ≥ 1, avec $C_p \le p$ (on pourra utiliser la relation $\operatorname{cotan}(x/2) = \operatorname{cotan} x + \sqrt{1 + \operatorname{cotan}^2 x}$ et l'inégalité $\operatorname{cotan}(\pi/2p) \le p$). En déduire que $C_p \le 2p$ pour tout $p \ge 2$.

Dans la question précédente on admettra le *théorème de Riesz-Thorin*, qui est une conséquence du théorème des trois droites en analyse complexe :

> Soit (Ω,μ) un espace mesuré $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$. Soient $T_i \in B(L^{p_i}(\Omega,\mu))$ (pour $i \in \{0,1\}$) des opérateurs qui coïncident sur $L^{p_0} \cap L^{p_1}$. Alors pour tout $p_0 \le p \le p_1$, il existe $T \in B(L^p)$ qui coïncide avec T_i sur $L^p \cap L^{p_i}$. De plus $\|T\| \le \max \|T_0\|, \|T_1\|$.

9) Montrer que pour tout $f,g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, $\int (Hf)g = \int f(Hg)$. En déduire que pour tout $p \in (1,\infty)$, (12) est vraie pour p si et seulement elle est vraie pour p' (où p' est l'exposant conjugué de p : $1/p + 1/p' = 1$), et que $C_p = C_{p'}$.

C- Comportement sur L^1 : décomposition de Calderón-Zygmund.

Dans cette partie, on prouve l'énoncé suivant :

> Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ et $\alpha > 0$. On peut écrire $f = g + b$ où
> — $\|g\|_1 \le \|f\|_1$, $\|g\|_\infty \le 2\alpha$,
> — On peut écrire $b = \sum_j b_j$ (somme finie ou dénombrable) où les b_j sont de moyenne nulle et supportés sur des intervalles Q_j d'intérieurs disjoints.
> — $\|b_j\|_{L^1} \le 4\alpha |Q_j|$ et $\sum_j |Q_j| \le \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1}$.

On suppose tout d'abord $\alpha = 1$ et $\|f\|_{L^1} = 1$. On conviendra d'appeler intervalle dyadique un intervalle de la forme $[m2^k, (m+1)2^k($, pour $k, m \in \mathbf{Z}$, et la longueur d'un tel intervalle est 2^k. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit deux familles d'intervalles dyadiques de longueur 2^{-k}, M_k et S_k. La définition est par récurrence :

$$M_0 = \{[m, m+1(, m \in \mathbf{Z}\} \text{ et } S_0 = \emptyset.$$

Si (M_k, S_k) est construit, on définit M_{k+1} comme la collection des intervalles dyadiques de longueur 2^{-k-1} contenu dans un intervalle de $M_k \setminus S_k$. Puis S_{k+1} est l'ensemble des intervalles $Q \in M_{k+1}$ tel que $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx > 1$.

On note $S = \cup_{k=1}^\infty S_k$. C'est une famille dénombrable d'intervalle dyadiques. On indexe ses éléments par un ensemble J (fini ou infini dénombrable) $S = \{Q_j, j \in J\}$ et on note $b_j = (f - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)dx)1_{Q_j}$.

10) Montrer que S est constitué d'intervalles disjoints, et que $\sum_j |Q_j| \le \|f\|_{L^1}$.

11) Montrer que $|Q_j| \leq \int_{Q_j} |f(x)|dx \leq 2|Q_j|$. En déduire que $\|b_j\|_{L^1} \leq 4|Q_j|$.

12) On introduit $g = f - \sum_j b_j$. Dans cette question on montre que $\|g\|_{L^\infty} \leq 2$.
a) Montrer que $|g| \leq 2$ ps sur $\cup_j Q_j$.
b) Montrer que $\frac{1}{|Q|}|\int_Q g| \leq 2$ pour tout intervalle dyadique de longueur inférieure à $1/2$ (on distinguera deux cas : ou bien Q est contenu dans un des intervalles Q_j, ou bien...). En déduire que $|\int hg| \leq 2\|h\|_{L^1}$ pour tout h dans l'espace vectoriel engendré par les indicatrices d'intervalles dyadiques, puis pour tout $h \in L^1(\mathbf{R})$. Conclure.

13) Déduire du cas particulier $\alpha = \|f\|_1 = 1$ le cas $\alpha, \|f\|_{L^1}$ arbitraires.

D- Comportement sur L^1 : type faible $(1,1)$.

Pour $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ mesurable on pose $\|f\|_{1,\infty} = \sup_{\alpha>0} \alpha|\{x, |f(x)| > \alpha\}|$ et on note $L^{1,\infty}(\mathbf{R}) = \{f, \|f\|_{1,\infty} < \infty\}$.

14) Montrer que $\|f+g\|_{1,\infty} \leq 2(\|f\|_{1,\infty}+\|g\|_{1,\infty})$, $\|\lambda f\|_{1,\infty} = |\lambda|\|f\|_{1,\infty}$; $L^{1,\infty}$ est donc un espace vectoriel. Montrer qu'il contient L^1 ainsi que la fonction $1/x$.

On a vu que H n'est pas un opérateur borné sur L^1. On montre ici que H *est de type faible* $(1,1)$, c'est-à-dire il existe une constante C telle que pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, $\|Hf\|_{1,\infty} \leq C\|f\|_{L^1}$.

Soit donc $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et $t > 0$. Pour $\alpha > 0$, on décompose $f = g + b$ comme dans la partie précédente.

15) Montrer les inégalités $|\{x, |Hg(x)| > \alpha\}| \leq \|Hg\|_{L^2}^2/\alpha^2 \leq \|g\|_\infty\|g\|_1/\alpha^2 \leq 2\|f\|_1/\alpha$.

16) Pour tout j on pose Q_j^* l'intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ qui a le même centre c_j que Q_j mais une longueur double.
a) Montrer que

$$|\{x, |Hb(x)| > \alpha\}| \leq \frac{1}{\alpha}(2\|f\|_1+\int_{\mathbf{R}\setminus(\cup_j Q_j^*)} |Hb(x)|dx) \leq \frac{1}{\alpha}(2\|f\|_1+\sum_j \int_{\mathbf{R}\setminus Q_j^*} |Hb_j(x)|dx).$$

b) Montrer que $Hb_j(x) = \frac{1}{\pi}\int_{Q_j} \frac{b_j(y)}{x-y}dy$ pour presque tout $x \notin Q_j^*$ (on commencera par montrer cette formule lorsque b_j est remplacée par une fonction arbitraire C^∞ à support compact dans Q_j).
c) Montrer

$$\int_{\mathbf{R}\setminus Q_j^*} |Hb_j(x)|dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}\setminus Q_j^*} |\int_{Q_j} b_j(y)\left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-c_j}\right)dy|dx \leq \frac{2}{\pi}\int_{Q_j} |b_j(y)|dy.$$

En déduire que $|\{x, |Hb(x)| > \alpha\}| \leq (2+\frac{8}{\pi})\frac{\|f\|_1}{\alpha}$.

17) Trouver C tel que $\|Hf\|_{1,\infty} \leq C\|f\|_{L^1}$ pour tout $f \in L^1$.

Pour aller plus loin. On pourra essayer de montrer qu'un opérateur qui est borné sur L^2 et de type faible $(1,1)$ est borné sur L^p pour tout $p \in (1,2]$ (théorème de Marcinkiewicz).

H est un cas particulier de *multiplicateur de Fourier*, c'est-à-dire que $\mathcal{F}(Hf)(\xi) = m(\xi)\mathcal{F}f(\xi)$ pour une fonction mesurable bornée m. La décomposition de Calderón-Zygmund est un outil qui permet de démontrer le type faible $(1,1)$ (et donc le caractère borné sur L^p par Marcinkiewicz) pour beaucoup d'autres multiplicateurs de Fourier.

13. Trou spectral et propriétés de point fixe

Devoir à la maison 2015

Si E est un espace de Banach, on notera $O(E)$ le groupe des isométries linéaires surjectives de E. On notera aussi $\mathrm{Aff}(E)$ le groupe des isométries affines de E. On rappelle qu'une isométrie affine est une bijection $T\colon E \to E$ de la forme $T(x) = ux + b$, pour $u \in O(E)$ et $b \in E$. On appelle u la partie linéaire de T et $b = T(0)$ sa partie de translation. On peut remarquer que $\mathrm{Aff}(E)$ est isomorphe au produit semi-direct $O(E) \ltimes E$.

Soit G un groupe infini dénombrable, dont on notera e l'élément neutre. Dans cet exercice, une représentation de G sur E sera un morphisme de groupes de G dans $O(E)$.

1) Soit σ une application de G dans $\mathrm{Aff}(E)$. On note $\pi(g)$ la partie linéaire de $\sigma(g)$ et $b(g)$ sa partie de translation. Montrer que σ est un morphisme de groupes si et seulement si $\pi\colon G \to O(E)$ est une représentation et

$$b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h) \text{ pour tout } g, h \in G. \tag{13}$$

2) Soit $\sigma\colon G \to \mathrm{Aff}(E)$ un morphisme de groupes, et π, b ses parties linéaire et de translation. Montrer que σ a un point fixe x (c'est-à-dire un point $x \in E$ tel que $\sigma(g)(x) = x$ pour tout $g \in G$) si et seulement si $b(g) = \pi(g)x - x$ pour tout $g \in G$.

À partir de maintenant, on se fixe $\pi\colon G \to O(E)$ une représentation de G sur E.

3) On notera $Z^1(G, \pi)$ l'ensemble fonctions $b\colon G \to E$ qui satisfont (13). Montrer que $Z^1(G, \pi)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de G dans E. Montrer que, pour la famille de semi-normes $(\rho_g)_{g\in G}$ définies par $\rho_g(b) = \|b(g)\|$, c'est un espace de Fréchet.

4) On suppose que tout morphisme $\sigma\colon G \to \mathrm{Aff}(E)$ de partie linéaire π a un point fixe. Montrer que

$$\exists \varepsilon > 0, \exists S \subset G \text{ partie finie }, \forall x \in X, \max_{g\in S} \|\pi(g)x - x\| \geq \varepsilon \|x\|_{E/E^\pi}, \tag{14}$$

où $E^\pi = \{y \in E, \pi(g)y = y \forall g \in G\}$ et où le quotient E/E^π est muni de la norme quotient $\|x\|_{E/E^\pi} = \inf_{y\in E^\pi} \|x-y\|_E$ qui en fait (on l'admet) un espace de Banach. (Indication : on pourra considérer l'application linéaire $E \to Z^1(G, \pi)$ qui envoie x sur $(\pi(g)x - x)_{g\in G}$).

5) À partir de maintenant, on suppose que E est un espace de Hilbert, et on note F l'orthogonal de E^π, de sorte qu'on a la décomposition en somme directe orthogonale $E = E^\pi \oplus F$. Montrer que $\pi(g)F = F$ pour tout $g \in G$.

6) On suppose maintenant que (14) est satisfaite (et toujours que E est un espace de Hilbert). On note $T = \pi(e) + \sum_{s\in S} \pi(s)$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\|Tx\| < 1 + |S| - \delta$ pour tout $x \in F$ de norme 1, où $|S|$ désigne le cardinal de S. En déduire que $(\frac{T}{1+|S|})^n$ converge lorsque $n \to \infty$ dans $\mathcal{L}(E)$ vers P la projection orthogonale sur E^π : $\lim_{n\to\infty} \|(\frac{T}{1+|S|})^n - P\|_{\mathcal{L}(E)} = 0$.

7) Réciproquement, supposons que la projection orthogonale sur E^π appartient à l'adhérence dans $\mathcal{L}(E)$ de l'enveloppe convexe de $\{\pi(g), g \in G\}$. Montrer que (14) est satisfaite.

Pour aller plus loin : les groupes tels que (14) est satisfaite pour toute représentation sur un espace de Hilbert sont appelés *groupes de Kazhdan*, ou *groupes avec la propriété (T)*. Dans la question 4, on a montré que si G est un groupe dénombrable[1] et si toute action par isométries affines de G sur un espace de Hilbert a un point

1. l'hypothèse que G est dénombrable est importante, il y a des contre-exemples sinon. D'ailleurs, où a-t-on utilisé cette hypothèse ?

fixe, alors G a la propriété (T) (en fait on a démontré un énoncé similaire pour tous les espaces de Banach, pas seulement pour les Hilbert). La réciproque est vraie, mais uniquement pour les espaces de Hilbert, voir le livre *Kazdhan's property (T)* de Bekka–de la Harpe–Valette. Dans les questions 6 et 7, on a démontré que G a la propriété (T) si et seulement si il existe une "projection de Kazhdan". Cette équivalence reste vraie (avec un peu plus de travail) pour les espaces uniformément convexes, mais est fausse en général, par exemple pour les espaces L^1.

14. Une équation différentielle

Partiel 2015

On considère dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ l'équation (E) d'inconnue u

$$(E) \quad 2xu' - u = \delta,$$

où x désigne la fonction C^∞ $x \mapsto x$.

1) Exprimer $x\delta^{(j)}$ en fonctions des dérivées de δ.

2) Déterminer les solutions de (E) de support $\{0\}$.

3) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ une solution de (E), et soient U, V les restrictions de T à $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$. Calculer $((-x)^{-1/2}U)'$ dans $\mathcal{D}'(]-\infty, 0[)$, et $(x^{-1/2}V)'$ dans $\mathcal{D}'(]0, \infty[)$. En déduire U et V.

4) Montrer que pour $(\lambda, \mu \in \mathbf{C})$, la fonction $u \colon x \mapsto \lambda\sqrt{x}1_{x>0} + \mu\sqrt{-x}1_{x<0}$ est solution de $2xu' - u = 0$.

5) Déterminer toutes les solutions de (E).

15. Noyau de la chaleur

Partiel 2015

On considère sur $\mathbf{R}^{d+1} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ les coordonnées (t, x) avec $t \in \mathbf{R}$ and $x \in \mathbf{R}^d$. On note $|x|^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2$ et $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2$. Le noyau de la chaleur est la fonction

$$k(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/4t} 1_{\{t>0\}}.$$

1) Montrer que $\partial_t k = \Delta k$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^d$.

2) Montrer que $\int_{\mathbf{R}^d} k(t, x)dx = 1$ pour tout $t > 0$ (on pourra utiliser sans preuve que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2/2}dx = 1$). En particulier k est localement intégrable, et on peut voir k comme une distribution sur $\mathbf{R}^{d+1}$.

3) Pour $\varepsilon > 0$, on pose $k_\varepsilon(t, x) = k(t, x)1_{t>\varepsilon}$. Montrer que

$$\langle (\partial_t - \Delta)k_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(\varepsilon, x)k(\varepsilon, x)dx.$$

4) En déduire que k est solution dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{d+1})$ de $(\partial t - \Delta)k = \delta$.

5*) Montrer que k est une distribution tempérée, et justifier proprement que sa transformée de Fourier est $u(s, \xi) = (2\pi)^{-\frac{d+1}{2}} \frac{1}{it - |\xi|^2}$.

16. Un opérateur compact

Examen 2013

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans preuve le fait vu en Tds qu'un opérateur T sur un espace de Hilbert est compact si et seulement si, pour tout suite f_n qui converge faiblement vers 0, Tf_n converge en norme vers 0.

On définit un opérateur linéaire P sur $L_2([0,1])$ en posant pour tout $f \in L_2([0,1])$

$$\forall s \in [0,1], \quad (Pf)(s) = \int_0^s f(t)dt.$$

(1) Montrer que P est borné. Montrer que P injectif.

(2) Montrer que P n'a pas de vecteur propre.

(3) Montrer que P est compact. Que vaut $\lim_n \|P^n\|^{1/n}$?

(4) Déterminer l'adjoint P^*. Diagonaliser P^*P (on commencera par justifier que P^*P est injectif, puis on pourra montrer que les fonctions propres de P^*P sont de classe C^2 et vérifient une équation différentielle qu'on résoudra en faisant attention aux conditions au bord). Que vaut $\|P\|$?

17. Espaces de Sobolev

Examen 2013

Dans cet exercice, on considère des fonctions ou distributions à valeurs dans $\mathbf{R}^d$. Les notations $u \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{R}^d)$, $H^1(\Omega; \mathbf{R}^d)$, etc., signifient que $u = (u_1, \ldots, u_d)$ est un d-uplet d'éléments dans l'espace correspondant à valeurs réelles.

Soit $d \geq 2$, Ω un domaine borné régulier dans $\mathbf{R}^d$, et $u \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^d)$ telle que $\Delta u = g \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbf{R}^d)$.

Remarque : On a donc

$$\int \nabla u \cdot \nabla \varphi = -\int g \cdot \varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbf{R}^d),$$

où $\nabla u \cdot \nabla \varphi = \sum_j \nabla u_j \cdot \nabla \varphi_j$. Dans l'équation ci-dessus, le côté gauche s'étend naturellement à $\varphi \in H^1_0$. Toutefois ce n'est a priori pas le cas du côté droit, et il n'est pas du tout évident que cette formule ait encore un sens.

Le but de cet exercice est de démontrer le

Théorème. *Pour toute $\zeta \in H^1_0(\Omega; \mathbf{R}^d)$,*

$$\zeta \cdot g \geq 0 \text{ p.p.} \Longrightarrow \int \nabla \zeta \cdot \nabla u \leq 0,$$

On appliquera ensuite ce théorème pour obtenir une borne L^∞ pour toute solution d'un système elliptique quasi-linéaire, dont la non-linéarité vérifie une condition de croissance à l'infini (question 6).

On admettra le résultat suivant (règle de la chaîne) :

$$\forall \varphi \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}),\ \forall u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega; \mathbf{R}), \quad v := \varphi \circ u \in W^{1,1}_{loc} \text{ et } \partial_j v = (\partial_j u)\varphi'(u).$$

(Ce résultat est facile à démontrer pour φ de classe C^1 et Lipschitz, mais non trivial en général : en particulier, puisque φ' est définie modulo égalité p.p., il implique que $\mathbf{1}_{u \in A} \partial_j u = 0$ p.p. pour tout $A \subset \mathbf{R}$ de mesure nulle...)

(1) Démontrer le théorème dans le cas où $\zeta \in H^1_0(\Omega; \mathbf{R}^d)$ est bornée et à support compact dans Ω. On pourra utiliser et justifier rapidement qu'il existe une suite de fonctions $\zeta_k \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbf{R}^d)$, à support dans un compact fixé, uniformément bornées, et convergeant vers ζ dans H^1 et p.p.

(2) *Inégalité de Hardy.* Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\int_{x_d>0} \frac{\varphi^2}{x_d^2} \leq C \int_{x_n>0} |\nabla\varphi|^2 \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbf{R}^d_+).$$

Dans la suite on admettra qu'il existe $C = C(\Omega) > 0$ tel que

$$\int_\Omega \frac{|\varphi|^2}{(d_{\partial\Omega})^2} \leq C \int |\nabla\varphi|^2 \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega)$$

où $d_{\partial\Omega}(x)$ est la distance de $x \in \Omega$ au bord $\partial\Omega$ de Ω.

(3) Soit $\theta_k \in C_c^\infty(\Omega)$ vérifiant

$$0 \leq \theta_k \leq 1, \quad \theta_k \equiv 1 \text{ dans } \left\{ x \in \Omega, d_{\partial\Omega}(x) > \frac{1}{k} \right\}, \quad |\nabla\theta_k| \leq \frac{c}{d_{\partial\Omega}}$$

(on admettra l'existence d'une telle suite). Pour $\zeta \in H^1_0(\Omega; \mathbf{R})$, on définit $\zeta_k = \theta_k \zeta$. Montrer que

$$\int \nabla u \cdot \nabla \zeta_k \longrightarrow \int \nabla u \cdot \nabla \zeta.$$

En déduire que le théorème est valable pour $\zeta \in (H^1_0 \cap L^\infty)(\Omega; \mathbf{R}^d)$.

(4) Soit $\zeta \in H^1_0(\Omega; \mathbf{R}^d)$. On définit

$$\varphi_k(t) := \mathbf{1}_{t \leq k^2} + \mathbf{1}_{t > k^2} \frac{k}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad \zeta_k := \varphi_k(|\zeta|^2)\zeta.$$

Calculer φ_k' (dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$), et en déduire que $\zeta_k \in H^1_0(\Omega; \mathbf{R}^d)$ et $\zeta_k \to \zeta$ dans H^1.

(5) Démontrer le théorème.

(6) *Une application.* Soit $R_0 > 0$ et $F : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ telle que :

$$|x| \geq R_0 \Longrightarrow F(x) \cdot x \geq 0.$$

Soit $u_0 \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^d)$ vérifiant $|u_0| \leq R_0$ p.p. Montrer que toute solution $u \in u_0 + H^1_0(\Omega; \mathbf{R}^d)$ de

$$\Delta u = F(u) \qquad \mathcal{D}'(\Omega)$$

(en particulier $F(u) \in L^1_{loc}$) vérifie $|u| \leq R_0$ p.p. On pourra appliquer le théorème à $\zeta = \varphi(|u|^2)u$, où $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$ vérifie

$$\varphi, \varphi' \geq 0, \quad \varphi \equiv 0 \text{ dans } [0, R_0^2], \quad \varphi \equiv 1 \text{ dans } [R_0^2 + \delta, +\infty),$$

et en déduire que

$$\int_{|u|>R_0} |\nabla u|^2 = 0.$$

18. Espaces de Sobolev

Examen 2015

Soit $d \geq 1$ et $s \in \mathbf{R}$.
1) Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$.
a) Montrer que pour tout $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ et tout $\xi \in \mathbf{R}^d$,

$$\mathcal{F}(fg)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}f(\eta)\mathcal{F}g(\xi - \eta) d\eta.$$

En déduire qu'il existe une constante C (qui dépend de d et s uniquement) telle que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^d$

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}|\mathcal{F}(fg)(\xi)| \leq C \int_{\mathbf{R}^d} (1+|\eta|^2)^{|s|/2}|\mathcal{F}f(\eta)|(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}|\mathcal{F}g(\xi-\eta)|d\eta.$$

b) En déduire qu'il existe une constante C' (qui dépend de f mais pas de g) telle que

$$\|fg\|_{H^s(\mathbf{R}^d)} \leq C'\|g\|_{H^s(\mathbf{R}^d)},$$

puis que $fg \in H^s(\mathbf{R}^d)$ pour tout $g \in H^s(\mathbf{R}^d)$ (on utilisera la forme intégrale de l'inégalité triangulaire : si F est une fonction positive mesurable sur un produit $(X \times Y, \mu \times \nu)$ d'espaces mesurés σ-finis, alors $\| \int F(\cdot, y) d\nu(y)\|_{L^p(X,\mu)} \leq \int \|F(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)} d\nu(y)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$).

2) Soit $m \in \mathbf{N}$ et $L \in \mathcal{L}(\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d))$ de la forme $L = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^d, |\alpha| \leq m} (c_\alpha + a_\alpha) D^\alpha$ pour $c_\alpha \in \mathbf{C}$ et $a_\alpha \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. Montrer que $L(H^s(\mathbf{R}^d)) \subset H^{s-m}(\mathbf{R}^d)$.

3) On suppose maintenant que $L = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^d, |\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha$ avec $c_\alpha \in \mathbf{C}$, et qu'il existe $c \in (0, \infty)$ telle que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^d$,

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{N}^d, |\alpha| \leq m} c_\alpha \xi^\alpha \geq c|\xi|^m$$

où $|\xi| = (\sum \xi_i^2)^{1/2}$. Montrer que si f est une distribution telle que $f \in H^s(\mathbf{R}^d)$ et $Lf \in H^s(\mathbf{R}^d)$, alors $f \in H^{s+m}(\mathbf{R}^d)$ et il existe une constante C (qui dépend de s, m, d, L mais pas de f) telle que

$$\|f\|_{H^{s+m}(\mathbf{R}^d)} \leq C(\|f\|_{H^s(\mathbf{R}^d)} + \|Lf\|_{H^s(\mathbf{R}^d)}).$$

4) On garde les mêmes hypothèses sur L. Soit $f \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^d)$ (une fonction dont la restriction à tout compact est de carré intégrable) et $\lambda \in \mathbf{C}$ telle que $Lf = \lambda f$. Montrer que f est C^∞ (on pourra commencer par montrer par récurrence sur k que $\varphi f \in H^k(\mathbf{R}^d)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ et $k \geq 0$).

19. Opérateurs à trace

Examen 2015

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable. Pour $A \in \mathcal{L}(H)$ on notera $\|A\|$ sa norme d'opérateur. Une base hilbertienne de H est une famille orthonormée qui engendre un sous-espace dense de H.

Rappel sur la décomposition polaire : si $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe une unique factorisation $T = U|T|$ où $|T| = (T^*T)^{1/2}$ et U est une isométrie partielle telle que U^*U est la projection othogonale sur l'adhérence de l'image de $|T|$ (et donc $|T| = U^*T$).

Rappel sur les opérateurs de Hilbert-Schmidt : si $T \in \mathcal{L}(H)$, la quantité $\sum_n \|Te_n\|^2$ ne dépend pas de la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$, et $\{T, \sum_n \|Te_n\|^2 < \infty\}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle T, S\rangle = \sum_n \langle Te_n, Se_n\rangle$ (le produit scalaire ne dépend pas de la base hilbertienne). On note S_2 cet espace de Hilbert, et $\|T\|_{S_2} = (\sum_n \|Te_n\|^2)^{1/2}$ la norme d'un élément de S_2. On pourra utiliser sans preuve que $\|T\|_{S_2} = \|T^*\|_{S_2}$ et que $\|AT\|_{S_2} \leq \|A\|\|T\|_{S_2}$ et $\|TA\|_{S_2} \leq \|A\|\|T\|_{S_2}$ pour tous $T \in S_2$ et $A \in \mathcal{L}(H)$.

On définit $S_1 = \{A \in \mathcal{L}(H), |A|^{1/2} \in S_2\}$.

1) Soit $A \in S_1$. Soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de H.

a) Montrer que la série $\sum_n \langle TAe_n, e_n\rangle$ converge pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, et que cette somme ne dépend pas de la base hilbertienne. On la notera $tr(TA)$. (Indication : on pourra utiliser la décomposition polaire de A pour exprimer $tr(TA)$ comme un produit scalaire dans S_2).

b) Montrer que $tr(|A|) = \||A|^{1/2}\|_{S_2}^2$, que $tr(TA) \leq \|T\| tr(|A|)$ pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, et que $tr(|A|) = \sup\{|tr(TA)|, T \in \mathcal{K}(H), \|T\| \leq 1\}$.

2) Réciproquement : soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de H. On suppose que la série $\sum_n \langle TAe_n, e_n\rangle$ converge pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que $A \in S_1$.

3) En utilisant les questions 1 et 2, montrer que S_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(H)$, et que $tr(|A|)$ est une norme sur S_1.

4) La question 1b) implique que si $A \in S_1$, $T \mapsto tr(TA)$ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{K}(H), \|\cdot\|)$ de norme $tr(|A|)$. Dans cette question on montre que toute forme linéaire continue sur $(\mathcal{K}(H), \|\cdot\|)$ est de cette forme. Soit φ une forme linéaire continue sur $\mathcal{K}(H)$.

a) Montrer qu'il existe un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\varphi(\langle\cdot,\xi\rangle\eta) = \langle A\eta, \xi\rangle$ pour tous $\xi, \eta \in H$ (où $\langle\cdot,\xi\rangle\eta$ dénote l'opérateur de rang 1 qui envoie $u \in H$ sur $\langle u, \xi\rangle\eta$).

b) Montrer que $\varphi(T) = tr(TA)$ pour tout T de rang fini.

c) Montrer que $A \in S_1$ et que $\varphi(T) = tr(TA)$ est vraie pour tout $T \in \mathcal{K}(H)$ (on pourra utiliser sans preuve que les opérateurs de rang fini sont denses dans $\mathcal{K}(H)$).

5) a) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que $A \in S_1 \mapsto tr(TA)$ est une forme linéaire continue de norme égale à $\|T\|$ (on pourra commencer par montrer que si ξ, η sont des vecteurs de norme 1 dans H, alors l'opérateur de rang 1, $A = \langle\cdot,\xi\rangle\eta$, appartient à S_1 et a pour norme $tr|A| = 1$).

b) Montrer réciproquement que toute forme linéaire continue sur S_1 est de la forme $A \mapsto tr(TA)$ pour $T \in B(H)$.

6) Montrer que le bidual de $\mathcal{K}(H)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}(H)$.

7) Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tels que $AB \in S_1$ et $BA \in S_1$. Le but de cette question est de montrer que $tr(AB) = tr(BA)$.

a) Traiter le cas où $A, B \in S_2$, puis le cas où $A \in S_1$ (pour le second cas, on pourra écrire A comme le produit de deux éléments de S_2).

b) On suppose que A est un opérateur autoadjoint de spectre contenu dans $\mathbf{R}^+$. Soit $f_n \colon \mathbf{R}^+ \to [0,1]$ une fonction continue qui vaut 0 sur $[1, 1/n]$ et 1 sur $[2/n, \infty)$. Montrer que $f_n(A)B \in S^1$ (on écrira $f_n(A)B = CAB$ pour un $C \in \mathcal{L}(H)$ bien choisi). En déduire que $tr(f_n(A)AB) = tr(BAf_n(A))$.

c*) En faisant tendre $n \to \infty$, conclure l'égalité $tr(AB) = tr(BA)$ dans le cas où A est autoadjoint de spectre contenu dans $\mathbf{R}^+$.

d) Traiter le cas général.

Annexe A

Topologie induite par une famille de fonctions

Soit X un ensemble. On rappelle qu'une *topologie* sur X est un ensemble τ de parties de X satisfaisant les axiomes suivants : $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$, et τ est stable par réunions quelconques et intersections finies. L'exemple le plus usuel est lorsque X est un espace métrique, auquel cas la topologie est constitué des ensembles $O \subset X$ tel que $\forall x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $\{y \in X, d(x, y) < r\} \subset O$. En analyse fonctionnelle on travaille beaucoup avec des topologies qui ne proviennent pas de distance. En effet, on cherche souvent à travailler avec des topologies les moins fines possibles, puisque s'il y a moins d'ouverts, il y a plus de compacts. La construction suivante, appelée *topologie initiale*, joue ce rôle.

Soient X un ensemble et $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Z_\alpha\}_{\alpha\in A}$ où Z_α est un espace topologique. On note τ la topologie la moins fine (de façon équivalente la plus faible, ou la plus petite) sur X rendant continues chaque f_α. On a les caractérisations

Théorème A.1. *Avec les notations précédentes*

(1) τ coïncide avec l'ensemble des réunions quelconques d'intersections finies d'élements de la forme $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, $\alpha \in A$ et U_α ouvert de Z_α.

(2) Soit Z un espace topologique. Une fonction $g\colon Z \to X$ est continue (pour τ) si et seulement si $f_\alpha \circ g : Z \to Z_\alpha$ est continue pour chaque α.

(3) Soit (x_n) une suite dans X. Alors

$$x_n \to x \text{ pour } \tau \iff \forall\alpha \in A, f_\alpha(x_n) \to f_\alpha(x).$$

Démonstration. Le premier point est quasiment la définition de τ : si on note τ_0 l'ensemble des réunions quelconques d'intersections finies d'élements de la forme $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, $\alpha \in A$ et U_α ouvert de Z_α, alors il est clair que τ_0 est une topologie. Comme elle contient $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ pour tout α et tout ouvert U_α de Z_α, elle rend continue chaque f_α. Réciproquement, toute topologie qui rend continue les f_α contient chaque $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, et donc contient les réunions quelconques d'intersections finies de telles parties, c'est-à-dire elle contient τ_0. Ceci prouve bien que τ_0 est la topologie la moins fine rendant continues les f_α.

Pour le second point : si g est continue, alors $f\alpha \circ g$ aussi, comme composée de fonctions continues. Réciproquement, si pour tout α, $f_\alpha \circ g$ est continue, alors $g^{-1}(f_\alpha^{-1})(U_\alpha))$ est ouvert pour tout α et tout ouvert U_α de Z_α. On en déduit que $g^{-1}(U)$ est ouvert pour tout U réunion croissante d'intersections finies d'ensembles de la forme $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, c'est-à-dire pour tout U ouvert de τ. Donc g est continue.

Le dernier point est un cas particulier du précédent pour l'espace $Z = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandrov de $\mathbf{N}$. En effet pour cette topologie, une suite x_n converge vers x dans X si et seulement si $f\colon Z \to X$ qui à n associe x_n et ∞ associe x est continue. $\square$

Bibliographie

[AF03] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.

[Bre83] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[Con00] John B. Conway. *A course in operator theory*, volume 21 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[Rud80] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1980. Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman, Third printing.

[Rud91] Walter Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.