UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Éric DELAYGUE

Thèse dirigée par **Tanguy RIVOAL**

préparée au sein de l'**Institut Fourier**
dans **l'École Doctorale Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique**

Propriétés arithmétiques des applications miroir

Thèse soutenue publiquement le **6 Septembre 2011**,
devant le jury composé de :

Frits BEUKERS
Professeur à l'université d'Utrecht (Pays-Bas), Examinateur
Gilles CHRISTOL
Professeur émérite à l'université Paris 6, Examinateur
Christian KRATTENTHALER
Professeur à l'université de Wien (Autriche), Rapporteur
Gaël RÉMOND
Maître de conférences à l'université Grenoble 1, Examinateur
Tanguy RIVOAL
Directeur de recherche à l'université Lyon 1, Directeur de thèse
Julien ROQUES
Maître de conférences à l'université Grenoble 1, Examinateur
Lucia DI VIZIO
Chargée de recherche à l'université Paris 6, Rapporteur

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le principal but de cette thèse est de démontrer un critère pour l'intégralité des coefficients de Taylor de séries formelles appelées *applications miroir*. Avant de définir précisément les applications miroir traitées par ce critère, nous donnons quelques exemples classiques où l'intégralité de leurs coefficients de Taylor est déjà connue.

On considère la série hypergéométrique (voir [27] ou le chapitre 4 de cette thèse pour la définition)

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^2}{n!^4} z^n = {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ 1 \end{matrix} ; 16z \right)$$

solution de l'équation différentielle

$$D^2 y - 16z\left(D + \frac{1}{2}\right)^2 y = 0, \text{ avec } D := z\frac{d}{dz}. \tag{1.0.1}$$

D'après la méthode de Frobenius (voir [30]), on obtient une deuxième solution $G(z) + \log(z)F(z)$ de (1.0.1) linéairement indépendante de F où

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^2}{n!^4} \left(4H_{2n} - 4H_n\right) z^n$$

et $H_n := \sum_{i=1}^{n} 1/i$ est le n-ième nombre harmonique. La *coordonnée canonique* associée à (1.0.1) est $q(z) = \exp\left((G(z) + \log(z)F(z))/F(z)\right) = z\exp(G(z)/F(z))$. On peut inverser formellement la série $q(z)$ car $q(0) = 0$. L'application miroir $z(q)$ correspondante est l'inverse de $q(z)$ pour la composition des séries formelles. Il est bien connu que $z(q)$ est une fonction modulaire dont on constate que les coefficients sont entiers (voir [18, Section 9] pour un exposé de nombreux exemples d'applications miroir d'origine modulaire). On a en fait

$$z(q) = \frac{\theta_2^4(q)}{16\theta_3^4(q)} = q\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{4n})^8}{(1-(-q)^n)^8} \in \mathbb{Z}[[q]],$$

où $\theta_2(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}$ et $\theta_3(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$ sont des fonctions thêta de Jacobi. On a alors le développement de Taylor

$$z(q) = q - 8q^2 + 44q^3 - 192q^4 + 718q^5 - 2400q^6 + 7352q^7 - 20992q^8 + 56549q^9 + O(q^{10}).$$

Un autre exemple célèbre, étudié par Candelas, de la Ossa, Green et Parkes dans [5], est le cas de la série hypergéométrique

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} z^n = {}_4F_3\left(\begin{matrix} 1/5, 2/5, 3/5, 4/5 \\ 1, 1, 1 \end{matrix} ; 5^5 z \right),$$

solution de l'équation différentielle

$$D^4 y - 5z\,(5D+1)\,(5D+2)\,(5D+3)\,(5D+4)\,y = 0. \tag{1.0.2}$$

Une deuxième solution de (1.0.2) linéairement indépendante de F est $G(z) + \log(z)F(z)$, où

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} (5H_{5n} - 5H_n) z^n.$$

L'application miroir associée est l'inverse pour la composition des applications de $q(z) = z\exp(G(z)/F(z))$. Dans ce cas, aucune origine modulaire n'est actuellement connue pour $z(q)$. En revanche, un résultat de Lian et Yau, exposé dans la partie 2.1, donne l'intégralité des coefficients de Taylor à l'origine de $q(z)$ et $z(q)$:

$$q(z) = z + 770z^2 + 1014275z^3 + 1703916750z^4 + 3286569025625z^5 + O(z^6)$$

et

$$z(q) = q - 770q^2 + 171525q^3 - 81623000q^4 - 35423171250q^5 - 54572818340154q^6 + O(q^7).$$

Donnons maintenant un exemple également classique d'application miroir de plusieurs variables, étudié dans [3], [28] et [17]. La série

$$F(z_1, z_2) = \sum_{m,n \geq 0} \frac{(3m+3n)!}{m!^3 n!^3} z_1^m z_2^n \tag{1.0.3}$$

est solution du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} D_1^3 y - z_1\,(3D_1 + 3D_2 + 1)\,(3D_1 + 3D_2 + 2)\,(3D_1 + 3D_2 + 3)\,y = 0, \\ D_2^3 y - z_2\,(3D_1 + 3D_2 + 1)\,(3D_1 + 3D_2 + 2)\,(3D_1 + 3D_2 + 3)\,y = 0, \end{cases}$$

où $D_1 = z_1\frac{d}{dz_1}$ et $D_2 = z_2\frac{d}{dz_2}$. On trouve deux autres solutions de ce système de la forme $G_1(z_1,z_2)+\log(z_1)F(z_1,z_2)$ et $G_2(z_1,z_2)+\log(z_2)F(z_1,z_2)$ où

$$G_1(z_1,z_2) = \sum_{m,n\geq 0} \frac{(3m+3n)!}{m!^3 n!^3}(3H_{3m+3n} - 3H_m) z_1^m z_2^n \tag{1.0.4}$$

et

$$G_2(z_1,z_2) = \sum_{m,n\geq 0} \frac{(3m+3n)!}{m!^3 n!^3}(3H_{3m+3n} - 3H_n) z_1^m z_2^n. \tag{1.0.5}$$

On définit les coordonnées canoniques associées $q_1(z_1,z_2) = z_1\exp(G_1(z_1,z_2)/F(z_1,z_2))$ et $q_2(z_1,z_2) = z_2\exp(G(z_1,z_2)/F(z_1,z_2))$. Les applications miroir correspondantes sont définies comme étant les séries formelles $z_1(q_1,q_2)$ et $z_2(q_1,q_2)$ telles que l'application

$$(q_1,q_2)\mapsto (z_1(q_1,q_2), z_2(q_1,q_2))$$

soit l'inverse pour la composition de

$$(z_1,z_2)\mapsto (q_1(z_1,z_2), q_2(z_1,z_2)).$$

D'après le corollaire 1 de [17], on obtient que les séries $q_1(z_1,z_2)$, $q_2(z_1,z_2)$, $z_1(q_1,q_2)$ et $z_2(q_1,q_2)$ ont tous leurs coefficients de Taylor entiers. En particulier, on a

$$\begin{aligned} q_1(z_1,z_2) &= q_2(z_2,z_1) \\ &= z_1 + 15z_1^2 + 33z_1z_2 + 3339z_1^2z_2 + 1008z_1z_2^2 + 312903z_1^2z_2^2 + O(z_1^3) + O(z_2^3). \end{aligned}$$

Dans la suite de cette thèse, nous établissons une condition nécessaire et suffisante pour l'intégralité des coefficients de Taylor des applications miroir définies par des quotients de factorielles de formes linéaires. La forme générale des applications miroir traitées par ce critère englobe les trois exemples précédents.

1.1 Définition des applications miroir

Nous introduisons les notations multi-indice standard suivantes. Soit $d\in\mathbb{N}$, $d\geq 1$, $k\in\{1,\dots,d\}$ et des vecteurs $\mathbf{m} := (m_1,\dots,m_d)$ et $\mathbf{n} := (n_1,\dots,n_d)$ dans $\mathbb{R}^d$, on note $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}$ le produit scalaire $m_1n_1+\cdots+m_dn_d$ et $\mathbf{m}^{(k)}$ pour m_k. On note $\mathbf{m}\geq\mathbf{n}$ si et seulement si $m_i\geq n_i$ pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$. De plus, si $\mathbf{z} := (z_1,\dots,z_d)$ est un vecteur de variables et si $\mathbf{n} := (n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{Z}^d$, on note $\mathbf{z}^{\mathbf{n}}$ le produit $z_1^{n_1}\cdots z_d^{n_d}$. Enfin, on note $\mathbf{0}$ le vecteur $(0,\dots,0)\in\mathbb{Z}^d$.

Étant données $e := (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{q_1})$ et $f := (\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_{q_2})$ deux suites de vecteurs de $\mathbb{N}^d$, on note $|e| := \sum_{i=1}^{q_1}\mathbf{e}_i$, $|f| := \sum_{i=1}^{q_2}\mathbf{f}_i\in\mathbb{N}^d$ de sorte que, pour tout $k\in\{1,\dots,d\}$, on ait $|e|^{(k)} = \sum_{i=1}^{q_1}\mathbf{e}_i^{(k)}$ et $|f|^{(k)} = \sum_{i=1}^{q_2}\mathbf{f}_i^{(k)}$. Pour tout $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$, on note

$$\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{n}) := \frac{(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{n})!\cdots(\mathbf{e}_{q_1}\cdot\mathbf{n})!}{(\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{n})!\cdots(\mathbf{f}_{q_2}\cdot\mathbf{n})!}.$$

On définit les séries formelles

$$F_{e,f}(\mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{n}\geq\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{n})!\cdots(\mathbf{e}_{q_1}\cdot\mathbf{n})!}{(\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{n})!\cdots(\mathbf{f}_{q_2}\cdot\mathbf{n})!}\mathbf{z}^{\mathbf{n}}$$

et

$$G_{e,f,k}(\mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{n}\geq\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{n})!\cdots(\mathbf{e}_{q_1}\cdot\mathbf{n})!}{(\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{n})!\cdots(\mathbf{f}_{q_2}\cdot\mathbf{n})!}\left(\sum_{i=1}^{q_1}\mathbf{e}_i^{(k)}H_{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{n}} - \sum_{j=1}^{q_2}\mathbf{f}_j^{(k)}H_{\mathbf{f}_j\cdot\mathbf{n}}\right)\mathbf{z}^{\mathbf{n}}, \tag{1.1.1}$$

où $k\in\{1,\ldots,d\}$ et, pour tout $m\in\mathbb{N}$, $H_m := \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}$ est le m-ième nombre harmonique. Par exemple, on retrouve les séries (1.0.3), (1.0.4) et (1.0.5), exposées dans l'introduction, en prenant $e=\big((3,3)\big)$ et $f=\big((1,0),(1,0),(1,0),(0,1),(0,1),(0,1)\big)$.

La série $F_{e,f}(\mathbf{z})$ est une série A-hypergéométrique ([1]) et est donc solution d'un A-système d'équations différentielles linéaires. Dans certains cas, on trouve d solutions supplémentaires à ce système avec au plus des singularités logarithmiques à l'origine, les $G_{e,f,k}(\mathbf{z})+\log(z_k)F(\mathbf{z})$ pour $k\in\{1,\ldots,d\}$. Néanmoins, on peut se contenter de regarder $G_{e,f,k}(\mathbf{z})+\log(z_k)F(\mathbf{z})$ formellement sans s'attacher à une équation différentielle. Il arrive d'ailleurs que $G_{e,f,k}(\mathbf{z})+\log(z_k)F(\mathbf{z})$ ne soit pas solution de l'équation différentielle minimale de $F_{e,f}(\mathbf{z})$ et que l'intégralité des coefficients de Taylor des applications miroir correspondantes reste valable.

Dans le contexte de la symétrie miroir, cas où $|e|=|f|$, les d fonctions

$$q_{e,f,k}(\mathbf{z}) := z_k\exp(G_{e,f,k}(\mathbf{z})/F_{e,f}(\mathbf{z})),\ k\in\{1,\ldots,d\},$$

sont des *coordonnées canoniques*. L'inverse pour la composition de l'application

$$\mathbf{z}\mapsto(q_{e,f,1}(\mathbf{z}),\ldots,q_{e,f,d}(\mathbf{z}))$$

définit le vecteur $(z_{e,f,1}(\mathbf{q}),\ldots,z_{e,f,d}(\mathbf{q}))$ *d'applications miroir*. Lorsque $d=1$, il n'y a qu'une seule coordonnée canonique et qu'une seule application miroir que l'on note respectivement $q_{e,f}(z)$ et $z_{e,f}(q)$.

> *L'un des principaux résultats de cette thèse établit une condition nécessaire et suffisante pour l'intégralité des coefficients de Taylor des d applications miroir $z_{e,f,k}(\mathbf{q})$, c'est-à-dire détermine sous quelles conditions, pour tout $k\in\{1,\ldots,d\}$, on a $z_{e,f,k}(\mathbf{q})\in\mathbb{Z}[[\mathbf{q}]]$. Ce résultat est le théorème 1 énoncé dans la partie 2.2.*

Dans le contexte de théorie des nombres de cette thèse, l'application miroir $z_{e,f,k}(\mathbf{q})$ et la coordonnée canonique correspondante $q_{e,f,k}(\mathbf{z})$ jouent exactement le même rôle car, pour tout $k\in\{1,\ldots,d\}$, on a $q_{e,f,k}(\mathbf{z})\in z_k\mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$ si et seulement si, pour tout $k\in\{1,\ldots,d\}$, on a

[1] Les séries A-hypergéométriques sont aussi dénommées séries hypergéométriques GKZ. Voir [28] pour une introduction à ces séries, qui généralisent en plusieurs variables les séries hypergéométriques classiques.

$z_{e,f,k}(\mathbf{q}) \in q_k\mathbb{Z}[[\mathbf{q}]]$ (voir [17, Partie 1.2]). On formulera donc le critère pour les coordonnées canoniques uniquement mais il vaut aussi pour les applications miroir.

Ce critère s'applique aux suites e et f telles que $|e| = |f|$. Dans le cas où il existe $k \in \{1, \ldots, d\}$ tel que $|e|^{(k)} > |f|^{(k)}$, nous montrons que les coefficients de Taylor de $z_{e,f,k}(\mathbf{q})$ et $q_{e,f,k}(\mathbf{z})$ ne sont pas tous entiers, ce résultat est le théorème 3 énoncé dans la partie 2.2.

1.2 Motivations

Reprenons l'exemple présenté en introduction correspondant au choix des paramètres $d = 1$, $e = (2, 2)$ et $f = (1, 1, 1, 1)$. On a donc

$$F_{e,f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^2}{n!^4} z^n \in \mathbb{Z}[[z]].$$

Comme nous l'avons mentionné plus haut, l'application miroir $z_{e,f}(q)$ est d'origine modulaire et on a

$$z(q) = \frac{\theta_2^4(q)}{16\theta_3^4(q)} = q\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{4n})^8}{(1-(-q)^n)^8} \in \mathbb{Z}[[q]],$$

où $\theta_2(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}$ et $\theta_3(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$ sont des fonctions thêta de Jacobi.

Définissons l'application $\tilde{F}(q) := F_{e,f}(z_{e,f}(q))$. Comme les coefficients de Taylor de $F_{e,f}$ et $z_{e,f}$ sont entiers, ceux de $\tilde{F}$ le sont aussi. Plus précisément, d'après [2], on a

$$\tilde{F}(q) = \theta_3(q)^2.$$

L'intégralité et la faible croissance des coefficients de Taylor de $\tilde{F}$ permettent à André, dans [2], d'appliquer sa méthode d'uniformisation adélique simultanée et de redémontrer l'indépendance algébrique sur $\mathbb{Q}$ de π et $\Gamma(1/4)$, ou encore de π et $\Gamma(1/3)$ (résultat dû à Chudnovski en 1974), où Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Le critère que nous démontrons dans cette thèse permet de connaître de nombreuses nouvelles applications miroir dont les coefficients de Taylor sont entiers. En revanche, nous n'abordons pas la question de connaître la croissance de leurs coefficients. Cette question a récemment était abordée par Krattenthaler et Rivoal dans [18] où ils étudient en détail les rayons de convergence de $q_{e,f}(z)$ et $z_{e,f}(q)$ pour un certain type de suites e et f.

Une autre motivation est liée à l'exemple de Candelas, de la Ossa, Green et Parkes, associé à la famille $\mathcal{M}$ d'hypersurfaces quintiques de $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ définies par

$$\sum_{k=1}^{5} x_k^5 - 5z\prod_{k=1}^{5} x_k = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Dans [5], Candelas et al. associent à $\mathcal{M}$ sa famille miroir $\mathcal{W}$ de variétés de Calabi-Yau. On associe alors à $\mathcal{W}$ un vecteurs de périodes qui sont solutions de l'équation différentielle

$$\big(D^4 - 5z(5D+1)(5D+2)(5D+3)(5D+4)\big)y = 0, \text{ où } D = z\frac{d}{dz}. \tag{1.2.1}$$

Une solution holomorphe en 0 de (1.2.1) est la série hypergéométrique

$$F_{e,f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} z^n,$$

correspondant aux paramètres $e = (5)$ et $f = (1,1,1,1,1)$. Une deuxième solution de (1.2.1) linéairement indépendante de $F_{e,f}$ est $G_{e,f}(z) + \log(z) F_{e,f}(z)$, où $G_{e,f}(z)$ est la série définie par (1.1.1) :

$$G_{e,f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} \left(5H_{5n} - 5H_n\right) z^n.$$

Dans ce cas précis, l'*accouplement de Yukawa* $K(q)$ associé à cette construction s'exprime comme

$$K(q) = \frac{5}{1 - 5^5 z_{e,f}(q)} \cdot \frac{1}{F_{e,f}(z_{e,f}(q))^2} \cdot \left(\frac{q z'_{e,f}(q)}{z_{e,f}(q)}\right)^3 \in \mathbb{Q}[[q]]. \tag{1.2.2}$$

Écrivons $K(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$. On peut alors écrire $K(q)$ en série de Lambert

$$K(q) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{q^n}{1 - q^n},$$

avec $k_n = \sum_{d|n} \mu(n/d) a_d$ où μ est la fonction de Möbius. Nous renvoyons aux articles [5], [24], [25] et [29] pour l'intérêt géométrique porté à cette construction et aux nombres k_n qui sont liés aux invariants de Gromov–Witten.

D'après un résultat de Lian et Yau (voir partie 2.1), on sait que $z_{e,f}(q) \in q(1 + q\mathbb{Z}[[q]])$. De plus, comme $F_{e,f}(z) \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]]$, on obtient, d'après (1.2.2), que $K(q) \in \mathbb{Z}[[q]]$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a $k_n \in \mathbb{Z}$.

Dans un cadre plus général, on peut encore définir l'accouplement de Yukawa et les nombres k_n qui lui sont associés. Dans de nombreux cas listés dans [1], il a été observé que les nombres k_n semblent être entiers. Nous montrons dans la partie 10.2 que notre critère pour l'intégralité des applications miroir permet d'obtenir l'intégralité de nombreuses applications miroir de la liste [1]. Nous espérons que ce résultat puisse faciliter l'étude des propriétés arithmétiques des accouplements de Yukawa correspondants.

1.3 Structure de la thèse

Nos théorèmes sont indexés par des numéros alors que ceux d'autres auteurs sont indexés par des lettres capitales.

Dans le chapitre 2, nous énonçons les théorèmes 1, 2 et 3, principaux résultats de cette thèse, qui sont des critères pour l'intégralité des coefficients de Taylor à l'origine des applications miroir et de type miroir. De plus, nous présentons les résultats antérieurs sur l'intégralité de tels coefficients de Taylor et montrons qu'ils sont strictement contenus dans les théorèmes 1 et 2.

Le chapitre 3 traite de l'intégralité des coefficients de Taylor à l'origine de racines d'applications miroir et de type miroir d'une variable. Nous y énonçons les théorèmes 4 et 5 permettant, en particulier, de démontrer une conjecture de Zhou (conjecture 1 de [31]). Nous énonçons ensuite les résultats antérieurs et montrons que, pour une certaine classe d'applications miroir et de type miroir, ils améliorent les résultats obtenus par les théorèmes 4 et 5.

Dans le chapitre 4, nous caractérisons les fonctions hypergéométriques généralisées dont les coefficients peuvent se mettre sous forme de factorielles et on décrit les sauts des applications de Landau d'une variable sur $[0, 1]$, ce qui nous permet de conclure que, restreints au cas d'une variable, les théorèmes 1 et 2 sont effectifs.

Le chapitre 5 est consacré à l'énoncé et la démonstration du théorème 6, qui généralise des critères de congruences formelles de Dwork et de Krattenthaler et Rivoal (voir théorèmes J et K). Ces derniers étaient cruciaux pour les résultats antérieurs sur l'intégralité des coefficients de Taylor d'applications miroir. Le théorème 6 est au coeur de la preuve des théorèmes 1 et 2 puisque l'on montre dans la partie 5.1 que les théorèmes J et K ne suffisent pas pour démontrer le point (i) du théorème 2. De plus, à la fin de ce chapitre, nous énonçons et démontrons le théorème 7 qui est une généralisation alternative du théorème J dans le cas d'une variable.

Dans le chapitre 6, on ramène les théorèmes 1 à 5 à la preuve d'un énoncé p-adique.

Le chapitre 7 est consacré à la preuve des théorèmes 4 et 5 et de l'assertion (i) du théorème 2, ce qui est de loin la partie la plus longue et la plus technique de cette thèse. On doit en particulier démontrer un certain nombre d'estimations p-adiques fines afin d'être en position d'appliquer le théorème 6.

Dans le chapitre 8, nous démontrons le théorème 3 et l'assertion (ii) du théorème 2 qui découlent assez vite des reformulations de ces théorèmes établies dans le chapitre 6.

Le chapitre 9 est consacré à une démonstration alternative du cas (i) du théorème 2 restreint au cas d'une variable, à l'aide du théorème 7.

Dans le chapitre 10, nous présentons quelques résultats supplémentaires. La partie 10.1 est consacrée à la démonstration du point (ii) du critère de Landau dans le cas de plusieurs variables. Dans la partie 10.2, nous montrons que les théorèmes 1 et 2 permettent d'obtenir l'intégralité des coefficients de Taylor à l'origine de nouvelles applications miroir d'une variable, étant listées dans les tables d'équations de Calabi–Yau [1] d'Almkvist, van Enckevort, van Straten et Zudilin. La partie 10.3 est consacrée à l'étude de la positivité des coefficients de Taylor à l'origine d'applications miroir et de type miroir d'une variable inspirée par de récents travaux de Krattenthaler et Rivoal (voir [18]). Enfin, dans la partie 10.4, nous présentons un problème ouvert sur l'intégralité des coefficients de Taylor à l'origine d'applications miroir d'une forme plus générale que celle traitée dans cette thèse.

La plupart des résultats de cette thèse sont présentés dans nos trois articles [7], [8] et [9].

Chapitre 2

Intégralité des coefficients de Taylor des applications miroir

2.1 Résultats antérieurs

Dans la littérature, on peut distinguer trois résultats de généralité croissante établissant l'intégralité des coefficients de Taylor d'applications miroir d'une variable lorsque $|e| = |f|$.

Le premier résultat a été démontré par Lian et Yau dans [21], dans le cas où

$$\mathcal{Q}_{e,f}(n) = \frac{(pn)!}{(n!)^p},$$

où p est un nombre premier.

Ce résultat a été généralisé par Zudilin dans [32]. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $N = p_1^{a_1} \dots p_\ell^{a_\ell}$ sa décomposition en facteurs premiers. On note A_N et B_N les multi-ensembles ([1]) définis par

$$A_N := \left\{ N, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2}}, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3} p_{j_4}}, \dots \right\}_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots \leq \ell}$$

et

$$B_N := \left\{ 1, \dots, 1, \frac{N}{p_{j_1}}, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3}}, \dots \right\}_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots \leq \ell},$$

avec un nombre de 1 dans B_n égal à $\varphi(N)$, où φ est la fonction indicatrice d'Euler ([2]). Zudilin a montré que si e est une suite constituée des éléments du multi-ensemble $\bigcup_{i=1}^k A_{N_i}$ et si f est une suite constituée des éléments du multi-ensemble $\bigcup_{i=1}^k B_{N_i}$, où les N_i sont des entiers strictement positifs ayant le même ensemble de diviseurs premiers, alors l'application miroir associée à e et f a tous ses coefficients de Taylor entiers ([3]) (par construction

[1] Un multi-ensemble est un ensemble dans lequel on autorise les répétitions des éléments.

[2] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers k premiers avec n tels que $1 \leq k \leq n$.

[3] Le cas traité par Lian et Yau correspond au choix des paramètres $k = 1$ et $N_1 = p$ avec p premier.

$|e| = |f|$). Par exemple, on peut appliquer le théorème de Zudilin aux suites

$$\mathcal{Q}_{e,f}(n) = \frac{(4n)!}{(2n)!(n!)^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_{e,f}(n) = \frac{(12n)!}{(3n)!(4n)!(n!)^5},$$

respectivement attachées aux choix des paramètres $k = 1$, $N_1 = 4$ et $k = 2$, $N_1 = 6$, $N_2 = 12$.

Enfin, Krattenthaler et Rivoal ont démontré la conjecture de Zudilin énoncée p. 605 de [32], qui correspond à l'énoncé suivant.

Théorème A. *Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, et $N_1, \ldots, N_k$ des entiers strictement positifs. Soit e la suite constituée des éléments du multi-ensemble $\bigcup_{i=1}^{k} A_{N_i}$ et f la suite constituée des éléments du multi-ensemble $\bigcup_{i=1}^{k} B_{N_i}$. Alors l'application miroir associée à e et f a tous ses coefficients de Taylor entiers (par construction $|e| = |f|$).*

Nous allons reformuler le théorème A en portant les conditions sur la fonction $\Delta_{e,f}$ de Landau définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ ([4]), par

$$\Delta_{e,f}(x) := \sum_{i=1}^{q_1} \lfloor e_i x \rfloor - \sum_{j=1}^{q_2} \lfloor f_j x \rfloor,$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction partie entière. Il s'avère que le cas traité par le théorème A correspond exactemement aux suites e et f vérifiant $|e| = |f|$ et telles que $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0, 1[$ ([5]). On peut donc reformuler le théorème A comme suit.

Théorème A bis. *Soit e et f deux suites d'entiers positifs vérifiant $|e| = |f|$. Si $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0, 1[$, alors $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$.*

Dans le cas de plusieurs variables, Krattenthaler et Rivoal ont montré [17, Corollaire 1] l'intégralité des coefficients de Taylor d'applications miroir appartenant à de larges familles infinies. Afin d'énoncer ce résultat, pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$, on note $\mathbf{1}_k$ le vecteur de $\mathbb{N}^d$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la k-ième qui vaut 1.

Théorème B. *Soit e et f deux suites de vecteurs de $\mathbb{N}^d$ vérifiant $|e| = |f|$ et telles que f soit uniquement constituée de vecteurs de la forme $\mathbf{1}_k$ avec $k \in \{1, \ldots, d\}$. Alors, pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$, on a $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \in z_k\mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$.*

Si l'on restreint le théorème B au cas d'une variable, alors il est contenu strictement dans le théorème A. En effet, les suites e et f traitées par le théorème B sont celles qui vérifient $|e| = |f|$ et pour lesquelles il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $e = (N)$ et $f = (1, \ldots, 1)$, f étant éventuellement vide. Pour tout $x \in [0, 1[$, on obtient que

$$\Delta_{e,f}(x) = \lfloor Nx \rfloor - N\lfloor x \rfloor = \lfloor Nx \rfloor.$$

[4] Nous donnons une définition de la fonction de Landau en plusieurs variables dans la partie suivante.

[5] Voir la fin de la partie 4.2 pour une explication détaillée.

Donc $\Delta_{e,f}$ est bien croissante sur $[0,1[$.

Pour prouver les théorèmes A et B, Krattenthaler et Rivoal ont introduit des applications de *type miroir* dont l'intégralité des coefficients de Taylor implique celle des coefficients de Taylor des applications miroir associées. Plus précisément, pour toutes suites e et f de vecteurs de $\mathbb{N}^d$ et tout $\mathbf{L} \in \mathbb{N}^d$, on définit l'application de *type miroir* $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) := \exp(G_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z})/F_{e,f}(\mathbf{z}))$, où $G_{\mathbf{L},e,f}$ est la série formelle

$$G_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{n}\geq\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{n})!\cdots(\mathbf{e}_{q_1}\cdot\mathbf{n})!}{(\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{n})!\cdots(\mathbf{f}_{q_2}\cdot\mathbf{n})!} H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{z}^{\mathbf{n}}. \tag{2.1.1}$$

On note $\mathcal{E}_{e,f}$ l'ensemble des $\mathbf{L} \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ tels qu'il existe $\mathbf{d} \in \{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{q_1},\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_{q_2}\}$ vérifiant $\mathbf{L} \leq \mathbf{d}$. On a $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) \in 1 + \sum_{j=1}^{d} z_j\mathbb{Q}[[\mathbf{z}]]$ et

$$z_k^{-1}q_{e,f,k}(\mathbf{z}) = \left(\prod_{i=1}^{q_1}\left(q_{\mathbf{e}_i,e,f}(\mathbf{z})\right)^{\mathbf{e}_i^{(k)}}\right) / \left(\prod_{j=1}^{q_2}\left(q_{\mathbf{f}_j,e,f}(\mathbf{z})\right)^{\mathbf{f}_j^{(k)}}\right), \tag{2.1.2}$$

de sorte que si, pour tout $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{e,f}$, on a $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$, alors, pour tout $k \in \{1,\dots,d\}$, on a $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \in z_k\mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$. Ainsi, les théorèmes C (Théorème 2 de [17]) et D (Théorème 1 de [15]) impliquent respectivement les théorèmes B et A.

Théorème C. *Soit e et f deux suites de vecteurs de $\mathbb{N}^d$ vérifiant $|e| = |f|$ et telles que f soit uniquement constituée de vecteurs de la forme $\mathbf{1}_k$ avec $k \in \{1,\dots,d\}$. Alors, pour tout $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{e,f}$, on a $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$.*

Dans le cas d'une variable, si on note $M_{e,f}$ le plus grand élément des suites e et f, alors on a $\mathcal{E}_{e,f} = \{1,\dots,M_{e,f}\}$ et Krattenthaler et Rivoal ont obtenu le résultat suivant.

Théorème D. *Soit e et f deux suites d'entiers strictement positifs disjointes vérifiant $|e| = |f|$. Si $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0,1[$, alors, pour tout $L \in \{1,\dots,M_{e,f}\}$, on a $q_{L,e,f}(z) \in \mathbb{Z}[[z]]$.*

Comme précédemment, si l'on restreint le théorème C au cas d'une variable, alors il est strictement contenu dans le théorème D. Dans la partie suivante, on énonce deux critères qui généralisent les résultats des auteurs précédents.

2.2 Énoncés des critères

Avant d'énoncer les critères d'intégralité des coefficients de Taylor des $q_{e,f,k}(\mathbf{z})$ et $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z})$, nous rappelons la définition de *l'application de Landau* associée à un quotient de factorielles de formes linéaires. Étant données $e := (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{q_1})$ et $f := (\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_{q_2})$ deux suites de vecteurs de $\mathbb{N}^d$, on note $\Delta_{e,f}$ la fonction de Landau associée à $\mathcal{Q}_{e,f}$ définie, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, par

$$\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{q_1}\lfloor\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{x}\rfloor - \sum_{j=1}^{q_2}\lfloor\mathbf{f}_j\cdot\mathbf{x}\rfloor.$$

La fonction $\Delta_{e,f}$ joue un rôle important dans l'étude de l'intégralité des coefficients de Taylor des applications miroir car elle permet de calculer les valuations p-adiques des termes de la famille $\mathcal{Q}_{e,f}$. Précisément, pour tout premier p et tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, on a

$$v_p(\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{n})) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_{e,f}(\mathbf{n}/p^\ell).$$

En effet, on rappelle que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a la formule $v_p(m!) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \lfloor m/p^\ell \rfloor$. Ainsi, on obtient bien

$$\begin{aligned} v_p(\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{n})) &= v_p\left(\frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{e}_{q_1} \cdot \mathbf{n})!}{(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{f}_{q_2} \cdot \mathbf{n})!}\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{q_1} \lfloor \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}/p^\ell \rfloor - \sum_{j=1}^{q_2} \lfloor \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{n}/p^\ell \rfloor \right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_{e,f}\left(\frac{\mathbf{n}}{p^\ell}\right). \end{aligned}$$

Dans la suite, on note $\{\cdot\}$ la fonction partie fractionnaire. On note encore $\lfloor \cdot \rfloor$, respectivement $\{\cdot\}$, la fonction définie, pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, par $\lfloor \mathbf{x} \rfloor := (\lfloor x_1 \rfloor, \cdots, \lfloor x_d \rfloor)$, respectivement par $\{\mathbf{x}\} := (\{x_1\}, \cdots, \{x_d\})$. Pour tout $\mathbf{c} \in \mathbb{N}^d$, on a $\lfloor \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \rfloor = \lfloor \mathbf{c} \cdot \{\mathbf{x}\} \rfloor + \mathbf{c} \cdot \lfloor \mathbf{x} \rfloor$ et donc

$$\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) = \Delta(\{\mathbf{x}\}) + (|e| - |f|) \cdot \lfloor \mathbf{x} \rfloor.$$

Ainsi, on a $|e| = |f|$ si et seulement si $\Delta_{e,f}$ est 1-périodique en chacune de ses variables. On note $\mathcal{D}_{e,f}$ l'ensemble des $\mathbf{x} \in [0,1[^d$ tels qu'il existe $\mathbf{a} \in \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_{q_2}\}$ vérifiant $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \geq 1$. L'ensemble $\mathcal{D}_{e,f}$ est un polyèdre privé de certaines de ses faces. L'ensemble $[0,1[^d \backslash \mathcal{D}_{e,f}$ est non vide et la fonction $\Delta_{e,f}$ est nulle sur $[0,1[^d \backslash \mathcal{D}_{e,f}$. La proposition suivante montre que la fonction de Landau permet de caractériser les suites e et f telles que, pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, $\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{n})$ est entier.

Critère de Landau. *Soit e et f deux suites de vecteurs de $\mathbb{N}^d$. On a la dichotomie suivante.*

(*i*) *Si, pour tout $\mathbf{x} \in [0,1]^d$, on a $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) \geq 0$, alors, pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, on a $\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{n}) \in \mathbb{N}$.*

(*ii*) *S'il existe $\mathbf{x} \in [0,1]^d$ tel que $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) \leq -1$, alors il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p tels que tous les termes de la famille $\mathcal{Q}_{e,f}$ soient dans l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques.*

Remarque. Le point (*i*) est dû à Landau : il montre que c'est en fait une condition nécessaire et suffisante dans [20]. Dans le cas où $d = 1$, Bober démontre le point (*ii*) dans [4]. Nous démontrons le point (*ii*) du critère de Landau sans restriction sur d dans la partie 10.1.

Le principal but de cette thèse est de démontrer les théorèmes suivants, qui caractérisent complètement les applications miroir en plusieurs variables, associées à des quotients entiers de factorielles de formes linéaires et qui ont tous leur coefficients de Taylor entiers à l'origine. Nous montrons dans la partie 2.3 qu'ils contiennent les résultats des auteurs précédents.

On s'intéresse dans un premier temps au cas $|e| = |f|$, puis on énonce les résultats lorsqu'il existe $k \in \{1, \ldots, d\}$ tel que $|e|^{(k)} > |f|^{(k)}$. Lorsqu'il existe $k \in \{1, \ldots, d\}$ tel que $|e|^{(k)} < |f|^{(k)}$, la famille $\mathcal{Q}_{e,f}$ n'a pas tous ces termes entiers et la question de l'intégralité des coefficients de Taylor des $q_{e,f,k}(\mathbf{z})$ reste ouverte.

Théorème 1. *Soit e et f deux suites de vecteurs non nuls de $\mathbb{N}^d$ disjointes telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une famille à termes entiers (ce qui équivaut à $\Delta_{e,f} \geq 0$ sur $[0,1]^d$) et vérifiant $|e| = |f|$. On a alors la dichotomie suivante.*

(i) Si, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$, on a $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) \geq 1$, alors, pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$, on a $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \in z_k\mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$.

(ii) S'il existe $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$ tel que $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) = 0$, alors il existe $k \in \{1, \ldots, d\}$ tel qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p tels que $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \in z_k\mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$.

Remarques.
- On remarquera l'analogie entre le critère de Landau et le théorème 1.
- On impose que les éléments des suites e et f soient non nuls et que ces suites soient disjointes pour écarter le cas où $\Delta_{e,f}$ est identiquement nulle qui correspond aux séries formelles $F_{e,f}(\mathbf{z}) = (1-z_1)^{-1}\cdots(1-z_d)^{-1}$, $G_{e,f,k}(\mathbf{z}) = 0$ et $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) = z_k$.
- Le point (ii) du théorème 1 est optimal dans le sens où, si $\Delta_{e,f}$ s'annule sur $\mathcal{D}_{e,f}$ et si $d \geq 2$, alors il peut exister $k \in \{1, \ldots, d\}$ tel que $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \in z_k\mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$. En effet, il suffit de faire le choix des paramètres $d = 2$, $e = ((3,0))$ et $f = ((2,0),(1,0))$. On a alors $\mathcal{D}_{e,f} = \{(x_1, x_2) \in [0,1[^2 : x_1 \geq 1/3\}$, $\Delta_{e,f}((1/2,0)) = 0$ et $q_{e,f,2}(\mathbf{z}) = z_2$.

Nous allons maintenant énoncer un critère pour l'intégralité des applications de type miroir $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z})$. D'après l'identité (2.1.2), le point (i) du théorème 2 implique le point (i) du théorème 1. Le point (ii) du théorème 2 précise le point (ii) du théorème 1. En particulier, il montre qu'il existe $k \in \{1, \ldots, d\}$ tel que $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \notin z_k\mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$ et que toutes les applications de type miroir intervenant effectivement dans l'identité (2.1.2) n'ont pas tous leurs coefficients de Taylor entiers. Le théorème 1 peut donc être vu comme un corollaire du théorème 2.

Théorème 2. *Soit e et f deux suites de vecteurs non nuls de $\mathbb{N}^d$ disjointes telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une famille à termes entiers (ce qui équivaut à $\Delta_{e,f} \geq 0$ sur $[0,1]^d$) et vérifiant $|e| = |f|$. On a alors la dichotomie suivante.*

(i) Si, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$, on a $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) \geq 1$, alors, pour tout $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{e,f}$, on a $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$.

(ii) S'il existe $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$ tel que $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) = 0$, alors il existe $k \in \{1, \ldots, d\}$ tel que, si $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{e,f}$ vérifie $\mathbf{L}^{(k)} \geq 1$, alors il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p tels que $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$. De plus, il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p tels que $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \in z_k\mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$.

Dans le cas où il existe $k \in \{1, \ldots, d\}$ tel que $|e|^{(k)} > |f|^{(k)}$, on dispose du théorème suivant.

Théorème 3. *Soit e et f deux suites de vecteurs non nuls de $\mathbb{N}^d$ disjointes telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une famille à termes entiers (ce qui équivaut à $\Delta_{e,f} \geq 0$ sur $[0,1]^d$) et telles qu'il existe $k \in \{1, \ldots, d\}$ vérifiant $|e|^{(k)} > |f|^{(k)}$. Alors,*

(*a*) *il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p tels que $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \in z_k\mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$;*
(*b*) *pour tout $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{e,f}$ vérifiant $\mathbf{L}^{(k)} \geq 1$, il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p tels que $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$.*

Dans le cas d'une seule variable, e et f sont deux suites d'entiers naturels non nuls disjointes et les ensembles $\mathcal{D}_{e,f}$ et $\mathcal{E}_{e,f}$ s'expriment simplement. En notant $M_{e,f}$ le plus grand élément des suites e et f, on a $\mathcal{D}_{e,f} = [1/M_{e,f}, 1[$ et $\mathcal{E}_{e,f} = \{1, \ldots, M_{e,f}\}$. Le théorème 1 restreint au cas $d = 1$ s'énonce alors comme suit.

Corollaire 1 (Critère pour les applications miroir en une variable)**.** *Soit e et f deux suites d'entiers strictement positifs disjointes telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une suite à termes entiers (ce qui équivaut à $\Delta_{e,f} \geq 0$ sur $[0, 1]$) et vérifiant $|e| = |f|$. On a alors la dichotomie suivante.*
(*i*) *Si, pour tout $x \in [1/M_{e,f}, 1[$, on a $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$, alors $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$.*
(*ii*) *S'il existe $x \in [1/M_{e,f}, 1[$ tel que $\Delta_{e,f}(x) = 0$, alors il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p tels que $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]]$.*

Toujours dans le cas d'une variable, le point (*ii*) du théorème 2 se reformule lui aussi plus simplement. En effet, pour tout $L \in \{1, \ldots, M_{e,f}\}$, on a $L^{(1)} = L \geq 1$. De plus, le fait que $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]]$ seulement pour un nombre fini de premiers p est déjà donné par le point (*ii*) du théorème 1. Lorsque $d = 1$, on peut omettre cette conclusion et le théorème 2 se reformule comme suit.

Corollaire 2 (Critère pour les applications de type miroir en une variable)**.** *Soit e et f deux suites d'entiers strictement positifs disjointes telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une suite à termes entiers (ce qui équivaut à $\Delta_{e,f} \geq 0$ sur $[0, 1]$) et vérifiant $|e| = |f|$. On a alors la dichotomie suivante.*
(*i*) *Si, pour tout $x \in [1/M_{e,f}, 1[$, on a $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$, alors, pour tout $L \in \{1, \ldots, M_{e,f}\}$, on a $q_{L,e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$.*
(*ii*) *S'il existe $x \in [1/M_{e,f}, 1[$ tel que $\Delta_{e,f}(x) = 0$, alors, pour tout $L \in \{1, \ldots, M_{e,f}\}$, il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p tels que $q_{L,e,f}(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]]$.*

Nous montrons dans le chapitre 4 que les critères pour les applications miroir et de type miroir en une variable sont effectifs au sens suivant. Étant données deux suites e et f d'entiers strictement positifs, on peut déterminer les valeurs de $\Delta_{e,f}$ sur $[0, 1]$ en un nombre fini de calculs algébriques. De plus, nous montrons dans la partie 10.3 que si e et f sont deux suites d'entiers strictement positifs disjointes telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une suite à termes entiers, alors les coefficients de Taylor de $q_{e,f}(z)$ et $q_{L,e,f}(z)$ sont strictement positifs (à l'exception du terme constant de $q_{e,f}(z)$ qui est nul).

Le théorème 3 restreint au cas d'une variable s'énonce aussi plus simplement.

Corollaire 3 (Cas $|e| > |f|$ en une variable)**.** *Soit e et f deux suites d'entiers positifs non nuls disjointes telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une suite à termes entiers (ce qui équivaut à $\Delta_{e,f} \geq 0$ sur $[0, 1]$) et telles que $|e| > |f|$. Alors,*
(*a*) *il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p tels que $q_{e,f,1}(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]]$;*
(*b*) *pour tout $L \in \{1, \ldots, M_{e,f}\}$, il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p tels que $q_{L,e,f}(z) \in \mathbb{Z}_p[[z]]$.*

2.3 Comparaison des théorèmes 1 et 2 avec les résultats antérieurs

Dans un premier temps, nous montrons que les théorèmes 1 et 2 généralisent les théorèmes B et C. Il nous suffit de montrer que, si e et f sont deux suites disjointes de vecteurs non nuls de $\mathbb{N}^d$ vérifiant $|e| = |f|$ et telles que f soit uniquement constituée de vecteurs de la forme $\mathbf{1}_k$ avec $k \in \{1, \dots, d\}$, alors, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$, on a $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) \geq 1$. En effet, si $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$, alors $\mathbf{x} \in [0,1[^d$ et, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, on a $\mathbf{1}_k \cdot \mathbf{x} < 1$. Ainsi, il existe un élement $\mathbf{d}$ de e tel que $\mathbf{d} \cdot \mathbf{x} \geq 1$ et on a bien

$$\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{q_1} \lfloor \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} \rfloor - \sum_{j=1}^{q_2} \lfloor \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{x} \rfloor = \sum_{i=1}^{q_1} \lfloor \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} \rfloor \geq 1.$$

Montrons maintenant que les théorèmes 1 et 2 généralisent les théorèmes A et D en dehors du cas trivial où $\Delta_{e,f}$ est identiquement nulle. Soit e et f deux suites d'entiers strictement positifs telles que $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0,1[$ et non identiquement nulle. Le fait d'enlever un élément en commun aux suites e et f ne change pas la coordonnée canonique $q_{e,f}(z)$. Ainsi, quitte à réduire les suites e et f, on peut supposer que ces suites sont disjointes et non simultanément vides car $\Delta_{e,f}$ n'est pas identiquement nulle. Notons $M_{e,f}$ le plus grand élément de e et f. On a alors $\Delta_{e,f}(1/M_{e,f}) \geq 1$ ou $\Delta_{e,f}(1/M_{e,f}) \leq -1$. Comme $\Delta_{e,f}(0) = 0$ et $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0,1[$, on obtient que $\Delta_{e,f}(1/M_{e,f}) \geq 1$. La croissance de $\Delta_{e,f}$ implique donc que $\Delta_{e,f} \geq 1$ sur $[1/M_{e,f}, 1[= \mathcal{D}_{e,f}$ et les théorèmes 1 et 2 donnent bien que $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[z]$ et $q_{L,e,f}(z) \in \mathbb{Z}[z]$ pour tout $L \in \{1, \dots, M_{e,f}\}$.

Chapitre 3

Intégralité des coefficients de Taylor de racines d'applications miroir

Dans tout ce chapitre on se restreint au cas d'une variable.

3.1 Énoncés des résultats

Nous raffinons notre critère pour les applications de type miroir en une variable, ce qui nous permet d'obtenir, dans certains cas, l'intégralité des coefficients de Taylor de racines d'applications miroir et de type miroir. En particulier, nous démontrons une conjecture faite par Zhou dans [31] et nous vérifions en partie une observation faite par Krattenthaler et Rivoal dans [15].

Dans ce chapitre, nous énonçons uniquement des résultats d'intégralité pour les coefficients de Taylor de racines de coordonnées canoniques. Ils valent tout autant pour les racines d'applications miroir puisque, pour tout $v \in \mathbb{N}$, $v \geq 1$, on a $(q^{-1}z_{e,f}(q))^{1/v} \in \mathbb{Z}[[q]]$ si, et seulement si $(z^{-1}q_{e,f}(z))^{1/v} \in \mathbb{Z}[[z]]$, voir l'introduction de [22].

Pour espérer qu'une racine de $z^{-1}q_{e,f}(z)$ ou qu'une racine d'une des $q_{L,e,f}(z)$ ait tous ses coefficients de Taylor entiers, les critères d'intégralité pour les coefficients de Taylor des applications miroir et de type miroir montrent qu'il faut que, pour tout $x \in [1/M_{e,f}, 1[$, on ait $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$. Avant d'énoncer nos résultats sur l'intégralité des coefficients de Taylor de racines d'applications miroir ou de type miroir, nous donnons une précision sur les éventuels $v \in \mathbb{N}$, $v \geq 1$, vérifiant $(z^{-1}q_{e,f}(z))^{1/v} \in \mathbb{Z}[[z]]$ ou $q_{L,e,f}(z)^{1/v} \in \mathbb{Z}[[z]]$. Soit $q(z) \in \mathbb{Z}[[z]]$ et V le plus grand entier naturel tel que $q(z)^{1/V} \in \mathbb{Z}[[z]]$. Le lemme 5 de [12] donne que les entiers naturels U tels que $q(z)^{1/U} \in \mathbb{Z}[[z]]$ sont exactement les diviseurs positifs de V.

Dans la suite de cette thèse, si e et f sont deux suites d'entiers positifs, alors, pour tout élément L de e et f, on note D_L le plus petit multiple commun des entiers allant de 1 à $\lfloor M_{e,f}/L \rfloor$. Le théorème suivant raffine le point (i) du théorème 2.

Théorème 4. *Soit e et f deux suites disjointes d'entiers strictement positifs vérifiant $|e| = |f|$ et telles que, pour tout $x \in [1/M_{e,f}, 1[$, on a $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$. Alors, pour tout*

$L \in \{1, \dots, M_{e,f}\}$, on a

$$q_{L,e,f}(z)^{1/D_L} \in \mathbb{Z}[[z]].$$

Le théorème 4 permet, dans certains cas, d'obtenir l'intégralité des coefficients de Taylor de racines d'applications miroir. Dans la suite, pour tous a et b entiers, on note $\mathrm{pgcd}(a, b)$ le plus grand diviseur commun de a et b.

Théorème 5. *Soit e et f deux suites d'entiers strictement positifs disjointes vérifiant $|e| = |f|$ et telles que, pour tout $x \in [1/M_{e,f}, 1[$, on a $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$. Soit $\theta \geq 1$ un diviseur de $M_{e,f}$. Si, pour tout élément L de e et f, l'entier $\theta/\mathrm{pgcd}(L, \theta)$ divise D_L, alors on a*

$$(z^{-1} q_{e,f}(z))^{1/\theta} \in \mathbb{Z}[[z]].$$

Dans la partie 3.2, nous montrons que les théorèmes 4 et 5 ne sont pas optimaux dans le sens où il existe des suites e et f pour lesquelles ces théorèmes ne donnent pas les entiers maximaux V et V_L tels que $(z^{-1} q_{e,f}(z))^{1/V} \in \mathbb{Z}[[z]]$ et $q_{L,e,f}(z)^{1/V_L} \in \mathbb{Z}[[z]]$.

Nous donnons maintenant une certaine classe de suites e et f pour lesquelles on peut appliquer le théorème 5 avec $M_{e,f}$ à la place de θ. En particulier, nous démontrons la conjecture de Zhou [31, Conjecture 1] qui s'énonce comme suit :

> *Soient $k_1, \dots, k_n$ des entiers strictement positifs vérifiant $\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} = 1$. Soit k le plus petit multiple commun de $k_1, \dots, k_n$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $w_i := k/k_i$. Alors, en notant $e := (k)$ et $f := (w_1, \dots, w_n)$, on a*
>
> $$(z^{-1} q_{e,f}(z))^{1/k} \in \mathbb{Z}[[z]]. \tag{3.1.1}$$

Corollaire 4. *Soit e et f deux suites d'entiers strictement positifs disjointes vérifiant $|e| = |f|$ telles que, pour tout $x \in [1/M_{e,f}, 1[$, on a $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$ et telles que tout élément de e et f divise $M_{e,f}$. Alors, on a*

$$(z^{-1} q_{e,f}(z))^{1/M_{e,f}} \in \mathbb{Z}[[z]].$$

En particulier, la conjecture de Zhou est vraie.

Démonstration. Montrons que le théorème 5 implique le corollaire 4. Soit e et f deux suites d'entiers strictement positifs disjointes vérifiant $|e| = |f|$ telles que, pour tout $x \in [1/M_{e,f}, 1[$, on a $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$ et telles que tout élément de e et f divise $M_{e,f}$. Nous allons appliquer le théorème 5 avec $\theta = M_{e,f}$. Pour tout élément L de e et f, on a $\lfloor M_{e,f}/L \rfloor = M_{e,f}/L$ donc $M_{e,f}/L$ divise D_L. Ainsi $\theta/\mathrm{pgcd}(L, \theta) = M_{e,f}/\mathrm{pgcd}(L, M_{e,f}) = M_{e,f}/L$ divise D_L et on a bien

$$(z^{-1} q_{e,f}(z))^{1/M_{e,f}} \in \mathbb{Z}[[z]]. \tag{3.1.2}$$

Démontrons maintenant la conjecture de Zhou. Soient $k_1, \dots, k_n$ des entiers strictement positifs vérifiant $\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} = 1$. Soit k le plus petit multiple commun de $k_1, \dots, k_n$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $w_i := k/k_i$. En notant $e := (k)$ et $f := (w_1, \dots, w_n)$, on obtient que $|e| - |f| = k - \sum_{i=1}^{n} w_i = 0$. De plus, Zhou montre dans la partie 2 de [31] que, pour tout $x \in [1/k, 1[$, on a $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$. Enfin, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, w_i divise k. On peut donc appliquer (3.1.2) qui donne bien (3.1.1) puisque $M_{e,f} = k$. Ce qui termine la preuve du corollaire 4. □

Dans la partie 3.2, nous remarquons que les résultats antérieurs connus sur l'intégralité des coefficients de Taylor de racines d'applications miroir ou de type miroir s'appliquent uniquement à des suites e et f telles que $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0,1[$ et 1-périodique. Nous montrons sur un exemple que les suites e et f traitées par la conjecture de Zhou ne définissent pas forcément une application $\Delta_{e,f}$ croissante sur $[0,1[$.

En effet, prenons $k_1 = 3$, $k_2 = k_3 = 4$ et $k_4 = 6$, on obtient $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_4} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = 1$. On a $k = 12$, $w_1 = 4$, $w_2 = w_3 = 3$ et $w_4 = 2$. Ainsi, $\Delta_{e,f}(1/4) = 3 - 1 = 2$ et $\Delta_{e,f}(1/3) = 4 - 1 - 2 = 1$ donc $\Delta_{e,f}$ n'est pas croissante sur $[0,1[$.

3.2 Résultats antérieurs et comparaison avec les théorèmes 4 et 5

Dans cette partie, nous énonçons les résultats antérieurs donnant l'intégralité des coefficients de Taylor de racines d'applications miroir et de type miroir. À la suite de chaque énoncé, nous comparons le résultat correspondant avec les thèorèmes 4 et 5.

Le premier résultat sur l'intégralité des coefficients de Taylor de racines d'applications miroir est dû à Lian et Yau et s'énonce comme suit.

Théorème E (Lian, Yau, [23]). *Soit p un nombre premier, $e = (p)$ et $f = (1, \dots, 1)$ avec $|e| = |f|$. Alors, on a*

$$(z^{-1} q_{e,f}(z))^{1/p} \in \mathbb{Z}[[z]].$$

Ce théorème est contenu dans le corollaire 4. Krattenthaler et Rivoal se sont intéressés, dans [15] puis dans [16], à l'intégralité des coefficients de Taylor de racines d'applications miroir et de type miroir associées à des suites e et f d'une forme particulière. Leurs quatre théorèmes, énoncés plus bas, donnent toujours un meilleur exposant que celui que l'on obtient en appliquant les théorèmes 4 et 5. Nous énonçons leurs résultats par généralité décroissante relativement à la forme des suites e et f. Le premier résultat (cf. [15, Remarque (b), p. 181]) peut se reformuler comme suit.

Théorème F (Krattenthaler, Rivoal, [15]). *Soit e et f deux suites d'entiers positifs vérifiant $|e| = |f|$. Si $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0,1[$, alors le plus grand entier naturel V tel que $q_{1,e,f}(z)^{1/V} \in \mathbb{Z}[[z]]$ est $\mathcal{Q}_{e,f}(1)$.*

Le théorème F est optimal et donne donc un meilleur exposant que celui fourni par le théorème 4 pour $q_{1,e,f}(z)$. En revanche, le théorème 4 permet d'obtenir l'intégralité des coefficients de Taylor de racines des applications de type miroir $q_{L,e,f}(z)$ avec $L \neq 1$.

Par exemple, en prenant $e = (6)$ et $f = (3,2,1)$, on obtient que $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0,1[$ et que $\mathcal{Q}_{e,f}(1) = 6!/(3!2!) = 60$. D'après le théorème précédent, on obtient que $q_{1,e,f}(z)^{1/60} \in \mathbb{Z}[[z]]$. Krattenthaler et Rivoal remarquent dans [15] qu'il semblerait que les relations suivantes soient les meilleures possibles :

$$q_{2,e,f}(z)^{1/6},\ q_{3,e,f}(z)^{1/2},\ q_{4,e,f}(z),\ q_{5,e,f}(z),\ q_{6,e,f}(z) \in \mathbb{Z}[[z]]. \tag{3.2.1}$$

En appliquant le théorème 4 avec $e = (6)$ et $f = (3, 2, 1)$, on obtient bien (3.2.1). De plus, en appliquant le corollaire 4 avec $e = (6)$ et $f = (3, 2, 1)$, on obtient que $(z^{-1}q_{e,f}(z))^{1/6} \in \mathbb{Z}[[z]]$.

Dans le cas particulier où $f_1 = \cdots = f_{q_2} = 1$ ([1]), Krattenthaler et Rivoal montrent l'intégralité des coefficients de Taylor de racines d'applications de type miroir $q_{L,e,f}$ pour tout L dans $\{1, \ldots, M_{e,f}\}$, l'exposant donné dans le cas où $L = 1$ est l'exposant maximal $\mathcal{Q}_{e,f}(1)$.

Théorème G (Krattenthaler, Rivoal, [15]). *Soit e et $f := (1, \ldots, 1)$ deux suites d'entiers positifs vérifiant $|e| = |f|$. Soit $\Theta_L := L!/\mathrm{pgcd}(L!, L!H_L)$ le dénominateur de H_L écrit comme une fraction irréductible. Alors, pour tout $L \in \{1, \ldots, M_{e,f}\}$, on a*

$$q_{L,e,f}(z)^{\Theta_L/\mathcal{Q}_{e,f}(1)} \in \mathbb{Z}[[z]].$$

On remarque que, pour tout $L \in \{1, \ldots, M_{e,f}\}$, on a $\mathcal{Q}_{e,f}(1)/\Theta_L \in \mathbb{N}$. En effet, pour tout $L \in \{1, \ldots, M_{e,f}\}$, Θ_L divise $L!$ qui divise $e_1! \cdots e_{q_1}! = \mathcal{Q}_{e,f}(1)$.

Montrons que l'exposant donné par ce théorème est meilleur que celui que l'on obtient avec le théorème 4 *i.e.* que, pour tout $L \in \{1, \ldots, M_{e,f}\}$, D_L divise $\mathcal{Q}_{e,f}(1)/\Theta_L$.

En effet, soit p un nombre premier et $\alpha := v_p(D_L)$. On a alors $p^\alpha \leq \lfloor M_{e,f}/L \rfloor$, donc $M_{e,f} \geq Lp^\alpha$ et on obtient bien que p^α divise $M_{e,f}!/L!$ qui divise $M_{e,f}!/\Theta_L$ qui enfin divise $\mathcal{Q}_{e,f}(1)/\Theta_L$.

Dans le cas où $e_1 = \cdots = e_{q_1} =: N \geq 2$ et $f_1 = \cdots = f_{q_2} = 1$, Krattenthaler et Rivoal améliorent l'exposant obtenu *via* le théorème précédent pour $L = N$, c'est le théorème 1 de [16] qui s'énonce comme suit.

Théorème H (Krattenthaler, Rivoal, [16]). *Soit $N \geq 2$ un entier. Soit $e := (N, \ldots, N)$ et $f := (1, \ldots, 1)$ vérifiant $|e| = |f|$. Soit*

$$\Xi_N := \prod_{p \leq N} p^{\min\{2+\xi(p,N), v_p(H_N)\}},$$

où $\xi(p, N) = 1$ si p est un nombre premier de Wolstenholme ([2]) ou si p divise N, et $\xi(p, N) = 0$ sinon. Alors, on a

$$q_{N,e,f}(z)^{\frac{1}{\Xi_N \mathcal{Q}_{e,f}(1)}} \in \mathbb{Z}[[z]].$$

On remarque que Ξ_N n'est pas forcément un entier mais que $\Xi_N \mathcal{Q}_{e,f}(1)$ en est un. En effet, si on regroupe, dans la définition de Ξ_N, les premiers p pour lesquels on a $v_p(H_N) \leq -1$, on obtient que $\Xi_N = w_N/\Theta_N$ où $w_N \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a $\Xi_N \mathcal{Q}_{e,f}(1) = \mathcal{Q}_{e,f}(1)w_N/\Theta_N$ avec, comme on l'a vu précédemment, $\mathcal{Q}_{e,f}(1)/\Theta_N \in \mathbb{N}$. En particulier, on voit que ce

[1] Dans ce cas, $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0, 1[$ car, pour tout $x \in [0, 1[$, $\Delta_{e,f}(x) = \sum_{i=1}^{q_1} \lfloor e_i x \rfloor$.

[2] Un nombre premier de Wolstenholme est un premier p qui vérifie $v_p(H_{p-1}) \geq 3$. Actuellement, les seuls premiers de Wolstenholme connus sont 16843 et 2124679, et on ne sait pas si l'ensemble des premiers de Wolstenholme est fini ou infini.

théorème améliore le théorème précédent d'un facteur w_N lorsque $e = (N, \dots, N)$ et $L = N$. L'exposant donné par le théorème H pour $q_{N,e,f}(z)$ est donc meilleur que celui donné par le théorème 4.

Il est conjecturé dans [16] que le théorème H est optimal lorsque $e = (N)$, *i.e.* que dans ce cas, le plus grand entier V_N tel que $q_{N,e,f}(z)^{1/V_N} \in \mathbb{Z}[[z]]$ est $V_N = \Xi_N \mathcal{Q}_{e,f}(1) = \Xi_N N!$. Il est expliqué, toujours dans [16], que cette conjecture est impliquée par la conjecture sur les nombres harmoniques suivante : il n'existe pas de premier p et d'entier $N \geq 1$ tels que $v_p(H_N) \geq 4$.

Toujours dans le cas où $e_1 = \cdots = e_{q_1} = N \geq 2$ et $f_1 = \cdots = f_{q_2} = 1$, le théorème 2 de [16] donne l'intégralité des coefficients de Taylor de racines d'applications miroir :

Théorème I (Krattenthaler, Rivoal, [16])**.** *Soit $N \geq 2$ un entier. Soit $e = (N, \dots, N)$ avec q_1 occurences de N, et $f = (1, \dots, 1)$ vérifiant $|e| = |f|$. Soit*

$$\Omega_N := \prod_{p \leq N} p^{\min\{2+\omega(p,N), v_p(H_N-1)\}},$$

où $\omega(p, N) = 1$ si p est un nombre premier de Wolstenholme ou si $N \equiv \pm 1 \mod p$, et $\omega(p, N) = 0$ sinon. Alors, on a

$$(z^{-1} q_{e,f}(z))^{\frac{1}{\Omega_N \mathcal{Q}_{e,f}(1) q_1 N}} \in \mathbb{Z}[[z]].$$

On remarque que Ω_N n'est pas forcément un entier mais que $\Omega_N \mathcal{Q}_{e,f}(1)$ en est un. En effet, si on regroupe, dans la définition de Ω_N, les premiers p pour lesquels on a $v_p(H_N - 1) \leq -1$, on obtient que $\Omega_N = m_N/\Theta_N$, où $m_N \in \mathbb{N}$, car H_N et $H_N - 1$ ont le même dénominateur, une fois écrits sous formes irréductibles. Ainsi, on a $\Omega_N \mathcal{Q}_{e,f}(1) = \mathcal{Q}_{e,f}(1) m_N/\Theta_N$ avec, comme on l'a vu précédemment, $\mathcal{Q}_{e,f}(1)/\Theta_N \in \mathbb{N}$.

En particulier, on voit que dans le cas où $e = (N, \dots, N)$ et $f = (1, \dots, 1)$, l'exposant donné par ce théorème est nettement meilleur que l'exposant θ obtenu par le théorème 5 puisque θ est un diviseur de $M_{e,f} = N$.

Il est conjecturé dans [16] que le théorème I est optimal lorsque $e = (N)$, *i.e.* que dans ce cas, le plus grand entier V_N tel que $(z^{-1} q_{e,f}(z))^{1/V_N} \in \mathbb{Z}[[z]]$ est $V_N = \Omega_N \mathcal{Q}_{e,f}(1) N = \Omega_N N! N$. Il est expliqué, toujours dans [16], que cette conjecture est impliquée par la conjecture sur les nombres harmoniques suivante : il n'existe pas de premier p et d'entier $N \geq 2$ tels que $v_p(H_N - 1) \geq 4$.

Chapitre 4

Résultats hypergéométriques dans le cas d'une variable

Le but de cette partie est de caractériser les séries hypergéométriques généralisées dont les coefficients peuvent se mettre sous forme factorielle. Cela nous permet de décrire les sauts de l'application de Landau sur $[0,1]$ et de montrer que l'on peut déterminer le graphe de $\Delta_{e,f}$ sur $[0,1]$ en un nombre fini de calculs algébriques élémentaires. Ainsi, nous en déduisons que les théorèmes 1 et 2 restreints au cas d'une variable sont effectifs. Nous montrons à la fin de cette partie que, si $|e| = |f|$, alors $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0,1[$ si et seulement si l'équation différentielle fuchsienne associée à $F_{e,f}$ a tous ses exposants égaux à 0 à l'origine. Sauf mention contraire, les résultats suivants valent aussi pour $|e| \neq |f|$.

4.1 Séries hypergéométriques définies par des quotients de factorielles

Soit e et f deux suites d'entiers positifs. La série formelle $F_{e,f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}_{e,f}(n) z^n$ est une série hypergéométrique (voir [4, Lemma 4.1, p. 431]). Nous allons caractériser les suites $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{C}^r$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_s) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0})^s$ telles qu'il existe une constante $C > 0$ et deux suites d'entiers positifs e et f vérifiant

$$ {}_rF_s\left(\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_r \\ \beta_1, \ldots, \beta_s \end{matrix} ; Cz \right) := \sum_{n=0}^{\infty} C^n \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_s)_n} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e_1 n)! \cdots (e_{q_1} n)!}{(f_1 n)! \cdots (f_{q_2} n)!} z^n = F_{e,f}(z), \tag{4.1.1} $$

où $(x)_n := x(x+1)\cdots(x+n-1)$ pour $n \geq 1$ et $(x)_0 = 1$ (symbole de Pochhammer). Nous allons avoir besoin du résultat d'unicité suivant.

Proposition 1. *Soit C et C' deux constantes strictement positives, $\alpha_1, ..., \alpha_r$, $\alpha'_1, ..., \alpha'_{r'}$, $\beta_1, ..., \beta_s$ et $\beta'_1, ..., \beta'_{s'}$ des complexes où aucun des β_j ni aucun des β'_j n'est un entier négatif tels que, pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, r\} \times \{1, \ldots, s\}$, on ait $\alpha_i \neq \beta_j$, et, pour tout $(i,j) \in$*

$\{1,\dots,r'\}\times\{1,\dots,s'\}$, *on ait* $\alpha'_i\neq\beta'_j$. *Si, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *on a*

$$C^n\frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_r)_n}{n!(\beta_1)_n\cdots(\beta_s)_n}=C'^n\frac{(\alpha'_1)_n\cdots(\alpha'_{r'})_n}{n!(\beta'_1)_n\cdots(\beta'_{s'})_n},\tag{4.1.2}$$

alors on a $C=C'$, $r=r'$, $s=s'$ *et il existe une permutation* $\sigma\in S_r$ *et une permutation* $\tau\in S_s$ *telles que, pour tout* $i\in\{1,\dots,r\}$, *on ait* $\alpha_i=\alpha'_{\sigma(i)}$ *et, pour tout* $j\in\{1,\dots,s\}$, *on ait* $\beta_j=\beta'_{\tau(j)}$.

Démonstration. Soit un entier $i\geq 1$. En divisant l'identité (4.1.2) avec $n=i+1$ par celle avec $n=i$ on obtient, pour tout i dans $\mathbb{N}$, $i\geq 1$, que

$$C\frac{(\alpha_1+i)\cdots(\alpha_r+i)}{(\beta_1+i)\cdots(\beta_s+i)}=C'\frac{(\alpha'_1+i)\cdots(\alpha'_{r'}+i)}{(\beta'_1+i)\cdots(\beta'_{s'}+i)}.$$

Ainsi, les deux fractions rationnelles

$$P(X):=C\frac{(\alpha_1+X)\cdots(\alpha_r+X)}{(\beta_1+X)\cdots(\beta_s+X)}$$

et

$$Q(X):=C'\frac{(\alpha'_1+X)\cdots(\alpha'_{r'}+X)}{(\beta'_1+X)\cdots(\beta'_{s'}+X)}$$

sont égales. Elles ont donc les mêmes racines avec mêmes multiplicités et les mêmes pôles avec mêmes ordres. D'où le résultat. □

Afin de caractériser la forme des suites $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ et $(\beta_1,\dots,\beta_s)$ vérifiant (4.1.1), on définit un certain type de partition d'un multi-ensemble.

Définition. Pour $N\in\mathbb{N}$, $N\geq 1$, on note $R_N:=\{w/N\ :\ 1\leq w\leq N,\ (w,N)=1\}$. On dira qu'un multi-ensemble $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ de réels est R-partitionné selon le multi-ensemble $\{N_1,\dots,N_k\}$ s'il existe des entiers strictement positifs $N_1,\dots,N_k$ et une partition $E_1,\dots,E_k$ de $\{1,\dots,r\}$ tels que, pour tout $j\in\{1,\dots,k\}$, le cardinal de E_j est $\varphi(N_j)$ et $\{\alpha_i\ :\ i\in E_j\}=R_{N_j}$.

Par exemple, le multi-ensemble $\{1/3,1/2,1/2,2/3\}$ est R-partitionné selon le multi-ensemble $\{2,2,3\}$.

Si N est un entier non nul, on note

$$C_N:=N^{\varphi(N)}\prod_{p|N}p^{\frac{\varphi(N)}{p-1}}\in\mathbb{N}.$$

Si α est une suite R-partitionnée selon $(N_1,\dots,N_k)$, on note $C_\alpha:=C_{N_1}\cdots C_{N_k}$. Si α et β sont deux suites R-partitionnées, on note $C_{\alpha,\beta}:=C_\alpha/C_\beta$. On note Q l'ensemble des suites de la forme

$$\mathcal{Q}_{e,f}(n):=\frac{(e_1n)!\cdots(e_{q_1}n)!}{(f_1n)!\cdots(f_{q_2}n)!},$$

où $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, $q_1\, q_2 \neq 0$, $e_1, \ldots, e_{q_1}, f_1, \ldots, f_{q_2} \in \mathbb{N}$. On note P l'ensemble des suites de la forme

$$\mathcal{P}_{\alpha,\beta}(n) := C^n_{\alpha,\beta} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_r)_n}{n!(\beta_1)_n \cdots (\beta_s)_n},$$

où $r, s \in \mathbb{N}$, $rs \neq 0$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ sont deux suites R-partitionnées.

Proposition 2. *On a $P = Q$ et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$C^n_{\alpha,\beta} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_r)_n}{n!(\beta_1)_n \cdots (\beta_s)_n} = \frac{(e_1 n)! \cdots (e_{q_1} n)!}{(f_1 n)! \cdots (f_{q_2} n)!},$$

alors

$$C_{\alpha,\beta} = \frac{e_1^{e_1} \cdots e_{q_1}^{e_{q_1}}}{f_1^{f_1} \cdots f_{q_2}^{f_{q_2}}} \quad \text{et} \quad r - s - 1 = |e| - |f|.$$

Cette proposition caractérise complètement les fonctions hypergéométriques dont les coefficients peuvent se mettre sous forme de quotients de factorielles. Pour démontrer la proposition 2, on va utiliser un lemme dû à Zudilin ([32, Lemma 4, p. 609]).

Lemme 1 (Zudilin)**.** *Soit $N \geq 2$ un entier. On écrit $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_\ell^{a_\ell}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$C^n_N \frac{\prod_{\alpha \in R_N} (\alpha)_n}{(n!)^{\varphi(N)}} = \frac{(e_1 n)! \cdots (e_{q_1} n)!}{(f_1 n)! \cdots (f_{q_2} n)!},$$

où

$$\{e_i\}_{i=1,\ldots,q_1} = \left\{ N, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2}}, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3} p_{j_4}}, \ldots \right\}_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots \leq \ell},$$

$$\{f_j\}_{j=1,\ldots,q_2} = \left\{ 1, \ldots, 1, \frac{N}{p_{j_1}}, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3}}, \ldots \right\}_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots \leq \ell}$$

et de plus, $|e| = |f|$.

Démonstration de la proposition 2. Montrons que $P \subset Q$.

Soit $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ et $\beta := (\beta_1, \ldots, \beta_s)$ deux suites R-partitionnées respectivement selon $(N_1, \ldots, N_k)$ et $(N'_1, \ldots, N'_{k'})$. Quitte à réordonner les suites $(N_1, \ldots, N_k)$ et $(N'_1, \ldots, N'_{k'})$, on peut supposer qu'il existe $k_0 \in \{0, \ldots, k\}$ et $k'_0 \in \{0, \ldots, k'\}$ tels que, pour tout $i \in \{1, \ldots, k_0\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, k'_0\}$, on ait $N_i \geq 2$ et $N'_j \geq 2$, et, pour tout $i \in \{k_0 + 1, \ldots, k\}$ et tout $j \in \{k'_0 + 1, \ldots, k'\}$, on ait $N_i = 1$ et $N'_j = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut alors écrire

$$\frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_r)_n}{n!(\beta_1)_n \ldots (\beta_s)_n} = \frac{\prod_{i=1}^{k_0} \prod_{\alpha \in R_{N_i}} (\alpha)_n}{\prod_{j=1}^{k'_0} \prod_{\beta \in R_{N'_j}} (\beta)_n} (1)_n^{k - k_0 - (k' - k'_0) - 1}. \tag{4.1.3}$$

On a

$$C_{\alpha,\beta} = \frac{\prod_{i=1}^{k} C_{N_i}}{\prod_{j=1}^{k'} C_{N'_j}} = \frac{\prod_{i=1}^{k_0} C_{N_i}}{\prod_{j=1}^{k'_0} C_{N'_j}},$$

car $C_1 = 1$. Ainsi, en multipliant (4.1.3) par $C^n_{\alpha,\beta}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$C^n_{\alpha,\beta}\frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_r)_n}{n!(\beta_1)_n \cdots (\beta_s)_n} =$$
$$\left(\prod_{i=1}^{k_0} C^n_{N_i}\frac{\prod_{\alpha\in R_{N_i}}(\alpha)_n}{(n!)^{\varphi(N_i)}}\right)\left(\prod_{j=1}^{k'_0}\frac{1}{C^n_{N'_j}}\frac{(n!)^{\varphi(N'_j)}}{\prod_{\beta\in R_{N'_j}}(\beta)_n}\right)(n!)^{\sum_{i=1}^{k_0}\varphi(N_i)-\sum_{j=1}^{k'_0}\varphi(N'_j)}(1)_n^{k-k_0-(k'-k'_0)-1}.$$

On a

$$(1)_n^{k-k_0-(k'-k'_0)-1} = n!^{k-k_0-(k'-k'_0)-1} = n!^{\sum_{i=k_0+1}^{k}\varphi(N_i)-\sum_{j=k'_0+1}^{k'}\varphi(N'_j)-1},$$

car, pour tout $i \in \{k_0+1,\dots,k\}$ et tout $j \in \{k'_0+1,\dots,k'\}$, on a $\varphi(N_i) = \varphi(N'_j) = \varphi(1) = 1$. Ainsi, d'après le lemme 1, il existe des entiers strictement positifs $e_1,\dots,e_{q_1}, f_1,\dots,f_{q_2}$ tels que

$$C^n_{\alpha,\beta}\frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_r)_n}{n!(\beta_1)_n \cdots (\beta_s)_n} = \frac{(e_1 n)! \cdots (e_{q_1} n)!}{(f_1 n)! \cdots (f_{q_2} n)!}(n!)^{\sum_{i=1}^{k}\varphi(N_i)-\sum_{j=1}^{k'}\varphi(N'_j)-1}.$$

D'où le fait que $P \subset Q$.

Montrons l'inclusion inverse $Q \subset P$. Pour tout $\ell \in \{1,\dots,e_1\}$, on a

$$\left(\frac{\ell}{e_1}\right)_n = \frac{\ell}{e_1}\left(\frac{\ell}{e_1}+1\right)\cdots\left(\frac{\ell}{e_1}+n-1\right) = \frac{\ell}{e_1}\frac{\ell+e_1}{e_1}\cdots\frac{\ell+(n-1)e_1}{e_1}. \tag{4.1.4}$$

Les numérateurs de (4.1.4) correspondent aux nombres dans $\{1,\dots,ne_1\}$ qui sont congrus à ℓ modulo e_1. Ainsi, si $e_1 \geq 2$, alors on a

$$(e_1 n)! = \left(\frac{1}{e_1}\right)_n\left(\frac{2}{e_1}\right)_n\cdots\left(\frac{e_1}{e_1}\right)_n e_1^{e_1 n} = \left(\frac{1}{e_1}\right)_n\cdots\left(\frac{e_1-1}{e_1}\right)_n (1)_n\,(e_1^{e_1})^n$$

et si $e_1 = 1$, alors on a simplement $n! = (1)_n$. On peut donc écrire

$$\frac{(e_1 n)! \cdots (e_{q_1} n)!}{(f_1 n)! \cdots (f_{q_2} n)!} = C^n\frac{\prod_{\substack{1\leq i\leq q_1\\ e_i\geq 2}}\left(\left(\frac{1}{e_i}\right)_n\cdots\left(\frac{e_i-1}{e_i}\right)_n\right)}{n!\prod_{\substack{1\leq j\leq q_2\\ f_j\geq 2}}\left(\left(\frac{1}{f_j}\right)_n\cdots\left(\frac{f_j-1}{f_j}\right)_n\right)}(1)_n^{q_1-q_2+1}, \tag{4.1.5}$$

où

$$C := \frac{e_1^{e_1}\cdots e_{q_1}^{e_{q_1}}}{f_1^{f_1}\cdots f_{q_2}^{f_{q_2}}}.$$

On a donc $r-s-1 = \sum_{i=1}^{q_1}(e_i-1) - \sum_{j=1}^{q_2}(f_j-1) + q_1 - q_2 + 1 - 1 = |e| - |f|$.

Si $e_1 \geq 2$, alors on a

$$\left\{\frac{1}{e_1}, \dots, \frac{e_1-1}{e_1}\right\} = \bigcup_{d|e_1,\, d\geq 2} R_d. \tag{4.1.6}$$

En effet, notons $e_1 = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ la décomposition en facteurs premiers de e_1. On a

$$\{1, \dots, e_1 - 1\} = \bigcup_{\substack{0\leq b_1\leq a_1,\dots,0\leq b_s\leq a_s \\ (b_1,\dots,b_s)\neq(a_1,\dots,a_s)}} \left\{p_1^{b_1}\cdots p_s^{b_s} r \ : \ (r, p_1\cdots p_s) = 1, 1 \leq r < p_1^{a_1-b_1}\cdots p_s^{a_s-b_s}\right\}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{1}{e_1}, \dots, \frac{e_1-1}{e_1}\right\} \\
&\qquad = \bigcup_{\substack{0\leq b_1\leq a_1,\dots,0\leq b_s\leq a_s \\ (b_1,\dots,b_s)\neq(a_1,\dots,a_s)}} \left\{\frac{r}{p_1^{a_1-b_1}\cdots p_s^{a_s-b_s}} \ : \ (r, p_1\cdots p_s) = 1, r < p_1^{a_1-b_1}\cdots p_s^{a_s-b_s}\right\} \\
&\qquad = \bigcup_{d|e_1,\, d\geq 2} R_d.
\end{aligned}$$

En utilisant l'identité (4.1.6) dans (4.1.5), on obtient

$$\frac{(e_1 n)!\cdots(e_{q_1} n)!}{(f_1 n)!\cdots(f_{q_2} n)!} = C^n \frac{\prod_{i=1}^{q_1}\prod_{\substack{d|e_i \\ d\geq 2}}\prod_{\alpha\in R_d}(\alpha)_n}{n!\prod_{j=1}^{q_2}\prod_{\substack{d|f_j \\ d\geq 2}}\prod_{\beta\in R_d}(\beta)_n}\left(\prod_{\gamma\in R_1}(\gamma)_n\right)^{q_1-q_2+1},$$

où ici $\prod_{\gamma\in R_1}(\gamma)_n = (1)_n$. Si $q_1 - q_2 + 1$ est positif alors on regroupe le produit des γ avec celui des α au numérateur, et si $q_1 - q_2 + 1$ est négatif alors on regroupe le produit des γ avec celui des β au dénominateur. On indexe les α et β afin d'obtenir l'écriture

$$\frac{(e_1 n)!\cdots(e_{q_1} n)!}{(f_1 n)!\cdots(f_{q_2} n)!} = C^n \frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_r)_n}{n!(\beta_1)_n\cdots(\beta_s)_n}, \tag{4.1.7}$$

où les suites $\alpha := (\alpha_i)_{i=1,\dots,r}$ et $\beta := (\beta_j)_{j=1,\dots,s}$ sont R-partitionnées.

Il ne reste plus qu'à montrer que $C = C_{\alpha,\beta}$. Comme $P \subset Q$, il existe des entiers strictement positifs $e'_1, \dots, e'_{q'_1}, f'_1, \dots, f'_{q'_2}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$C_{\alpha,\beta}^n \frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_r)_n}{n!(\beta_1)_n\cdots(\beta_s)_n} = \frac{(e'_1 n)!\cdots(e'_{q'_1} n)!}{(f'_1 n)!\cdots(f'_{q'_2} n)!}. \tag{4.1.8}$$

En divisant le terme de gauche de l'égalité (4.1.7) par le terme de droite de l'égalité (4.1.8), on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que

$$\frac{(e_1 n)!\cdots(e_{q_1} n)!(f'_1 n)!\cdots(f'_{q'_2} n)!}{(f_1 n)!\cdots(f_{q_2} n)!(e'_1 n)!\cdots(e'_{q'_1} n)!} = \left(\frac{C}{C_{\alpha,\beta}}\right)^n. \tag{4.1.9}$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que C soit différent de $C_{\alpha,\beta}$. Il existe deux suites d'entiers strictement positifs disjointes $(c_1,\dots,c_k)$ et $(d_1,\dots,d_\ell)$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\frac{(e_1 n)!\cdots(e_{q_1} n)!(f_1' n)!\cdots(f_{q_2'}' n)!}{(f_1 n)!\cdots(f_{q_2} n)!(e_1' n)!\cdots(e_{q_1'}' n)!} = \frac{(c_1 n)!\cdots(c_k n)!}{(d_1 n)!\cdots(d_\ell n)!}.$$

Comme $C/C_{\alpha,\beta} \neq 1$ et d'après l'identité (4.1.9), $(c_1,\dots,c_k)$ et $(d_1,\dots,d_\ell)$ ne peuvent être simultanément vides. Soit $M := \max(c_1,\dots,c_k,d_1,\dots,d_\ell)$. D'après (4.1.5) et par unicité de l'écriture sous forme de coefficients hypergéométriques (proposition 1), le symbole de Pochhammer $(1/M)_n$ devrait apparaître dans le terme de droite de l'égalité (4.1.9), mais ce n'est pas le cas. D'où la contradiction. □

4.2 Description des sauts de l'application Δ de Landau

Dans cette partie, nous montrons que les abscisses et les amplitudes des sauts effectués par $\Delta_{e,f}$ sur $[0,1]$ apparaissent naturellement dans la réécriture de $\mathcal{Q}_{e,f}$ sous la forme $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$. En particulier, cela nous permet d'établir que les théorèmes 1 et 2 restreints au cas d'une variable sont effectifs.

Proposition 3. *Soit e et f deux suites finies d'entiers strictement positifs. On peut écrire de manière unique la suite $\mathcal{Q}_{e,f}$ sous la forme*

$$\mathcal{Q}_{e,f}(n) = C^n(\gamma_1)_n^{m_1}\dots(\gamma_t)_n^{m_t},\ n \geq 0, \tag{4.2.1}$$

où C est une constante strictement positive, $0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_t \leq 1$ sont des rationnels et les $m_1,\dots,m_t$ sont dans $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Les sauts de $\Delta_{e,f}$ sur $[0,1]$ se font aux abscisses $\gamma_1,\dots,\gamma_t$ avec m_i pour amplitude (positive ou négative) en γ_i.

Démonstration. On écrit $e := (e_1,\dots,e_{q_1})$ et $f := (f_1,\dots,f_{q_2})$. L'existence et l'unicité de l'écriture (4.2.1) découlent respectivement des propositions 2 et 1 de la partie 4.1. Étudions les sauts de la fonction $\Delta_{e,f}$.

Si $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 1$, alors la fonction $[0,1] \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto \lfloor cx \rfloor$ effectue un saut d'amplitude 1 en $\frac{1}{c}, \frac{2}{c}, \dots, \frac{c-1}{c}$ et 1. D'après (4.1.5), pour tout $n \geq 0$, on a

$$\mathcal{Q}_{e,f}(n) = C^n \frac{\left(\frac{1}{e_1}\right)_n \cdots \left(\frac{e_1-1}{e_1}\right)_n \cdots \left(\frac{1}{e_{q_1}}\right)_n \cdots \left(\frac{e_{q_1}-1}{e_{q_1}}\right)_n}{\left(\frac{1}{f_1}\right)_n \cdots \left(\frac{f_1-1}{f_1}\right)_n \cdots \left(\frac{1}{f_{q_2}}\right)_n \cdots \left(\frac{f_{q_2}-1}{f_{q_2}}\right)_n} (1)_n^{q_1-q_2}.$$

Ainsi, en simplifiant le quotient et en regroupant les symboles de Pochhammer identiques, on obtient l'écriture $\mathcal{Q}_{e,f}(n) = C^n(\gamma_1)_n^{m_1}\dots(\gamma_t)_n^{m_t}$, $n \geq 0$, où les $\gamma_1 < \cdots < \gamma_t$ correspondent effectivement aux abscisses des sauts de $\Delta_{e,f}$ et les m_i, $1 \leq i \leq t$, à leur amplitude. □

Remarque. Des résultats analogues à ceux de la proposition 3 sont mentionnés dans [26] par Rodriguez-Villegas puis précisés dans [4] par Bober.

La preuve de la proposition 3 montre que l'on peut déterminer algébriquement les sauts de $\Delta_{e,f}$ sur $[0,1]$ et que les théorèmes 1 et 2 restreints au cas d'une variable sont effectifs. En effet, étant données deux suites e et f d'entiers strictement positifs disjointes vérifiant $|e| = |f|$, on obtient la suite $m_1, \ldots, m_t$ des amplitudes des sauts de $\Delta_{e,f}$ sur $[0,1]$. On a alors $\Delta_{e,f} \geq 1$ sur $[1/M_{e,f}, 1[$ si, et seulement si, pour tout $i \in \{1, \ldots, t-1\}$, on a $\sum_{k=1}^{i} m_k \geq 1$. Ainsi, d'après les théorèmes 1 et 2, un nombre fini de calculs algébriques permet de déterminer si les applications miroir et de type miroir ont tous leurs coefficients de Taylor à l'origine entiers.

Dans le cas de plusieurs variables, il semble vraisemblable que les théorèmes 1 et 2 restent effectifs. Toutefois, pour déterminer le graphe de $\Delta_{e,f}$ sur $\mathcal{D}_{e,f}$ en un nombre fini de calculs algébriques, il faut connaître un nombre fini suffisant de points de $\mathcal{D}_{e,f}$ où évaluer $\Delta_{e,f}$. Nous n'avons pas résolu ce problème combinatoire.

Nous montrons maintenant que certaines propriétés analytiques de $\Delta_{e,f}$ donnent des renseignements sur l'équation différentielle vérifiée par $F_{e,f}$.

Supposons que $|e| = |f|$ et que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait $\Delta_{e,f}(x) \geq 0$. Alors, comme $\Delta_{e,f}(0) = \Delta_{e,f}(\gamma_t) = 0$, γ_1 correspond à un saut d'amplitude positive et γ_t correspond à un saut d'amplitude négative. On remarque grâce à l'identité (4.1.5) que $\gamma_1 = 1/M_{e,f}$ et $\gamma_t = (M_{e,f}-1)/M_{e,f}$ ou 1. Or γ_1 correspond à un saut d'amplitude positive donc $M_{e,f} = \max(e_1, \ldots, e_{q_1}) := M_e$ et $\gamma_t = 1$ car $(M_e-1)/M_e$ correspond aussi à l'abscisse d'un saut d'amplitude positive. En particulier, $(M_e-1)/M_e = \gamma_{t-1}$. De plus, on a $m_t = q_1 - q_2$ et $\Delta_{e,f}(1) = 0$ donc, pour tout $x \in [(M_e-1)/M_e, 1[$, on a $\Delta_{e,f}(x) = q_2 - q_1 \geq 1$. En résumé, on a $\gamma_1 = 1/M_e$, $\gamma_{t-1} = (M_e-1)/M_e$, $\gamma_t = 1$ et, pour tout $x \in [(M_e-1)/M_e, 1[$, on a $\Delta_{e,f}(x) = q_2 - q_1 \geq 1$.

Supposons de plus que, pour tout $x \in [1/M_e, 1[$, on ait $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$. On sait alors que $(M_e-1)/M_e$ correspond à l'abscisse d'un saut d'amplitude positive.

Si $M_e \geq 3$, alors on a $(M_e-1)/M_e > 1/M_e$ et, pour tout $x \in [1/M_e; (M_e-1)/M_e[$ on a $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$, donc pour tout $x \in [(M_e-1)/M_e, 1[$ on a $\Delta_{e,f}(x) \geq 2$. Ainsi $m_t \leq -2$, ce qui signifie que dans l'écriture des coefficients hypergéométriques sous la forme

$$C^n_{\alpha,\beta} \frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_r)_n}{(1)_n (\beta_1)_n \ldots (\beta_{r-1})_n},$$

au moins un des β_i est égal à 1. Ceci implique que l'équation différentielle fuchsienne associée à $F_{e,f}$ admet une solution de type logarithmique à l'origine $G_{e,f}(z) + \log(z) F_{e,f}(z)$, où $G_{e,f}$ est définie par l'identité (1.1.1) donnée dans la partie 1.1.

Si $M_e = 2$, alors $\mathcal{Q}_{e,f}(n)$ est de la forme

$$\mathcal{Q}_{e,f}(n) = \frac{(2n)!^j}{n!^{2j}} = \left(2^{2j}\right)^n \frac{(1/2)^j_n}{(1)^j_n},$$

où $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$. Ainsi le seul couple de suites (e,f) dont l'équation différentielle hypergéométrique associée n'admet pas de solution de type logarithmique à l'origine correspond au cas $j = 1$.

Nous montrons maintenant que si e et f sont deux suites d'entiers strictement positifs disjointes vérifiant $|e| = |f|$, alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0,1[$.

(ii) Il existe des entiers strictement positifs $N_1, \ldots, N_k$ tels que e est constituée des éléments du multi-ensemble $\bigcup_{i=1}^{k} A_{N_i}$ et f est constituée des éléments du multi-ensemble $\bigcup_{i=1}^{k} B_{N_i}$, où les multi-ensembles A_{N_i} et B_{N_i} sont définis comme dans la partie 2.1.

(iii) L'équation différentielle fuchsienne associée à $F_{e,f}$ a tous ses exposants égaux à 0 à l'origine.

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ les suites telles que $\mathcal{Q}_{e,f} = \mathcal{P}_{\alpha,\beta}$.

Si $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0,1[$ alors $\beta_1 = \cdots = \beta_s = 1$ et l'équation différentielle fuchsienne associée à $F_{e,f}$ a donc tous ses exposants égaux à 0 à l'origine (voir [30]). Ainsi, on a (i) $\Rightarrow$ (iii). De plus, comme α est R-partitionnée, il existe des entiers strictement positifs $N_1, \ldots, N_k$ tels que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} = \bigcup_{i=1}^{k} R_{N_i}$. Ainsi, d'après le lemme 1, on obtient bien (i) $\Rightarrow$ (ii).

Réciproquement, s'il existe des entiers strictement positifs $N_1, \ldots, N_k$ tels que e est constituée des éléments du multi-ensemble $\bigcup_{i=1}^{k} A_{N_i}$ et f est constituée des éléments du multi-ensemble $\bigcup_{i=1}^{k} B_{N_i}$ alors le lemme 1 montre que $\beta_1 = \cdots = \beta_s = 1$. On a donc bien ($i$) $\Leftrightarrow$ (ii).

Si l'équation différentielle fuchsienne associée à $F_{\mathbf{e},\mathbf{f}}$ a tous ses exposants égaux à 0 à l'origine, alors $\beta_1 = \cdots = \beta_s = 1$ et $\Delta_{\mathbf{e},\mathbf{f}}$ est croissante sur $[0,1[$. On obtient bien (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

Chapitre 5

Congruences formelles

Les preuves du théorème 4 et de l'assertion (i) du théorème 2 sont basées essentiellement sur une généralisation d'un théorème de Krattenthaler et Rivoal [17, Theorem 1, p. 3] qui est une version en plusieurs variables d'un théorème de Dwork [10, Theorem 1, p. 296] sur des congruences formelles entre séries formelles. Ce chapitre est consacré à l'énoncé et à la démonstration de cette généralisation.

5.1 Énoncé des résultats antérieurs

La stratégie utilisée par Lian, Yau, Zudilin, Krattenthaler et Rivoal pour démontrer l'intégralité des coefficients de Taylor d'applications miroir et de type miroir d'une variable consiste dans un premier temps à effectuer une réduction p-adique. On remarque que si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x \in \mathbb{Z}$ si, et seulement si, pour tout premier p, on a $x \in \mathbb{Z}_p$. Notons a_n le n-ième coefficient de Taylor à l'origine de l'application miroir $q_{e,f}(z)$ et fixons un premier p. Un lemme classique de Dieudonné et Dwork permet « d'éliminer » l'exponentielle dans l'expression de $q_{e,f}(z)$ et de ramener la preuve de $a_n \in \mathbb{Z}_p$ à celle de $b_n \in p\mathbb{Z}_p$, où b_n est une expression plus simple que a_n.

Après quelques efforts, les auteurs précédents parviennent à réécrire, modulo $p\mathbb{Z}_p$, les coefficients b_n comme une somme de termes de la forme $S(a, K, s, p, m)\delta(s, p, m)$ dépendant de paramètres $K, s, m \in \mathbb{N}$ et $a \in \{0, \ldots, p-1\}$. L'intérêt de cette décomposition est que $S(a, K, s, p, m)\delta(s, p, m) \in p\mathbb{Z}_p$, ce qui reste néanmoins le plus dur à montrer. Cette décomposition est inspirée de l'article [10] de Dwork où il utilise cette méthode pour démontrer des propriétés arithmétiques d'exponentielles de quotients de solutions de certaines équations différentielles hypergéométriques.

Dans le cas de plusieurs variables, Kratthenthaler et Rivoal ont aussi utilisé, dans [17], le fait que la preuve de l'intégralité des coefficients de Taylor des applications miroir ou de type miroir se ramène à la preuve de $S(\mathbf{a}, \mathbf{K}, s, p, \mathbf{m})\delta(s, p, \mathbf{m}) \in p\mathbb{Z}_p$, où $S(\mathbf{a}, \mathbf{K}, s, p, \mathbf{m})$ et $\delta(s, p, \mathbf{m})$ sont respectivement les analogues « naturels » de $S(a, K, s, p, m)$ et $\delta(s, p, m)$ dans le cas de plusieurs variables.

Pour démontrer le point (i) du théorème 2, cas où $\Delta_{e,f} \geq 1$ sur $\mathcal{D}_{e,f}$, nous nous ramenons

aussi à montrer que $S(\mathbf{a},\mathbf{K},s,p,\mathbf{m})\delta(s,p,\mathbf{m}) \in p\mathbb{Z}_p$. Ainsi, la décomposition inspirée par Dwork est toujours « la bonne » même pour la classe la plus large d'applications miroir définies par des factorielles et dont les coefficients de Taylor sont entiers.

La stratégie utilisée pour démontrer que $S(\mathbf{a},\mathbf{K},s,p,\mathbf{m})\delta(s,p,\mathbf{m}) \in p\mathbb{Z}_p$ est d'introduire une fonction $g_p(\mathbf{m})$ telle que

$$p^{s+1}g_p(\mathbf{m})\delta(s,p,\mathbf{m}) \in p\mathbb{Z}_p \tag{5.1.1}$$

et

$$S(\mathbf{a},\mathbf{K},s,p,\mathbf{m}) \in p^{s+1}g_p(\mathbf{m})\mathbb{Z}_p. \tag{5.1.2}$$

L'appartenance (5.1.1) est relativement simple à démontrer, alors que la preuve de (5.1.2) est assez technique. Afin de définir précisément le terme $S(\mathbf{a},\mathbf{K},s,p,\mathbf{m})$, nous introduisons quelques notations supplémentaires. Soit $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \in \{1,\dots,d\}$ et des vecteurs $\mathbf{m} := (m_1,\dots,m_d)$ et $\mathbf{n} := (n_1,\dots,n_d)$ dans $\mathbb{R}^d$, on note $\mathbf{m}+\mathbf{n}$ pour $(m_1+n_1,\dots,m_d+n_d)$, $\lambda\mathbf{m}$ ou $\mathbf{m}\lambda$ pour $(\lambda m_1,\dots,\lambda m_d)$, et $\mathbf{m}/\lambda$ pour $(m_1/\lambda,\dots,m_d/\lambda)$ lorsque λ est non nul. On note $\mathbf{1} := (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^d$. Dans tout ce chapitre, on fixe un premier p et on note Ω le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de Ω.

Soit e et f deux suites de vecteurs de $\mathbb{N}^d$. Pour tout $\mathbf{a} \in \{0,\dots,p-1\}^d$, tout $\mathbf{K} \in \mathbb{Z}^d$, tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$ et tout $s \in \mathbf{N}$, on définit

$$S(\mathbf{a},\mathbf{K},s,p,\mathbf{m}) := \sum_{\mathbf{m}p^s \leq \mathbf{j} \leq (\mathbf{m}+\mathbf{1})p^s-\mathbf{1}} \big(\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{a}+p(\mathbf{K}-\mathbf{j}))\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{j}) - \mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)\big),$$

où l'on pose $\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{n}) = 0$ s'il existe $i \in \{1,\dots,d\}$ tel que $n_i < 0$.

Pour démontrer (5.1.2) dans le cas d'une variable, Lian, Yau, Zudilin, Krattenthaler et Rivoal appliquent le théorème J suivant (Théorème 1 de [10]) avec pour $(\mathbf{A}_r)_{r\geq 0}$ la suite constante de valeur $\mathcal{Q}_{e,f}$.

Théorème J (Critère de Dwork)**.** *Soit $(\mathbf{A}_r)_{r\geq 0}$ une suite d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\Omega\setminus\{0\}$ et $(\mathbf{g}_r)_{r\geq 0}$ une suite d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{O}\setminus\{0\}$. On suppose que, pour tout $r \geq 0$, on a*

(i) $|\mathbf{A}_r(0)|_p = 1$;

(ii) pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{A}_r(m) \in \mathbf{g}_r(m)\mathcal{O}$;

(iii) pour tous $s,m \in \mathbb{N}$, tout $u \in \{0,\dots,p^s-1\}$ et tout $v \in \{0,\dots,p-1\}$, on a

$$\frac{\mathbf{A}_r(v+up+mp^{s+1})}{\mathbf{A}_r(v+up)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(u+mp^s)}{\mathbf{A}_{r+1}(u)} \in p^{s+1}\frac{\mathbf{g}_{r+s+1}(m)}{\mathbf{g}_r(v+up)}\mathcal{O};$$

Alors, pour tout $a \in \{0,\dots,p-1\}$, tous $m,s,r \in \mathbb{N}$ et tout $K \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mathbf{S}_r(a,K,s,p,m) := \sum_{j=mp^s}^{(m+1)p^s-1} \big(\mathbf{A}_r(a+p(K-j))\mathbf{A}_{r+1}(j) - \mathbf{A}_{r+1}(K-j)\mathbf{A}_r(a+jp)\big) \in p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O},$$

où l'on pose $\mathbf{A}_r(n) = 0$ si $n < 0$.

D'après les formes spécifiques des suites e et f étudiées par Lian, Yau et Zudilin dans [21] et [32], la congruence (5.1.1) est vérifiée en prenant $g_p(m) = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. En particulier, ces auteurs utilisent le théorème J avec la fonction constante de valeur 1 à la place de $\mathbf{g}_r$, *i.e.* la fonction de valuation p-adique minimale autorisée par le théorème J. En revanche, dans [17], Krattenthaler et Rivoal utilisent le théorème J avec $\mathbf{g}_r = \mathcal{Q}_{e,f}$ qui est, d'après le point (ii) de ce critère, la fonction $\mathbf{g}_r$ de valuation p-adique maximale.

Pour démontrer les théorèmes B et C, Krattenthaler et Rivoal ont démontré une version du théorème J en plusieurs variables (Théorème 1 de [17]).

Théorème K. *Soit A une application de $\mathbb{N}^d$ dans $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ et g une application de $\mathbb{N}^d$ dans $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ vérifiant les trois propriétés :*

(i) $|A(\mathbf{0})|_p = 1$;

(ii) pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, on a $A(\mathbf{m}) \in g(\mathbf{m})\mathbb{Z}_p$;

(iii) pour tout $s \in \mathbb{N}$, tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, tout $\mathbf{u} \in \{0, \dots, p^s-1\}^d$ et tout $\mathbf{v} \in \{0, \dots, p-1\}^d$, on a

$$\frac{A(\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{A(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)} - \frac{A(\mathbf{u}+\mathbf{m}p^s)}{A(\mathbf{u})} \in p^{s+1}\frac{g(\mathbf{m})}{g(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)}\mathbb{Z}_p;$$

Alors, pour tout $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p-1\}^d$, tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, tout $s \in \mathbb{N}$ et tout $\mathbf{K} \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\sum_{\mathbf{m}p^s \le \mathbf{j} \le (\mathbf{m}+\mathbf{1})p^s-\mathbf{1}} \big(A(\mathbf{a}+p(\mathbf{K}-\mathbf{j}))A(\mathbf{j}) - A(\mathbf{K}-\mathbf{j})A(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)\big) \in p^{s+1}g(\mathbf{m})\mathbb{Z}_p,$$

où l'on pose $A(\mathbf{n}) = 0$ s'il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $n_i < 0$.

Remarque. La restriction du théorème K au cas d'une variable est contenue dans le théorème J.

Comme expliqué précédemment, pour démontrer le théorème 4 et le point (i) du théorème 2, nous démontrons les appartenances (5.1.1) et (5.1.2) avec une fonction g_p adéquate et

$$\delta(s,p,m) := H_{Lmp^s} - H_{L\lfloor m/p \rfloor p^{s+1}}.$$

Malheureusement, selon les choix des suites e et f telles que $\Delta_{e,f} \ge 1$ sur $\mathcal{D}_{e,f}$, il n'existe pas de fonction g_p vérifiant (5.1.1) qui permette de démontrer (5.1.2) en appliquant les théorèmes J ou K.

En effet, prenons $d = 1$. Si l'on dispose de deux suites $(\mathbf{A}_r)_{r\ge 0}$ et $(\mathbf{g}_r)_{r\ge 0}$ vérifiant les conditions du théorème J et telles qu'il existe $r \ge 0$ tel que $\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_{r+1} = \mathcal{Q}_{e,f}$ et, pour tous $s, r, m \in \mathbb{N}$,

$$p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)(H_{Lmp^s} - H_{L\lfloor m/p \rfloor p^{s+1}}) \in \mathbb{Z}_p,$$

alors (iii) nous dit que, pour tout nombre premier p, tout $v < p$, tous $s, r, m \in \mathbb{N}$ et tout

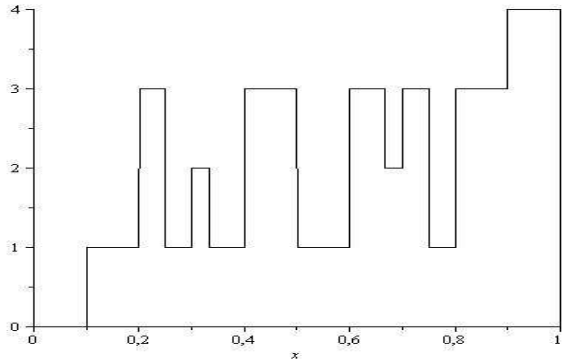
$u < p^s$, on a

$$(H_{Lmp^s} - H_{L\lfloor m/p\rfloor p^{s+1}}) \left(\frac{\mathcal{Q}_{e,f}(v+up+mp^{s+1})}{\mathcal{Q}_{e,f}(v+up)} - \frac{\mathcal{Q}_{e,f}(u+mp^s)}{\mathcal{Q}_{e,f}(u)} \right) \in \frac{1}{\mathbf{g}_r(v+up)}\mathcal{O} \in \frac{1}{\mathcal{Q}_{e,f}(v+up)}\mathcal{O}. \tag{5.1.3}$$

Or (5.1.3) n'est pas vérifiée par la suite $\mathcal{Q}_{e,f}$ définie par $e = (10, 5)$ et $f = (4, 4, 3, 2, 1, 1)$. En effet, pour $p = 3$, $L = 10$, $v = 1$, $s = 1$, $m = 1$ et $u = 2$ on obtient

$$v_3\left(H_{30}\left(\frac{\mathcal{Q}_{e,f}(16)}{\mathcal{Q}_{e,f}(7)} - \frac{\mathcal{Q}_{e,f}(5)}{\mathcal{Q}_{e,f}(2)}\right)\right) = -4 \quad \text{et} \quad v_3\left(\frac{1}{\mathcal{Q}_{e,f}(7)}\right) = -3.$$

De plus le graphe de $\Delta_{e,f}$ sur $[0, 1]$ est



et on a bien $\Delta_{e,f} \geq 1$ sur $\mathcal{D}_{e,f} = [1/10, 1[$.

Dans la suite de ce chapitre, on énonce et démontre les généralisations des théorèmes J et K que nous utilisons dans les preuves du théorème 4 et du point (i) du théorème 2.

5.2 Généralisations des théorèmes J et K

Nous introduisons quelques notations. Si $\mathcal{N}$ est une partie de $\bigcup_{t\geq 1}\left(\{0, \dots, p^t - 1\}^d \times \{t\}\right)$, alors, pour tout $s \in \mathbb{N}$, on note $\Psi_s(\mathcal{N})$ l'ensemble des $\mathbf{u} \in \{0, \dots, p^s - 1\}^d$ tels que, pour tout $(\mathbf{n}, t) \in \mathcal{N}$, avec $t \leq s$, et tout $\mathbf{j} \in \{0, \dots, p^{s-t} - 1\}^d$, on a $\mathbf{u} \neq \mathbf{j} + p^{s-t}\mathbf{n}$.

Soit $\mathbf{u} \in \{0, \dots, p^s - 1\}^d$, $\mathbf{u} := \sum_{k=0}^{s-1} \mathbf{u_k} p^k$ avec $\mathbf{u}_k \in \{0, \dots, p - 1\}^d$. Notons $\mathcal{M}_s(\mathbf{u})$ le mot $\mathbf{u}_0 \cdots \mathbf{u}_{s-1}$ de longueur s sur l'alphabet $\{0, \dots, p-1\}^d$. D'après la définition précédente, on a $\mathbf{u} \in \Psi_s(\mathcal{N})$ si, et seulement si aucun des mots $\mathcal{M}_t(\mathbf{n})$, $(\mathbf{n}, t) \in \mathcal{N}$, n'est un suffixe de $\mathcal{M}_s(\mathbf{u})$.

Prenons par exemple $\mathcal{N} := \{(\mathbf{0}, t) : t \geq 1\}$. Dans ce cas, $\Psi_s(\mathcal{N})$ est l'ensemble des $\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{s-1} \mathbf{u}_k p^k$ tels que $\mathbf{u}_{s-1} \neq \mathbf{0}$. On remarque que $\Psi_s(\mathcal{N}) = \Psi_s(\mathcal{N}')$ avec $\mathcal{N}' = \{(\mathbf{0}, 1)\}$.

Avec ces notations, notre généralisation des théorèmes J et K s'énonce comme suit.

Théorème 6. *Soit $(\mathbf{A}_r)_{r\geq 0}$ une suite d'applications de $\mathbb{N}^d$ dans $\Omega\setminus\{0\}$ et $(\mathbf{g}_r)_{r\geq 0}$ une suite d'applications de $\mathbb{N}^d$ dans $\mathcal{O}\setminus\{0\}$. On suppose qu'il existe $\mathcal{N}\subset\bigcup_{t\geq 1}\big(\{0,\dots,p^t-1\}^d\times\{t\}\big)$ tel que, pour tout $r\geq 0$, on a*

(i) $|\mathbf{A}_r(\mathbf{0})|_p=1$ *;*

(ii) pour tout $\mathbf{m}\in\mathbb{N}^d$*, on a* $\mathbf{A}_r(\mathbf{m})\in\mathbf{g}_r(\mathbf{m})\mathcal{O}$ *;*

(iii) Pour tout $s\in\mathbb{N}$ *et tout* $\mathbf{m}\in\mathbb{N}^d$*, on a :*

(a) pour tout $\mathbf{u}\in\Psi_s(\mathcal{N})$ *et tout* $\mathbf{v}\in\{0,\dots,p-1\}^d$*, on a*

$$\frac{\mathbf{A}_r(\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{\mathbf{A}_r(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)}-\frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{u}+\mathbf{m}p^s)}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{u})}\in p^{s+1}\frac{\mathbf{g}_{r+s+1}(\mathbf{m})}{\mathbf{A}_r(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)}\mathcal{O};$$

(a_1) si de plus $\mathbf{v}+p\mathbf{u}\in\Psi_{s+1}(\mathcal{N})$*, alors on a*

$$\frac{\mathbf{A}_r(\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{\mathbf{A}_r(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)}-\frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{u}+\mathbf{m}p^s)}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{u})}\in p^{s+1}\frac{\mathbf{g}_{r+s+1}(\mathbf{m})}{\mathbf{g}_r(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)}\mathcal{O};$$

(a_2) en revanche, si $\mathbf{v}+p\mathbf{u}\notin\Psi_{s+1}(\mathcal{N})$*, alors on a*

$$\frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{u}+p^s\mathbf{m})}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{u})}\in p^{s+1}\frac{\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})}{\mathbf{g}_r(\mathbf{v}+p\mathbf{u})}\mathcal{O};$$

(b) Pour tout $(\mathbf{n},t)\in\mathcal{N}$*, on a* $\mathbf{g}_r\left(\mathbf{n}+p^t\mathbf{m}\right)\in p^t\mathbf{g}_{r+t}(\mathbf{m})\mathcal{O}$ *;*

Alors, pour tout $\mathbf{a}\in\{0,\dots,p-1\}^d$*, tout* $\mathbf{m}\in\mathbb{N}^d$*, tous* $s,r\in\mathbb{N}$ *et tout* $\mathbf{K}\in\mathbb{Z}^d$*, on a*

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a},\mathbf{K},s,p,\mathbf{m}):=\sum_{\mathbf{m}p^s\leq\mathbf{j}\leq(\mathbf{m}+\mathbf{1})p^s-\mathbf{1}}\big(\mathbf{A}_r(\mathbf{a}+p(\mathbf{K}-\mathbf{j}))\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j})-\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathbf{A}_r(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)\big)\in p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O},\tag{5.2.1}$$

où l'on pose $\mathbf{A}_r(\mathbf{n})=0$ *s'il existe* $i\in\{1,\dots,d\}$ *tel que* $n_i<0$*.*

Montrons que ce théorème généralise le théorème K. Soit $A:\mathbb{N}^d\mapsto\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}$ et $g:\mathbb{N}^d\mapsto\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}$ deux applications qui vérifient les conditions (i), (ii) et (iii) du théorème K. On prend pour $(\mathbf{A}_r)_{r\geq 0}$ la suite constante de valeur A et pour $(\mathbf{g}_r)_{r\geq 0}$ la suite constante de valeur g. Ces deux suites vérifient bien les conditions (i) et (ii) du théorème 6. On choisit $\mathcal{N}:=\emptyset$ de sorte que, pour tout $s\in\mathbb{N}$, on a $\Psi_s(\mathcal{N})=\{0,\dots,p^s-1\}^d$. En particulier, les conditions (a_2) et (b) du théorème 6 sont vides. Il nous suffit donc de montrer que les suites $(\mathbf{A}_r)_{r\geq 0}$ et $(\mathbf{g}_r)_{r\geq 0}$ vérifient les points (a) et (a_1) du théorème 6. Le fait que $\Psi_{s+1}(\mathcal{N})=\{0,\dots,p^{s+1}-1\}^d$, joint au point (ii), démontre que la condition (a_1) implique le point (a). Or le point (a_1) n'est autre que le point (iii) du théorème K. Les conditions du théorème 6 sont donc vérifiées et on a bien la conclusion du théorème K.

De même, en choisissant $\mathcal{N}=\emptyset$, le théorème 6 redonne bien le théorème J.

L'intérêt du théorème 6 réside donc dans le choix d'un ensemble $\mathcal{N}$ non vide. Dans ce cas, les points (a) et (a_1), analogues des points (iii) des théorèmes J et K, doivent être

vérifiés pour un ensemble plus petits de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. En revanche, le choix des fonctions $\mathbf{g}_r$ est fortement contraint par le point (b), ce qui permet de conserver la conclusion (5.2.1).

Le premier résultat de cette thèse fut d'établir les critères d'intégralité des coefficients de Taylor des applications miroir et de type miroir d'une variable. En particulier, nous avons démontré une généralisation en une variable du théorème J qui s'énonce comme suit.

Théorème 7. *Soit $(\mathbf{A}_r)_{r\geq 0}$ une suite d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\Omega\setminus\{0\}$ et $(\mathbf{g}_r)_{r\geq 0}$ une suite d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{O}\setminus\{0\}$ telles que, pour tout $r\geq 0$, on ait*

(i) $|\mathbf{A}_r(0)|_p = 1$;

(ii) pour tout $m\in\mathbb{N}$, on a $\mathbf{A}_r(m)\in\mathbf{g}_r(m)\mathcal{O}$;

et telles qu'il existe $k_0\in\mathbb{N}$ tel que

(iii) pour tout $m\in\mathbb{N}$ et tout $r\geq 0$,

si $v_p(m)\geq k_0$ alors, pour tous $v,u,s\in\mathbb{N}$ tels que $v<p$, $u<p^s$, on a

$$\frac{\mathbf{A}_r(v+up+mp^{s+1})}{\mathbf{A}_r(v+up)}-\frac{\mathbf{A}_{r+1}(u+mp^s)}{\mathbf{A}_{r+1}(u)}\in p^{s+k_0+1}\frac{\mathbf{g}_{r+s+1}(m)}{\mathbf{g}_r(v+up)}\mathcal{O};$$

si $v_p(m)\leq k_0-1$, alors

$$\frac{\mathbf{A}_r(mp)}{\mathbf{A}_r(0)}-\frac{\mathbf{A}_{r+1}(m)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)}\in p^{v_p(m)+1}\mathbf{g}_{r+1}(m)\mathcal{O};$$

(iv) pour tout $k\in\{1,\dots,k_0\}$, tout $v\in\{1,\dots,p-1\}$, tout $m\in\mathbb{N}$ et tout $r\geq 0$, on a $\mathbf{g}_r(v+mp^k)\in p^k\mathbf{g}_r(mp^k)\mathcal{O}$ et $\mathbf{g}_r(mp^k)\in\mathbf{g}_{r+k}(m)\mathcal{O}$.

Alors, pour tout $a\in\{0,\dots,p-1\}$, tous $m,s\in\mathbb{N}$, tout $r\geq 0$ et tout $K\in\mathbb{Z}$, on a

$$\mathbf{S}_r(a,K,s,p,m):=\sum_{j=mp^s}^{(m+1)p^s-1}(\mathbf{A}_r(a+p(K-j))\mathbf{A}_{r+1}(j)-\mathbf{A}_{r+1}(K-j)\mathbf{A}_r(a+jp))\in p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O}$$

et

$$\mathbf{S}_r(a,K,s,p,mp^{k_0})\in p^{s+k_0+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O},$$

où l'on pose, pour tout $r\geq 0$, $\mathbf{A}_r(\ell)=0$ si $\ell<0$.

Le théorème J correspond au cas où $k_0=0$, auquel cas la condition (iii) est identique à la condition (iii) du théorème J et la condition (iv) est vide. La preuve pour $k_0\geq 1$ est très différente de celle donnée par Dwork pour $k_0=0$.

Le théorème 7 ne semble pas être un cas particulier du théorème 6. En particulier, il ne semble pas possible d'obtenir une conclusion du type $\mathbf{S}_r(a,K,s,p,mp^{k_0})\in p^{s+k_0+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O}$ à l'aide du théorème 6. Même si on peut n'utiliser que le théorème 6 pour démontrer les critères d'intégralité des coefficients de Taylor des applications miroir, le théorème 7 ne semble pas tout à fait inutile. Dwork établit une première version de son critère dans [11] lui permettant de démontrer des prolongements analytiques de certains quotient de fonctions p-adiques. Le théorème 7 pourraît permettre d'établir des prolongements analytiques de quotients de fonctions p-adiques plus générales.

Le but de la fin de ce chapitre est de démontrer les théorèmes 6 et 7.

5.3 Démonstration du théorème 6

La trame de la démonstration s'inspire de celles des théorèmes de Dwork et de Krattenthaler et Rivoal, mais elle diffère assez sensiblement dans les détails.

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, on note α_s l'assertion suivante : pour tout $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p-1\}^d$, tout $u \in \{0, \dots, s-1\}$, tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, tout $r \geq 0$ et tout $\mathbf{K} \in \mathbb{Z}^d$, on a la congruence

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, u, p, \mathbf{m}) \in p^{u+1}\mathbf{g}_{u+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}.$$

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, et tout $t \in \{0, \dots, s\}$, on note $\beta_{t,s}$ l'assertion suivante : pour tout $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p-1\}^d$, tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, tout $r \geq 0$ et tout $\mathbf{K} \in \mathbb{Z}^d$, on a la congruence

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K} + \mathbf{m}p^s, s, p, \mathbf{m}) \equiv \sum_{\mathbf{j} \in \Psi_{s-t}(\mathcal{N})} \frac{\mathbf{A}_{t+r+1}(\mathbf{j} + \mathbf{m}p^{s-t})}{\mathbf{A}_{t+r+1}(\mathbf{j})} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, t, p, \mathbf{j}) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}.$$

Pour tout $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p-1\}^d$, tout $\mathbf{K} \in \mathbb{Z}^d$, tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$, on pose

$$\mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, p, \mathbf{j}) := \mathbf{A}_r(\mathbf{a} + p(\mathbf{K} - \mathbf{j}))\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j}) - \mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{K} - \mathbf{j})\mathbf{A}_r(\mathbf{a} + \mathbf{j}p).$$

On a alors

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, s, p, \mathbf{m}) = \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{j} \leq (p^s-1)\mathbf{1}} \mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, p, \mathbf{j} + \mathbf{m}p^s).$$

Nous énonçons maintenant quatre lemmes permettant de montrer (5.2.1).

Lemme 2. *L'assertion α_1 est vraie.*

Lemme 3. *Pour tous $s, r \in \mathbb{N}$, tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, tout $a \in \{0, \dots, p-1\}^d$, tout $\mathbf{j} \in \Psi_s(\mathcal{N})$ et tout $\mathbf{K} \in \mathbb{Z}^d$, on a*

$$\mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K} + \mathbf{m}p^s, p, \mathbf{j} + \mathbf{m}p^s) \equiv \frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j} + \mathbf{m}p^s)}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j})} \mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, p, \mathbf{j}) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}.$$

Lemme 4. *Pour tout $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, si α_s est vraie, alors, pour tout $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p-1\}^d$, tout $\mathbf{K} \in \mathbb{Z}^d$, tout $r \geq 0$ et tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, on a*

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, s, p, \mathbf{m}) \equiv \sum_{\mathbf{j} \in \Psi_s(\mathcal{N})} \mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, p, \mathbf{j} + \mathbf{m}p^s) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O};$$

Lemme 5. *Pour tout $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, et tout $t \in \{0, \dots, s-1\}$, les assertions α_s et $\beta_{t,s}$ impliquent l'assertion $\beta_{t+1,s}$.*

Avant de prouver ces lemmes, nous vérifions que leur validité implique bien (5.2.1). Nous montrons que α_s est vraie pour tout $s \geq 1$ par récurrence sur s, ce qui donne la

conclusion du théorème 6. D'après le lemme 2, α_1 est vraie. Supposons α_s vraie pour un $s \geq 1$ fixé. On remarque que $\beta_{0,s}$ est l'assertion

$$\beta_{0,s} : \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K} + \mathbf{m}p^s, s, p, \mathbf{m}) \equiv \sum_{\mathbf{j} \in \Psi_s(\mathcal{N})} \frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j} + \mathbf{m}p^s)}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j})} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, 0, p, \mathbf{j}) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}.$$

Comme $\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, 0, p, \mathbf{j}) = \mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, p, \mathbf{j})$, on a

$$\sum_{\mathbf{j} \in \Psi_s(\mathcal{N})} \frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j} + \mathbf{m}p^s)}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j})} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, 0, p, \mathbf{j}) = \sum_{\mathbf{j} \in \Psi_s(\mathcal{N})} \frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j} + \mathbf{m}p^s)}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j})} \mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, p, \mathbf{j})$$

et, d'après le lemme 3, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{j} \in \Psi_s(\mathcal{N})} \frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j} + \mathbf{m}p^s)}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j})} \mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, p, \mathbf{j}) & \\ \equiv \sum_{\mathbf{j} \in \Psi_s(\mathcal{N})} \mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K} + \mathbf{m}p^s, p, \mathbf{j} + \mathbf{m}p^s) & \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O} \\ \equiv \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K} + \mathbf{m}p^s, s, p, \mathbf{m}) & \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}, \qquad (5.3.1) \end{aligned}$$

où (5.3.1) est obtenue *via* le lemme 4.

Ainsi, l'assertion $\beta_{0,s}$ est vraie. On obtient alors la validité de $\beta_{1,s}$ au moyen du lemme 5. Par itération du lemme 5, on obtient finalement $\beta_{s,s}$ qui s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K} + \mathbf{m}p^s, s, p, \mathbf{m}) &\equiv \sum_{\mathbf{j} \in \Psi_0(\mathcal{N})} \frac{\mathbf{A}_{s+r+1}(\mathbf{j} + \mathbf{m})}{\mathbf{A}_{s+r+1}(\mathbf{j})} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, s, p, \mathbf{j}) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O} \\ &\equiv \frac{\mathbf{A}_{s+r+1}(\mathbf{m})}{\mathbf{A}_{s+r+1}(\mathbf{0})} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, s, p, \mathbf{0}) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}, \qquad (5.3.2) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé dans (5.3.2) le fait que $\Psi_0(\mathcal{N}) = \{\mathbf{0}\}$.

Nous allons maintenant montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in \{0, \ldots, p-1\}^d$, tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $\mathbf{K} \in \mathbb{Z}^d$, on a $\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, s, p, \mathbf{0}) \in p^{s+1}\mathcal{O}$. Pour tout $\mathbf{N} \in \mathbb{Z}^d$, on note $P_{\mathbf{N}}$ l'assertion : « pour tout $\mathbf{a} \in \{0, \ldots, p-1\}^d$ et tout $r \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{N}, s, p, \mathbf{0}) \in p^{s+1}\mathcal{O}$ ». S'il existe $i \in \{1, \ldots, d\}$ tel que $N_i < 0$, alors, pour tout $\mathbf{j} \in \{0, \ldots, p^s - 1\}^d$, on a $\mathbf{A}_r(\mathbf{a} + p(\mathbf{N} - \mathbf{j})) = 0$ et $\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{N} - \mathbf{j}) = 0$ de sorte que $\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{N}, s, p, \mathbf{0}) = 0 \in p^{s+1}\mathcal{O}$. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un élément minimal $\mathbf{N} \in \mathbb{N}^d$ tel que $P_{\mathbf{N}}$ soit fausse. Soit $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $\mathbf{N}' := \mathbf{N} - \mathbf{m}p^s$. En utilisant (5.3.2) avec $\mathbf{N}'$ à la place de $\mathbf{K}$, on obtient

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{N}, s, p, \mathbf{m}) \equiv \frac{\mathbf{A}_{s+r+1}(\mathbf{m})}{\mathbf{A}_{s+r+1}(\mathbf{0})} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{N}', s, p, \mathbf{0}) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}.$$

Comme $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, on a $\mathbf{N}' < \mathbf{N}$, ce qui, par définition de $\mathbf{N}$, donne $\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{N}', s, p, \mathbf{0}) \in p^{s+1}\mathcal{O}$. D'après les conditions (i) et (ii), on a $|\mathbf{A}_{s+r+1}(\mathbf{0})|_p = 1$ et $\mathbf{A}_{s+r+1}(\mathbf{m}) \in \mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}$, ce qui donne

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{N}, s, p, \mathbf{m}) \in p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O} \subset p^{s+1}\mathcal{O}.$$

Ainsi, pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, on a $\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{N}, s, p, \mathbf{m}) \in p^{s+1}\mathcal{O}$. Soit $\mathbf{T} \in \mathbb{N}^d$ tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ on ait $(T_i + 1)p^s > N_i$. On a alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{0} \le \mathbf{m} \le \mathbf{T}} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{N}, s, p, \mathbf{m}) \\
&\qquad = \sum_{\mathbf{0} \le \mathbf{m} \le \mathbf{T}} \sum_{\mathbf{m}p^s \le \mathbf{j} \le (\mathbf{m}+\mathbf{1})p^s - \mathbf{1}} (\mathbf{A}_r(\mathbf{a} + p(\mathbf{N} - \mathbf{j}))\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j}) - \mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{N} - \mathbf{j})\mathbf{A}_r(\mathbf{a} + \mathbf{j}p)) \\
&\qquad = \sum_{\mathbf{0} \le \mathbf{j} \le \mathbf{N}} (\mathbf{A}_r(\mathbf{a} + p(\mathbf{N} - \mathbf{j}))\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j}) - \mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{N} - \mathbf{j})\mathbf{A}_r(\mathbf{a} + \mathbf{j}p)) \qquad (5.3.3) \\
&\qquad = 0, \qquad (5.3.4)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé dans (5.3.3) le fait que $\mathbf{A}_r(\mathbf{n}) = 0$ s'il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $n_i < 0$. L'inégalité (5.3.4) a lieu car le terme de la somme (5.3.3) est changé en son opposé lorsque l'on change l'indice $\mathbf{j}$ en $\mathbf{N} - \mathbf{j}$. On obtient donc

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{N}, s, p, \mathbf{0}) = -\sum_{\mathbf{0} < \mathbf{m} \le \mathbf{T}} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{N}, s, p, \mathbf{m}) \in p^{s+1}\mathcal{O},$$

ce qui contredit le statut de $\mathbf{N}$. Ainsi, pour tout $\mathbf{N} \in \mathbb{Z}^d$, $P_{\mathbf{N}}$ est vraie.

De plus, les conditions (i) et (ii) donnent respectivement

$$|\mathbf{A}_{s+r+1}(\mathbf{0})|_p = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_{s+r+1}(\mathbf{m}) \in \mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}.$$

On obtient alors, d'après (5.3.2), que

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K} + \mathbf{m}p^s, s, p, \mathbf{m}) \in p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}.$$

Cette dernière congruence est valable pour tout $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p-1\}^d$, tout $\mathbf{K} \in \mathbb{Z}^d$, tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$ et tout $r \ge 0$, ce qui montre bien que l'assertion α_{s+1} est vraie et achève la récurrence sur s. Il ne reste plus qu'à démontrer les lemmes 2, 3, 4 et 5.

Démonstration du lemme 2

Soit $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p-1\}^d$, $\mathbf{K} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$ et $r \ge 0$. On a

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, 0, p, \mathbf{m}) = \mathbf{A}_r(\mathbf{a} + p(\mathbf{K} - \mathbf{m}))\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{m}) - \mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{K} - \mathbf{m})\mathbf{A}_r(\mathbf{a} + p\mathbf{m}). \qquad (5.3.5)$$

Si $\mathbf{K} - \mathbf{m} \notin \mathbb{N}^d$, alors on a $\mathbf{A}_r(\mathbf{a} + p(\mathbf{K} - \mathbf{m})) = 0$ et $\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{K} - \mathbf{m}) = 0$ de sorte que $\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, 0, p, \mathbf{m}) = 0 \in p\mathbf{g}_{r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}$, comme voulu. On peut donc supposer que $\mathbf{K} - \mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$. On réécrit (5.3.5) sous la forme suivante.

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, 0, p, \mathbf{m}) = \mathbf{A}_r(\mathbf{a}) \Bigg(&\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{m}) \left(\frac{\mathbf{A}_r(\mathbf{a} + p(\mathbf{K} - \mathbf{m}))}{\mathbf{A}_r(\mathbf{a})} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{K} - \mathbf{m})}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{0})} \right) \\
&- \mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{K} - \mathbf{m}) \left(\frac{\mathbf{A}_r(\mathbf{a} + \mathbf{m}p)}{\mathbf{A}_r(\mathbf{a})} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{m})}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{0})} \right) \Bigg). \qquad (5.3.6)
\end{aligned}$$

Comme $\Psi_0(\mathcal{N}) = \{\mathbf{0}\}$, on peut utiliser l'hypothèse (a) du théorème 6 avec $\mathbf{0}$ à la place de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{a}$ à la place de $\mathbf{v}$, de sorte que l'on obtient

$$\frac{\mathbf{A}_r(\mathbf{a}+p(\mathbf{K}-\mathbf{m}))}{\mathbf{A}_r(\mathbf{a})} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{K}-\mathbf{m})}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{0})} \in p\frac{\mathbf{g}_{r+1}(\mathbf{K}-\mathbf{m})}{\mathbf{A}_r(\mathbf{a})}\mathcal{O}$$

et

$$\frac{\mathbf{A}_r(\mathbf{a}+\mathbf{m}p)}{\mathbf{A}_r(\mathbf{a})} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{m})}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{0})} \in p\frac{\mathbf{g}_{r+1}(\mathbf{m})}{\mathbf{A}_r(\mathbf{a})}\mathcal{O}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_r(\mathbf{a})\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{m})\left(\frac{\mathbf{A}_r(\mathbf{a}+p(\mathbf{K}-\mathbf{m}))}{\mathbf{A}_r(\mathbf{a})} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{K}-\mathbf{m})}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{0})}\right) &\in p\mathbf{g}_{r+1}(\mathbf{K}-\mathbf{m})\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O} \\ &\in p\mathbf{g}_{r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O} \qquad (5.3.7)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_r(\mathbf{a})\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{K}-\mathbf{m})\left(\frac{\mathbf{A}_r(\mathbf{a}+\mathbf{m}p)}{\mathbf{A}_r(\mathbf{a})} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{m})}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{0})}\right) &\in p\mathbf{g}_{r+1}(\mathbf{m})\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{K}-\mathbf{m})\mathcal{O} \\ &\in p\mathbf{g}_{r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}, \qquad (5.3.8)\end{aligned}$$

où l'on a utilisé dans (5.3.7) et (5.3.8) la condition (ii) qui donne $\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{m}) \in \mathbf{g}_{r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}$ et $\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{K}-\mathbf{m}) \in \mathbf{g}_{r+1}(\mathbf{K}-\mathbf{m})\mathcal{O} \subset \mathcal{O}$. En utilisant (5.3.7) et (5.3.8) dans (5.3.6), on obtient bien $\mathbf{S}_r(\mathbf{a},\mathbf{K},0,p,\mathbf{m}) \in p\mathbf{g}_{r+1}(\mathbf{m})$, ce qui achève la preuve du lemme.

Démonstration du lemme 3

On a

$$\begin{aligned}&\mathbf{U}_r(\mathbf{a},\mathbf{K}+\mathbf{m}p^s,p,\mathbf{j}+\mathbf{m}p^s) - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j}+\mathbf{m}p^s)}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j})}\mathbf{U}_r(\mathbf{a},\mathbf{K},p,\mathbf{j}) \\ &\quad = -\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathbf{A}_r(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)\left(\frac{\mathbf{A}_r(\mathbf{a}+\mathbf{j}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{\mathbf{A}_r(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j}+\mathbf{m}p^s)}{\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{j})}\right). \qquad (5.3.9)\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{j} \in \Psi_s(\mathcal{N})$, l'hypothèse (a) implique que le terme de droite de l'égalité (5.3.9) est dans

$$\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathbf{A}_r(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)p^{s+1}\frac{\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})}{\mathbf{A}_r(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)}\mathcal{O}.$$

De plus, d'après la condition (ii), on a $\mathbf{A}_{r+1}(\mathbf{K}-\mathbf{j}) \in \mathbf{g}_{r+1}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathcal{O} \subset \mathcal{O}$. Ces estimations montrent que le membre de gauche de (5.3.9) est dans $p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}$, ce qui termine la preuve du lemme.

Démonstration du lemme 4

Soit $r, s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, tels que α_s soit vraie. Si $\Psi_s(\mathcal{N}) = \{0, \dots, p^s - 1\}^d$, alors le lemme 4 est trivial. Dans la suite de la démonstration, on suppose que $\Psi_s(\mathcal{N}) \neq \{0, \dots, p^s - 1\}^d$.

On a $\mathbf{u} \in \{0, \dots, p^s - 1\}^d \setminus \Psi_s(\mathcal{N})$ si et seulement s'il existe $(\mathbf{n}, t) \in \mathcal{N}$, $t \leq s$, et $\mathbf{j} \in \{0, \dots, p^{s-t} - 1\}^d$ tels que $\mathbf{u} = \mathbf{j} + p^{s-t}\mathbf{n}$. On note $\mathcal{N}_s$ l'ensemble des $(\mathbf{n}, t) \in \mathcal{N}$ avec $t \leq s$. On a donc

$$\{0, \dots, p^s - 1\}^d \setminus \Psi_s(\mathcal{N}) = \bigcup_{(\mathbf{n},t) \in \mathcal{N}_s} \{\mathbf{j} + p^{s-t}\mathbf{n} \,:\, \mathbf{j} \in \{0, \dots, p^{s-t} - 1\}^d\}.$$

En particulier, l'ensemble $\mathcal{N}_s$ est non vide.

Nous allons montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, et $(\mathbf{n}_1, t_1), \dots, (\mathbf{n}_k, t_k) \in \mathcal{N}_s$ tels que les ensembles

$$J(\mathbf{n}_i, t_i) := \{\mathbf{j} + p^{s-t_i}\mathbf{n}_i \,:\, \mathbf{j} \in \{0, \dots, p^{s-t_i} - 1\}^d\}$$

réalisent une partition de $\{0, \dots, p^s - 1\}^d \setminus \Psi_s(\mathcal{N})$. On remarque que

$$\mathcal{N}_s \subset \bigcup_{t=1}^{s} \big(\{0, \dots, p^t - 1\} \times \{t\}\big)$$

et donc que $\mathcal{N}_s$ est fini. Ainsi, il nous suffit de montrer que si $(\mathbf{n}, t), (\mathbf{n}', t') \in \mathcal{N}_s$, $\mathbf{j} \in \{0, \dots, p^{s-t} - 1\}^d$ et $\mathbf{j}' \in \{0, \dots, p^{s-t'} - 1\}^d$ vérifient $\mathbf{j} + p^{s-t}\mathbf{n} = \mathbf{j}' + p^{s-t'}\mathbf{n}'$, alors on a soit $J(\mathbf{n}, t) \subset J(\mathbf{n}', t')$ soit $J(\mathbf{n}', t') \subset J(\mathbf{n}, t)$. Supposons, par exemple, que $t \leq t'$. Il existe alors $\mathbf{j}_0 \in \{0, \dots, p^{t'-t} - 1\}^d$ tel que $\mathbf{j} = \mathbf{j}' + p^{s-t'}\mathbf{j}_0$, de sorte que $p^{s-t'}\mathbf{n}' = p^{s-t}\mathbf{n} + p^{s-t'}\mathbf{j}_0$ et donc $J(\mathbf{n}', t') \subset J(\mathbf{n}, t)$. De même, si $t \geq t'$, alors on a $J(\mathbf{n}, t) \subset J(\mathbf{n}', t')$. Ainsi, on obtient

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, s, p, \mathbf{m}) = \sum_{\mathbf{j} \in \Psi_s(\mathcal{N})} \mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, p, \mathbf{j} + \mathbf{m}p^s) + \sum_{\mathbf{j} \in \{0,\dots,p^s-1\}^d \setminus \Psi_s(\mathcal{N})} \mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, p, \mathbf{j} + \mathbf{m}p^s), \tag{5.3.10}$$

avec

$$\sum_{\mathbf{j} \in \{0,\dots,p^s-1\}^d \setminus \Psi_s(\mathcal{N})} \mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, p, \mathbf{j} + \mathbf{m}p^s) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\mathbf{j} \in \{0,\dots,p^{s-t_i}-1\}^d} \mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, p, \mathbf{j} + p^{s-t_i}\mathbf{n}_i + \mathbf{m}p^s). \tag{5.3.11}$$

Nous allons maintenant montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on a

$$\sum_{\mathbf{j} \in \{0,\dots,p^{s-t_i}-1\}^d} \mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, p, \mathbf{j} + p^{s-t_i}\mathbf{n}_i + \mathbf{m}p^s) \in p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}. \tag{5.3.12}$$

Soit $i \in \{1, \dots, k\}$. Par définition de $\mathbf{U}_r$, on a

$$\sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{j} \leq (p^{s-t_i}-1)\mathbf{1}} \mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, p, \mathbf{j} + p^{s-t_i}\mathbf{n}_i + \mathbf{m}p^s) = \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, s - t_i, p, \mathbf{n}_i + \mathbf{m}p^{t_i}).$$

Comme $t_i \geq 1$, on obtient, *via* α_s, que

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, s - t_i, p, \mathbf{n}_i + \mathbf{m}p^{t_i}) \in p^{s-t_i+1}\mathbf{g}_{s-t_i+r+1}(\mathbf{n}_i + \mathbf{m}p^{t_i})\mathcal{O}.$$

En appliquant le point (b) du théorème 6 avec t_i à la place de t et $r + s - t_i + 1$ à la place de r, on obtient

$$p^{s-t_i+1}\mathbf{g}_{s-t_i+r+1}(\mathbf{n} + \mathbf{m}p^{t_i}) \in p^{s-t_i+1}p^{t_i}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O} = p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}.$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, on a bien (5.3.12).

La congruence (5.3.12), jointe à (5.3.11) et (5.3.10), montre que

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, s, p, \mathbf{m}) \equiv \sum_{\mathbf{j} \in \Psi_s(\mathcal{N})} \mathbf{U}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, p, \mathbf{j} + \mathbf{m}p^s) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O},$$

ce qui achève la preuve du lemme 4.

Démonstration du lemme 5

Dans cette démonstration, $\mathbf{i}$ désigne un élément de $\{0, \ldots, p-1\}^d$ et $\mathbf{u}$ désigne un élément de $\{0, \ldots, p^{s-t-1} - 1\}^d$. Pour $t < s$, on écrit $\beta_{t,s}$ sous la forme

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K} + \mathbf{m}p^s, s, p, \mathbf{m}) \equiv \sum_{\mathbf{i}+\mathbf{u}p \in \Psi_{s-t}(\mathcal{N})} \frac{\mathbf{A}_{t+r+1}(\mathbf{i} + \mathbf{u}p + \mathbf{m}p^{s-t})}{\mathbf{A}_{t+r+1}(\mathbf{i} + \mathbf{u}p)} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, t, p, \mathbf{i} + \mathbf{u}p) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}. \tag{5.3.13}$$

On veut montrer la congruence $\beta_{t+1,s}$, qui s'écrit

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K} + \mathbf{m}p^s, s, p, \mathbf{m}) \equiv \sum_{\mathbf{u} \in \Psi_{s-t-1}(\mathcal{N})} \frac{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mathbf{u} + \mathbf{m}p^{s-t-1})}{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mathbf{u})} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, t+1, p, \mathbf{u}) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}.$$

On remarque que $\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, t+1, p, \mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq (p-1)\mathbf{1}} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, t, p, \mathbf{i} + \mathbf{u}p)$. Ainsi, en posant

$$X := \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K} + \mathbf{m}p^s, s, p, \mathbf{m}) - \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq (p-1)\mathbf{1}} \sum_{\mathbf{u} \in \Psi_{s-t-1}(\mathcal{N})} \frac{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mathbf{u} + \mathbf{m}p^{s-t-1})}{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mathbf{u})} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, t, p, \mathbf{i} + \mathbf{u}p),$$

il ne reste plus qu'à montrer que $X \in p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}$. On a

$$\mathbf{i} + \mathbf{u}p \in \Psi_{s-t}(\mathcal{N}) \Rightarrow \mathbf{u} \in \Psi_{s-t-1}(\mathcal{N}). \tag{5.3.14}$$

En effet, si $\mathbf{u} \notin \Psi_{s-t-1}(\mathcal{N})$, alors il existe $(\mathbf{n}, k) \in \mathcal{N}$, $k \leq s-t-1$, et $\mathbf{j} \in \{0, \dots, p^{s-t-1-k}-1\}^d$ tels que $\mathbf{u} = \mathbf{j} + p^{s-t-1-k}\mathbf{n}$. On a donc $\mathbf{i} + \mathbf{u}p = \mathbf{i} + \mathbf{j}p + p^{s-t-k}\mathbf{n}$, ce qui donne bien $\mathbf{i} + \mathbf{u}p \notin \Psi_{s-t}(\mathcal{N})$. Ainsi, d'après $\beta_{t,s}$ sous la forme (5.3.13), on obtient que

$$X \equiv \sum_{\mathbf{i}+\mathbf{u}p \in \Psi_{s-t}(\mathcal{N})} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, t, p, \mathbf{i}+\mathbf{u}p) \left(\frac{\mathbf{A}_{t+r+1}(\mathbf{i} + \mathbf{u}p + \mathbf{m}p^{s-t})}{\mathbf{A}_{t+r+1}(\mathbf{i} + \mathbf{u}p)} - \frac{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mathbf{u} + \mathbf{m}p^{s-t-1})}{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mathbf{u})} \right)$$
$$+ \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \Psi_{s-t-1}(\mathcal{N}) \\ \mathbf{i}+\mathbf{u}p \notin \Psi_{s-t}(\mathcal{N})}} \frac{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mathbf{u} + \mathbf{m}p^{s-t-1})}{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mathbf{u})} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, t, p, \mathbf{i} + \mathbf{u}p) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}.$$

Or, d'après l'hypothèse (a_1) du théorème 6 appliquée avec $s-t-1$ pour s et $t+r+1$ à la place de r, on a

$$\frac{\mathbf{A}_{t+r+1}(\mathbf{i} + \mathbf{u}p + \mathbf{m}p^{s-t})}{\mathbf{A}_{t+r+1}(\mathbf{i} + \mathbf{u}p)} - \frac{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mathbf{u} + \mathbf{m}p^{s-t-1})}{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mathbf{u})} \in p^{s-t} \frac{\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})}{\mathbf{g}_{t+r+1}(\mathbf{i} + \mathbf{u}p)} \mathcal{O}.$$

De plus, comme $t < s$ et puisque α_s est vraie, on a

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, t, p, \mathbf{i} + \mathbf{u}p) \in p^{t+1}\mathbf{g}_{t+r+1}(\mathbf{i} + \mathbf{u}p)\mathcal{O} \tag{5.3.15}$$

et on obtient

$$X \equiv \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \Psi_{s-t-1}(\mathcal{N}) \\ \mathbf{i}+\mathbf{u}p \notin \Psi_{s-t}(\mathcal{N})}} \frac{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mathbf{u} + \mathbf{m}p^{s-t-1})}{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mathbf{u})} \mathbf{S}_r(\mathbf{a}, \mathbf{K}, t, p, \mathbf{i} + \mathbf{u}p) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}. \tag{5.3.16}$$

Enfin, lorsque $\mathbf{i} + \mathbf{u}p \notin \Psi_{s-t}(\mathcal{N})$, on peut appliquer la condition (a_2) du théorème 6 avec $s-t-1$ à la place de s, $\mathbf{i}$ à la place de $\mathbf{v}$ et $r+t+1$ à la place de r, ce qui donne

$$\frac{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mathbf{u} + \mathbf{m}p^{s-t-1})}{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mathbf{u})} \in p^{s-t} \frac{\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})}{\mathbf{g}_{t+r+1}(\mathbf{i} + \mathbf{u}p)} \mathcal{O}. \tag{5.3.17}$$

En utilisant (5.3.15) et (5.3.17) dans (5.3.16), on obtient bien $X \in p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(\mathbf{m})\mathcal{O}$. Ceci achève la preuve du lemme 5 et donc celle du théorème 6.

5.4 Démonstration du théorème 7

Dans la suite, si k_0 est un entier naturel, on appellera *k_0-couple de Dwork* tout couple de suites $((\mathbf{A}_r)_{r\geq 0}, (\mathbf{g}_r)_{r\geq 0})$ où les $\mathbf{A}_r$ sont des applications de $\mathbb{N}$ dans $\Omega \setminus \{0\}$, les $\mathbf{g}_r$ sont des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{O} \setminus \{0\}$, telles que, pour tout $r \geq 0$, $\mathbf{A}_r$ et $\mathbf{g}_r$ vérifient les conditions (i),(ii),(iii) et (iv) du théorème 7.

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 7. Pour cela, comme pour la preuve du théorème 6, on va avoir besoin d'un certain nombre de résultats intermédiaires.

5.4.1 Lemmes préparatoires

On énonce et démontre trois lemmes.

Lemme 6. *Soit $(\mathbf{g}_r)_{r\geq 0}$ une suite d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{O}\setminus\{0\}$ telle qu'il existe un entier naturel $k_0 \geq 1$ tel que*

(IV) pour tout $k \in \{1,\dots,k_0\}$, tout $v \in \{1,\dots,p-1\}$, tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $r \geq 0$, on a $\mathbf{g}_r(v+mp^k) \in p^k\mathbf{g}_r(mp^k)\mathcal{O}$ et $\mathbf{g}_r(mp^k) \in \mathbf{g}_{r+k}(m)\mathcal{O}$.

Alors, pour tout $w \in \mathbb{N}$, $w \geq 1$, et tout $r \geq 0$, on a $\mathbf{g}_r(w) \in p^{k_0}\mathcal{O}$.

Remarque. – La condition (IV) du lemme 6 est la condition (iv) du théorème 7.

– La condition $w \neq 0$ est essentielle car, pour $w = 0$, l'hypothèse (IV) ne donne pas mieux que $\mathbf{g}_r(0) \in \mathcal{O}\setminus\{0\}$.

Démonstration. On écrit $w := \sum_{\ell=0}^{N} w_\ell p^\ell$ le développement p-adique de w, où $w_N \neq 0$. On va raisonner par récurrence sur N.

– Supposons $N = 0$.

Dans ce cas, on a $w = w_0 \in \{1,\dots,p-1\}$. En appliquant (IV) avec $v = w, k = k_0$ et $m = 0$, on obtient bien $\mathbf{g}_r(w) \in p^{k_0}\mathbf{g}_r(0)\mathcal{O} \subset p^{k_0}\mathcal{O}$.

– Supposons $N \geq 1$.

Soit η le plus petit entier naturel tel que $w_\eta \neq 0$. Si $\eta = 0$, alors $w_0 \geq 1$ donc, d'après (IV) appliquée en $v = w_0, k = 1$ et $m = \sum_{\ell=0}^{N-1} w_{\ell+1}p^\ell$, on obtient

$$\mathbf{g}_r(w) \in p\mathbf{g}_r(mp)\mathcal{O} \subset p\mathbf{g}_{r+1}(m)\mathcal{O}.$$

On a $m \geq w_N p^{N-1} > 0$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, on a $\mathbf{g}_{r+1}(m) \in p^{k_0}\mathcal{O}$, d'où le résultat.

En revanche, si $\eta \geq 1$, alors $w = p\sum_{\ell=0}^{N-1} w_{\ell+1}p^\ell$. D'après (IV) appliquée en $k = 1$ et $m = \sum_{\ell=0}^{N-1} w_{\ell+1}p^\ell > 0$, on obtient $\mathbf{g}_r(w) = \mathbf{g}_r(mp) \in \mathbf{g}_{r+1}(m)\mathcal{O}$ et on conclut par l'hypothèse de récurrence. Ceci achève la preuve du lemme. □

Lemme 7. *Soit $((\boldsymbol{A}_r)_{r\geq 0}, (\mathbf{g}_r)_{r\geq 0})$ un k_0-couple de Dwork avec $k_0 \geq 1$. Alors, pour tout $k \in \{0,\dots,k_0\}$, tout $a \in \{0,\dots,p-1\}$, tout $m \in \mathbb{N}$, tout $K \in \mathbb{Z}$ et tout $r \geq 0$, on a $\boldsymbol{S}_r(a,K,0,p,mp^k) \in p^{k+1}\mathbf{g}_{r+1}(mp^k)\mathcal{O}$.*

Démonstration. Soit $k \in \{0,\dots,k_0\}$, $a \in \{0,\dots,p-1\}$, $m \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{Z}$ et $r \geq 0$. On a

$$\mathbf{S}_r(a,K,0,p,mp^k) = \mathbf{A}_r(a+p(K-mp^k))\mathbf{A}_{r+1}(mp^k) - \mathbf{A}_{r+1}(K-mp^k)\mathbf{A}_r(a+mp^{k+1}).$$

Si $K - mp^k < 0$ alors $\mathbf{S}_r(a,K,0,p,mp^k) = 0$ et le lemme 7 est trivialement vrai. On suppose donc que $K - mp^k \geq 0$ dans la suite de la démonstration. On va distinguer plusieurs cas.

– Supposons $a \neq 0$ et $k \leq k_0 - 1$.

D'après (ii), on a $\mathbf{A}_r(a+p(K-mp^k)) \in \mathbf{g}_r(a+p(K-mp^k))\mathcal{O}$ et, d'après le lemme 6, on a $\mathbf{g}_r(a+p(K-mp^k)) \in p^{k_0}\mathcal{O}$ car $a+p(K-mp^k) \geq 1$. Comme $k+1 \leq k_0$, on obtient

$$\mathbf{A}_r(a+p(K-mp^k)) \in p^{k+1}\mathcal{O}. \tag{5.4.1}$$

Toujours d'après (ii), on a

$$\mathbf{A}_{r+1}(mp^k) \in \mathbf{g}_{r+1}(mp^k)\mathcal{O}, \tag{5.4.2}$$

$$\mathbf{A}_{r+1}(K-mp^k) \in \mathbf{g}_{r+1}(K-mp^k)\mathcal{O} \subset \mathcal{O} \tag{5.4.3}$$

et $\mathbf{A}_r(a+mp^{k+1}) \in \mathbf{g}_r(a+mp^{k+1})\mathcal{O}$. Comme $1 \leq k+1 \leq k_0$, on peut appliquer (iv) en $k+1$ et on obtient

$$\mathbf{g}_r(a+mp^{k+1}) \in p^{k+1}\mathbf{g}_r(mp^{k+1})\mathcal{O} \subset p^{k+1}\mathbf{g}_{r+1}(mp^k)\mathcal{O},$$

donc

$$\mathbf{A}_r(a+mp^{k+1}) \in p^{k+1}\mathbf{g}_{r+1}(mp^k)\mathcal{O}. \tag{5.4.4}$$

Ainsi, d'après (5.4.1), (5.4.2), (5.4.3) et (5.4.4), on obtient bien

$$\mathbf{S}_r(a,K,0,p,mp^k) \in p^{k+1}\mathbf{g}_{r+1}(mp^k)\mathcal{O}.$$

– Supposons $a \neq 0, k = k_0$ et $K - mp^{k_0} > 0$.

D'après (ii), on a $\mathbf{A}_r(a+p(K-mp^{k_0})) \in \mathbf{g}_r(a+p(K-mp^{k_0}))\mathcal{O}$ et, d'après (iv), on a $\mathbf{g}_r(a+p(K-mp^{k_0})) \in p\mathbf{g}_r(p(K-mp^{k_0}))\mathcal{O}$. Comme $K-mp^{k_0} > 0$, le lemme 6 implique donc que

$$\mathbf{A}_r(a+p(K-mp^{k_0})) \in p^{k_0+1}\mathcal{O}. \tag{5.4.5}$$

D'après (ii), on a

$$\mathbf{A}_{r+1}(mp^{k_0}) \in \mathbf{g}_{r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O} \tag{5.4.6}$$

et

$$\mathbf{A}_{r+1}(K-mp^{k_0}) \in \mathbf{g}_{r+1}(K-mp^{k_0})\mathcal{O} \subset p^{k_0}\mathcal{O}, \tag{5.4.7}$$

où l'inclusion dans (5.4.7) est obtenue de nouveau *via* le lemme 6.

Enfin, d'après (ii), on a $\mathbf{A}_r(a+mp^{k_0+1}) \in \mathbf{g}_r(a+mp^{k_0+1})\mathcal{O}$. D'après (iv), on obtient

$$\mathbf{g}_r(a+mp^{k_0+1}) = \mathbf{g}_r(a+(mp^{k_0})p) \in p\mathbf{g}_r(mp^{k_0+1})\mathcal{O} \subset p\mathbf{g}_{r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}$$

et donc

$$\mathbf{A}_r(a+mp^{k_0+1}) \in p\mathbf{g}_{r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}. \tag{5.4.8}$$

Ainsi, d'après (5.4.5), (5.4.6), (5.4.7) et (5.4.8), on obtient bien que

$$\mathbf{S}_r(a,K,0,p,mp^{k_0}) \in p^{k_0+1}\mathbf{g}_{r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}.$$

– Supposons $a \neq 0, k = k_0$ et $K - mp^{k_0} = 0$.

On a alors

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_r(a, K, 0, p, mp^{k_0}) &= \mathbf{A}_r(a)\mathbf{A}_{r+1}(mp^{k_0}) - \mathbf{A}_{r+1}(0)\mathbf{A}_r(a + mp^{k_0+1}) \\ &= -\mathbf{A}_r(a)\mathbf{A}_{r+1}(0)\left(\frac{\mathbf{A}_r(a + mp^{k_0+1})}{\mathbf{A}_r(a)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(mp^{k_0})}{\mathbf{A}_{r+1}(0)}\right),\end{aligned}$$

avec, d'après (i) et (ii), $\mathbf{A}_r(a)\mathbf{A}_{r+1}(0) \in \mathbf{g}_r(a)\mathcal{O}$. Comme $v_p(mp^{k_0}) \geq k_0$, on obtient, d'après (iii) appliquée en $s = 0$, $v = a$, $u = 0$ et mp^{k_0} à la place de m, que

$$\frac{\mathbf{A}_r(a + mp^{k_0+1})}{\mathbf{A}_r(a)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(mp^{k_0})}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} \in p^{k_0+1}\frac{\mathbf{g}_{r+1}(mp^{k_0})}{\mathbf{g}_r(a)}\mathcal{O}.$$

La congruence voulue en découle.

– Il reste un seul cas : $a = 0$.

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_r(0, K, 0, p, mp^k) &= \mathbf{A}_r(p(K - mp^k))\mathbf{A}_{r+1}(mp^k) - \mathbf{A}_{r+1}(K - mp^k)\mathbf{A}_r(mp^{k+1}) \\ &= \mathbf{A}_r(0)\mathbf{A}_{r+1}(0)\left(\frac{\mathbf{A}_r(p(K - mp^k))}{\mathbf{A}_r(0)}\frac{\mathbf{A}_{r+1}(mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(K - mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)}\frac{\mathbf{A}_r(mp^{k+1})}{\mathbf{A}_r(0)}\right).\end{aligned}$$

On écrit le terme de droite sous la forme

$$\begin{aligned}&\frac{\mathbf{A}_r(p(K - mp^k))}{\mathbf{A}_r(0)}\frac{\mathbf{A}_{r+1}(mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(K - mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)}\frac{\mathbf{A}_r(mp^{k+1})}{\mathbf{A}_r(0)} \\ &\qquad = \frac{\mathbf{A}_{r+1}(mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)}\left(\frac{\mathbf{A}_r(p(K - mp^k))}{\mathbf{A}_r(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(K - mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)}\right) \\ &\qquad\qquad - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(K - mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)}\left(\frac{\mathbf{A}_r(mp^{k+1})}{\mathbf{A}_r(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)}\right).\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$\frac{\mathbf{A}_r(mp^{k+1})}{\mathbf{A}_r(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} \in p^{k+1}\mathbf{g}_{r+1}(mp^k)\mathcal{O}. \tag{5.4.9}$$

En effet, si $v_p(mp^k) \geq k_0$ alors, en appliquant (iii) avec $v = u = s = 0$ et mp^k à la place de m, on obtient

$$\frac{\mathbf{A}_r(mp^{k+1})}{\mathbf{A}_r(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} \in p^{k_0+1}\frac{\mathbf{g}_{r+1}(mp^k)}{\mathbf{g}_r(0)}\mathcal{O}.$$

De plus, d'après (i) et (ii), $\mathbf{g}_r(0)$ est inversible dans $\mathcal{O}$ et, par hypothèse, on a $k \leq k_0$, donc on obtient bien (5.4.9) dans ce cas. Si en revanche $v_p(mp^k) \leq k_0 - 1$ alors, d'après (iii) avec mp^k à la place de m, on obtient

$$\frac{\mathbf{A}_r(mp^{k+1})}{\mathbf{A}_r(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} \in p^{v_p(mp^k)+1}\mathbf{g}_{r+1}(mp^k)\mathcal{O} \subset p^{k+1}\mathbf{g}_{r+1}(mp^k)\mathcal{O},$$

ce qui achève la vérification de (5.4.9).

Ainsi, si $K - mp^k = 0$, alors on a bien $\mathbf{S}_r(0, K, 0, p, mp^k) \in p^{k+1}\mathbf{g}_{r+1}(mp^k)\mathcal{O}$. En revanche, si $K - mp^k > 0$, alors on a

$$\frac{\mathbf{A}_r(p(K-mp^k))}{\mathbf{A}_r(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(K-mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} \in p\mathbf{g}_{r+1}(K-mp^k)\mathcal{O}. \tag{5.4.10}$$

En effet, si $v_p(K - mp^k) \geq k_0$ alors, en appliquant (iii) avec $v = u = s = 0$ et $K - mp^k$ à la place de m, on obtient

$$\frac{\mathbf{A}_r(p(K-mp^k))}{\mathbf{A}_r(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(K-mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} \in p^{k_0+1}\frac{\mathbf{g}_{r+1}(K-mp^k)}{\mathbf{g}_r(0)}\mathcal{O}.$$

De plus, d'après (i) et (ii), $\mathbf{g}_r(0)$ est inversible dans $\mathcal{O}$ et, par hypothèse, on a $k_0 \geq 1$, donc on obtient bien (5.4.10) dans ce cas. Si en revanche $v_p(K - mp^k) \leq k_0 - 1$ alors, d'après (iii) avec $K - mp^k$ à la place de m, on obtient

$$\frac{\mathbf{A}_r(p(K-mp^k))}{\mathbf{A}_r(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(K-mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} \in p^{v_p(K-mp^k)+1}\mathbf{g}_{r+1}(K-mp^k)\mathcal{O} \subset p\mathbf{g}_{r+1}(K-mp^k)\mathcal{O},$$

ce qui achève la vérification de (5.4.10).

D'après le lemme 6, on a $\mathbf{g}_{r+1}(K - mp^k) \in p^{k_0}\mathcal{O}$. D'après (i) et (ii), on a de plus

$$\frac{\mathbf{A}_{r+1}(mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} \in \mathbf{g}_{r+1}(mp^k)\mathcal{O},$$

donc

$$\mathbf{A}_r(0)\mathbf{A}_{r+1}(0)\frac{\mathbf{A}_{r+1}(mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)}\left(\frac{\mathbf{A}_r(p(K-mp^k))}{\mathbf{A}_r(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(K-mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)}\right) \in p^{k_0+1}\mathbf{g}_{r+1}(mp^k)\mathcal{O}$$

et comme également

$$\frac{\mathbf{A}_{r+1}(K-mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} \in \mathbf{g}_{r+1}(K-mp^k)\mathcal{O} \subset \mathcal{O},$$

on a

$$\mathbf{A}_r(0)\mathbf{A}_{r+1}(0)\frac{\mathbf{A}_{r+1}(K-mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} \cdot \left(\frac{\mathbf{A}_r(mp^{k+1})}{\mathbf{A}_r(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(mp^k)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)}\right) \in p^{k+1}\mathbf{g}_{r+1}(mp^k)\mathcal{O}.$$

On a donc bien $\mathbf{S}_r(0, K, 0, p, mp^k) \in p^{k+1}\mathbf{g}_{r+1}(mp^k)\mathcal{O}$, ce qui achève la preuve du lemme. □

Enfin, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 8. *Soit $((\boldsymbol{A}_r)_{r\geq 0}, (\mathbf{g}_r)_{r\geq 0})$ un k_0-couple de Dwork avec $k_0 \geq 1$. Soit $a \in \{0, \dots, p-1\}$, $K \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$. Si, pour tout $s_0 < s$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $r \geq 0$, on a*

$$\boldsymbol{S}_r(a, K, s_0, p, mp^{k_0}) \in p^{s_0+k_0+1}\mathbf{g}_{s_0+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O} \tag{5.4.11}$$

et

$$\boldsymbol{S}_r(a, K, s_0, p, m) \in p^{s_0+1}\mathbf{g}_{s_0+r+1}(m)\mathcal{O}, \tag{5.4.12}$$

alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $r \geq 0$, on a $\boldsymbol{S}_r(a, K, s, p, m) \in p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O}$.

Démonstration. On va d'abord montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, tout $r \geq 1$ et tout $k \leq \min(s, k_0)$, on a $\mathbf{S}_r(a, K, s, p, m) \equiv \mathbf{S}_r(a, K, s-k, p, mp^k) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O}$. Pour cela, on va raisonner par récurrence sur k.

Si $k = 0$, il n'y a rien à montrer.

Supposons que $\min(s, k_0) \geq k \geq 1$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$\mathbf{S}_r(a, K, s, p, m) \equiv \mathbf{S}_r(a, K, s-k+1, p, mp^{k-1}) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O}. \tag{5.4.13}$$

Comme $\{mp^s, \dots, mp^s + p^{s-k+1} - 1\} = \bigcup_{v=0}^{p-1}\{mp^s + vp^{s-k}, \dots, mp^s + vp^{s-k} + p^{s-k} - 1\}$, on a

$$\mathbf{S}_r(a, K, s-k+1, p, mp^{k-1}) = \sum_{v=0}^{p-1} \mathbf{S}_r(a, K, s-k, p, v + mp^k). \tag{5.4.14}$$

Comme $s \geq k \geq 1$, on a $0 \leq s-k < s$ et on obtient, d'après (5.4.12), que, pour tout $v \in \{0, \dots, p-1\}$, on a $\mathbf{S}_r(a, K, s-k, p, v+mp^k) \in p^{s-k+1}\mathbf{g}_{s-k+r+1}(v+mp^k)\mathcal{O}$. Comme également $k \in \{1, \dots, k_0\}$ on obtient d'après (iv), que, pour tout $v \in \{1, \dots, p-1\}$, on a

$$\mathbf{g}_{s-k+r+1}(v + mp^k) \in p^k\mathbf{g}_{s-k+r+1}(mp^k)\mathcal{O} \subset p^k\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O}.$$

En utilisant ces informations dans (5.4.14), on obtient (il reste seulement le terme pour $v = 0$) :

$$\mathbf{S}_r(a, K, s-k+1, p, mp^{k-1}) \equiv \mathbf{S}_r(a, K, s-k, p, mp^k) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O},$$

ce qui, joint à (5.4.13), montre que

$$\mathbf{S}_r(a, K, s, p, m) \equiv \mathbf{S}_r(a, K, s-k, p, mp^k) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O}$$

et achève la récurrence sur k.

On a donc

$$\mathbf{S}_r(a, K, s, p, m) \equiv \mathbf{S}_r(a, K, s - \min(s, k_0), p, mp^{\min(s,k_0)}) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O}.$$

Si $s < k_0$, alors $\mathbf{S}_r(a, K, s, p, m) \equiv \mathbf{S}_r(a, K, 0, p, mp^s) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O}$. En appliquant le lemme 7 en $k = s$, puis (iv) en $k = s$, on obtient

$$\mathbf{S}_r(a, K, 0, p, mp^s) \in p^{s+1}\mathbf{g}_{r+1}(mp^s)\mathcal{O} \subset p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O}$$

et donc $\mathbf{S}_r(a,K,s,p,m) \in p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O}$, comme voulu.

Si maintenant $s \geq k_0$ alors

$$\mathbf{S}_r(a,K,s,p,m) \equiv \mathbf{S}_r(a,K,s-k_0,p,mp^{k_0}) \mod p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O}.$$

Or, comme $s \geq k_0 \geq 1$, on a $0 \leq s-k_0 < s$ et on obtient (d'après (5.4.11) et (iv) appliquée en $k=k_0$) que

$$\mathbf{S}_r(a,K,s-k_0,p,mp^{k_0}) \in p^{s-k_0+k_0+1}\mathbf{g}_{s-k_0+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O} \subset p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O},$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

5.4.2 Suite de la démonstration

Comme dit au début de la partie 5.1, le cas $k_0 = 0$ correspond au théorème J. Il nous suffit donc de démontrer le cas où il existe $k_0 \geq 1$ tel que les hypothèses (iii) et (iv) soient vérifiées. En particulier, on utilisera les lemmes 6, 7 et 8. La trame de la démonstration s'inspire de celle du théorème J, mais elle diffère assez sensiblement dans les détails.

On doit montrer que, pour tout $a \in \{0,\dots,p-1\}$, tous $m,s \in \mathbb{N}$, tout $r \geq 0$ et tout $K \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mathbf{S}_r(a,K,s,p,m) \in p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_r(a,K,s,p,mp^{k_0}) \in p^{s+k_0+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O}. \tag{5.4.15}$$

Pour tout $a \in \{0,\dots,p-1\}$, tout $j \in \mathbb{N}$, tout $r \geq 0$ et tout $K \in \mathbb{Z}$, on note

$$\mathbf{U}_r(a,K,p,j) := \mathbf{A}_r(a+p(K-j))\mathbf{A}_{r+1}(j) - \mathbf{A}_{r+1}(K-j)\mathbf{A}_r(a+jp),$$

de sorte que

$$\mathbf{S}_r(a,K,s,p,m) = \sum_{j=mp^s}^{(m+1)p^s-1} \mathbf{U}_r(a,K,p,j).$$

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, on note α_s l'assertion suivante : pour tout $a \in \{0,\dots,p-1\}$, tout $u \in \{0,\dots,s-1\}$, tout $m \in \mathbb{N}$, tout $r \geq 0$ et tout $K \in \mathbb{Z}$, on a les congruences

$$\mathbf{S}_r(a,K,u,p,m) \in p^{u+1}\mathbf{g}_{u+r+1}(m)\mathcal{O} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_r(a,K,u,p,mp^{k_0}) \in p^{u+k_0+1}\mathbf{g}_{u+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}.$$

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, et tout $t \in \{0,\dots,s\}$, on note $\beta_{t,s}$ l'assertion suivante : pour tout $a \in \{0,\dots,p-1\}$, tout $m \in \mathbb{N}$, tout $r \geq 0$ et tout $K \in \mathbb{Z}$, on a la congruence

$$\mathbf{S}_r(a,K+mp^{s+k_0},s,p,mp^{k_0}) \equiv \sum_{j=0}^{p^{s-t}-1} \frac{\mathbf{A}_{t+r+1}(j+mp^{s-t+k_0})}{\mathbf{A}_{t+r+1}(j)} \mathbf{S}_r(a,K,t,p,j) \mod p^{s+k_0+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}.$$

Nous allons maintenant énoncer trois lemmes permettant de montrer (5.4.15).

Lemme 9. *L'assertion α_1 est vraie.*

Lemme 10. *Pour tous $s, r, m \in \mathbb{N}$, tout $a \in \{0, \dots, p-1\}$, tout $j \in \{0, \dots, p^s - 1\}$ et tout $K \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\boldsymbol{U}_r(a, K + mp^{s+k_0}, p, j + mp^{s+k_0}) \equiv \frac{\boldsymbol{A}_{r+1}(j + mp^{s+k_0})}{\boldsymbol{A}_{r+1}(j)} \boldsymbol{U}_r(a, K, p, j) \mod p^{s+k_0+1} \mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}.$$

Lemme 11. *Pour tout $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, et tout $t \in \{0, \dots, s-1\}$, les assertions α_s et $\beta_{t,s}$ impliquent l'assertion $\beta_{t+1,s}$.*

Avant de prouver ces lemmes, nous allons montrer que leur validité implique bien (5.4.15). On va montrer que α_s est vraie pour tout $s \geq 1$ par récurrence sur s, ce qui donnera la conclusion du théorème 7. D'après le lemme 9, α_1 est vraie. Supposons α_s vraie pour un $s \geq 1$ fixé. On remarque que $\beta_{0,s}$ est l'assertion

$$\beta_{0,s} : \mathbf{S}_r(a, K + mp^{s+k_0}, s, p, mp^{k_0}) \equiv \sum_{j=0}^{p^s-1} \frac{\mathbf{A}_{r+1}(j + mp^{s+k_0})}{\mathbf{A}_{r+1}(j)} \mathbf{S}_r(a, K, 0, p, j) \mod p^{s+k_0+1} \mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}.$$

Comme $\mathbf{S}_r(a, K, 0, p, j) = \mathbf{U}_r(a, K, p, j)$, on a

$$\sum_{j=0}^{p^s-1} \frac{\mathbf{A}_{r+1}(j + mp^{s+k_0})}{\mathbf{A}_{r+1}(j)} \mathbf{S}_r(a, K, 0, p, j) = \sum_{j=0}^{p^s-1} \frac{\mathbf{A}_{r+1}(j + mp^{s+k_0})}{\mathbf{A}_{r+1}(j)} \mathbf{U}_r(a, K, p, j)$$

et, d'après le lemme 10, on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{p^s-1} \frac{\mathbf{A}_{r+1}(j + mp^{s+k_0})}{\mathbf{A}_{r+1}(j)} \mathbf{U}_r(a, K, p, j) \\ &\quad \equiv \sum_{j=0}^{p^s-1} \mathbf{U}_r(a, K + mp^{s+k_0}, p, j + mp^{s+k_0}) \mod p^{s+k_0+1} \mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O} \\ &\quad \equiv \mathbf{S}_r(a, K + mp^{s+k_0}, s, p, mp^{k_0}) \mod p^{s+k_0+1} \mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'assertion $\beta_{0,s}$ est vraie. On obtient alors, par le lemme 11, la validité de $\beta_{1,s}$. Par itération du lemme 11, on obtient finalement $\beta_{s,s}$, qui est l'assertion

$$\mathbf{S}_r(a, K + mp^{s+k_0}, s, p, mp^{k_0}) \equiv \frac{\mathbf{A}_{s+r+1}(mp^{k_0})}{\mathbf{A}_{s+r+1}(0)} \mathbf{S}_r(a, K, s, p, 0) \mod p^{s+k_0+1} \mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}. \tag{5.4.16}$$

Nous allons maintenant montrer que, pour tout $a \in \{0, \dots, p-1\}$, tout $s \in \mathbb{N}$, tout $r \geq 0$

et tout $K \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbf{S}_r(a, K, s, p, 0) \in p^{s+k_0+1}\mathcal{O}$. Soit $T \in \mathbb{N}$ tel que $(T+1)p^s > K$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{T} \mathbf{S}_r(a, K, s, p, m) &= \sum_{m=0}^{T} \sum_{j=mp^s}^{(m+1)p^s-1} (\mathbf{A}_r(a+p(K-j))\mathbf{A}_{r+1}(j) - \mathbf{A}_{r+1}(K-j)\mathbf{A}_r(a+jp)) \\ &= \sum_{j=0}^{K} (\mathbf{A}_r(a+p(K-j))\mathbf{A}_{r+1}(j) - \mathbf{A}_{r+1}(K-j)\mathbf{A}_r(a+jp)) \qquad (5.4.17) \\ &= 0, \qquad (5.4.18)\end{aligned}$$

où l'on a utilisé dans (5.4.17) le fait que $\mathbf{A}_r(\ell) = 0$ pour $\ell < 0$, et (5.4.18) a lieu car le terme de la somme (5.4.17) est changé en son opposé lorsque l'on change l'indice j en $K - j$.

Comme α_s est vraie, on obtient *via* le lemme 8 (avec $s_0 = u$) : $\mathbf{S}_r(a, K, s, p, m) \in p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathcal{O}$, ce qui prouve la première partie de l'assertion α_{s+1}. Si $m > 0$, alors d'après le lemme 6, on a $\mathbf{g}_{s+r+1}(m) \in p^{k_0}\mathcal{O}$. Donc, on obtient, pour tout $m > 0$, que $\mathbf{S}_r(a, K, s, p, m) \in p^{s+k_0+1}\mathcal{O}$. D'où également,

$$\mathbf{S}_r(a, K, s, p, 0) = -\sum_{m=1}^{T} \mathbf{S}_r(a, K, s, p, m) \in p^{s+k_0+1}\mathcal{O}.$$

De plus, d'après les conditions (i) et (ii), pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $r \geq 0$, on a

$$\frac{\mathbf{A}_{s+r+1}(mp^{k_0})}{\mathbf{A}_{s+r+1}(0)} \in \mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}.$$

Ainsi, d'après $\beta_{s,s}$ (*i.e.* (5.4.16)), pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $K \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$\mathbf{S}_r(a, K + mp^{s+k_0}, s, p, mp^{k_0}) \in p^{s+k_0+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}$$

et donc α_{s+1} est vraie. Ceci achève la récurrence sur s. Ainsi, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, α_s est vraie. Il ne reste plus qu'à démontrer les lemmes 9, 10 et 11.

Démonstration du lemme 9. En appliquant le lemme 7 avec $k = 0$ et $k = k_0$, on obtient respectivement $\mathbf{S}_r(a, K, 0, p, m) \in p\mathbf{g}_{r+1}(m)\mathcal{O}$ et $\mathbf{S}_r(a, K, 0, p, mp^{k_0}) \in p^{k_0+1}\mathbf{g}_{r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}$, ce qui n'est rien d'autre que l'assertion α_1 et termine la preuve du lemme 9. □

Démonstration du lemme 10. On a

$$\begin{aligned}&\mathbf{U}_r(a, K + mp^{s+k_0}, p, j + mp^{s+k_0}) - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(j + mp^{s+k_0})}{\mathbf{A}_{r+1}(j)}\mathbf{U}_r(a, K, p, j) \\ &= -\mathbf{A}_{r+1}(K-j)\mathbf{A}_r(a+jp)\left(\frac{\mathbf{A}_r(a + jp + mp^{s+k_0+1})}{\mathbf{A}_r(a+jp)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(j + mp^{s+k_0})}{\mathbf{A}_{r+1}(j)}\right). \qquad (5.4.19)\end{aligned}$$

Comme $a < p, j < p^s$ et $v_p(mp^{k_0}) \geq k_0$, l'hypothèse (iii) implique que le terme de droite de l'égalité (5.4.19) est dans

$$\mathbf{A}_{r+1}(K-j)\mathbf{A}_r(a+jp)p^{s+k_0+1}\frac{\mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})}{\mathbf{g}_r(a+jp)}\mathcal{O}.$$

De plus, d'après la condition (ii), on a

$$\mathbf{A}_r(a+jp) \in \mathbf{g}_r(a+jp)\mathcal{O} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_{r+1}(K-j) \in \mathbf{g}_{r+1}(K-j)\mathcal{O} \subset \mathcal{O}.$$

Ces estimations montrent que le membre de gauche de (5.4.19) est dans

$$p^{s+k_0+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O},$$

comme voulu. □

Démonstration du lemme 11. Pour $t < s$, on écrit $\beta_{t,s}$ sous la forme

$$\mathbf{S}_r(a, K+mp^{s+k_0}, s, p, mp^{k_0}) \equiv$$
$$\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{\mu=0}^{p^{s-t-1}-1}\frac{\mathbf{A}_{t+r+1}(i+\mu p+mp^{s-t+k_0})}{\mathbf{A}_{t+r+1}(i+\mu p)}\mathbf{S}_r(a,K,t,p,i+\mu p) \mod p^{s+k_0+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}. \tag{5.4.20}$$

On veut montrer $\beta_{t+1,s}$, qui s'écrit

$$\mathbf{S}_r(a, K+mp^{s+k_0}, s, p, mp^{k_0}) \equiv$$
$$\sum_{\mu=0}^{p^{s-t-1}-1}\frac{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mu+mp^{s-t+k_0-1})}{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mu)}\mathbf{S}_r(a,K,t+1,p,\mu) \mod p^{s+k_0+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}.$$

On remarque que $\mathbf{S}_r(a,K,t+1,p,\mu) = \sum_{i=0}^{p-1}\mathbf{S}_r(a,K,t,p,i+\mu p)$. Ainsi, en posant

$$X := \mathbf{S}_r(a,K+mp^{s+k_0},s,p,mp^{k_0}) - \sum_{\mu=0}^{p^{s-t-1}-1}\frac{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mu+mp^{s-t+k_0-1})}{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mu)}\sum_{i=0}^{p-1}\mathbf{S}_r(a,K,t,p,i+\mu p),$$

il ne reste plus qu'à montrer que $X \in p^{s+k_0+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}$. D'après $\beta_{t,s}$ sous la forme (5.4.20), on obtient que

$$X \equiv \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{\mu=0}^{p^{s-t-1}-1}\mathbf{S}_r(a,K,t,p,i+\mu p)$$
$$\times\left(\frac{\mathbf{A}_{t+r+1}(i+\mu p+mp^{s-t+k_0})}{\mathbf{A}_{t+r+1}(i+\mu p)} - \frac{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mu+mp^{s-t-1+k_0})}{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mu)}\right) \mod p^{s+k_0+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}.$$

Or, d'après l'hypothèse (iii) appliquée avec $s-t-1$ pour s et mp^{k_0} pour m, on a

$$\frac{\mathbf{A}_{t+r+1}(i+\mu p+mp^{s-t+k_0})}{\mathbf{A}_{t+r+1}(i+\mu p)}-\frac{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mu+mp^{s-t-1+k_0})}{\mathbf{A}_{t+r+2}(\mu)}\in p^{s-t+k_0}\frac{\mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})}{\mathbf{g}_{t+r+1}(i+\mu p)}\mathcal{O}.$$

De plus, comme $t<s$ et puisque α_s est vraie, on a $\mathbf{S}_r(a,K,t,p,i+\mu p)\in p^{t+1}\mathbf{g}_{t+r+1}(i+\mu p)\mathcal{O}$. Donc on a bien $X\in p^{s+k_0+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(mp^{k_0})\mathcal{O}$. Ceci achève la preuve du lemme 11 et donc celle du théorème 7. □

Chapitre 6

Préliminaires aux démonstrations des théorèmes 2 à 5

6.1 Une reformulation p-adique

Le but de cette partie est de donner une reformulation p-adique du problème d'intégralité des coefficients de Taylor des applications miroir, de type miroir et de leurs racines.

Soit e et f deux suites de vecteurs non nuls de $\mathbb{N}^d$ disjointes telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une famille à termes entiers. On fixe $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{e,f}$, $k \in \{1, \ldots, d\}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 1$, dans cette partie. On rappelle que l'on a $(z_k^{-1} q_{e,f,k}(\mathbf{z}))^{1/\alpha} \in \mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$, respectivement $(q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}))^{1/\alpha} \in \mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$, si et seulement si, pour tout nombre premier p, on a $(z_k^{-1} q_{e,f,k}(\mathbf{z}))^{1/\alpha} \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$, respectivement $(q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}))^{1/\alpha} \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$.

Nous allons définir, pour tout nombre premier p, des éléments $\Phi_{p,k}(\mathbf{a}+p\mathbf{K})$ et $\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}+p\mathbf{K})$ de $\mathbb{Q}_p$, où $\mathbf{a} \in \{0, \ldots, p-1\}^d$ et $\mathbf{K} \in \mathbb{N}^d$, et montrer que $(z_k^{-1} q_{e,f,k}(\mathbf{z}))^{1/\alpha} \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$, respectivement $(q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}))^{1/\alpha} \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$, si et seulement si, pour tout $\mathbf{a} \in \{0, \ldots, p-1\}^d$ et tout $\mathbf{K} \in \mathbb{N}^d$, on a $\Phi_{p,k}(\mathbf{a}+p\mathbf{K}) \in p\alpha\mathbb{Z}_p$, respectivement $\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}+p\mathbf{K}) \in p\alpha\mathbb{Z}_p$.

Pour alléger les notations, on notera $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{e,f}$, $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{e,f}$, $\Delta := \Delta_{e,f}$, $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_{e,f}$, $F := F_{e,f}$, $G_k := G_{e,f,k}$, $G_{\mathbf{L}} := G_{\mathbf{L},e,f}$, $q_k := q_{e,f,k}$ et $q_{\mathbf{L}} := q_{\mathbf{L},e,f}$, comme dans toute la suite de cette thèse. On fixe un premier p dans cette partie.

Avant de donner les preuves des théorèmes 2 à 5, on va les reformuler. Le résultat suivant est dû à Krattenthaler et Rivoal (voir [17, Lemma 2, p. 7]) ; c'est l'analogue en plusieurs variables d'un lemme classique dû à Dieudonné et Dwork (voir [14, Chap. IV, Sec. 2, Lemma 3] ; [19, Chap. 14, Sec. 2]).

Lemme 12. *Étant données deux séries formelles* $F(\mathbf{z}) \in 1 + \sum_{i=1}^d z_i\mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$ *et* $G(\mathbf{z}) \in \sum_{i=1}^d z_i\mathbb{Q}[[\mathbf{z}]]$, *on définit* $q(\mathbf{z}) := \exp(G(\mathbf{z})/F(\mathbf{z}))$. *On a alors* $q(\mathbf{z}) \in 1 + \sum_{i=1}^d z_i\mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$ *si et seulement si* $F(\mathbf{z})G(\mathbf{z}^p) - pF(\mathbf{z}^p)G(\mathbf{z}) \in p\sum_{i=1}^d z_i\mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$.

Le lemme 12 va nous permettre « d'éliminer » l'exponentielle dans les expressions $(z_k^{-1} q_k(\mathbf{z}))^{1/\alpha} = \exp(G_k(\mathbf{z})/\alpha F(\mathbf{z}))$ et $(q_{\mathbf{L}}(\mathbf{z}))^{1/\alpha} = \exp(G_{\mathbf{L}}(\mathbf{z})/\alpha F(\mathbf{z}))$. Comme Δ est positive sur $[0,1]^d$, on obtient, d'après le critère de Landau, que $\mathcal{Q}$ est une famille à termes

entiers et donc $F(\mathbf{z}) \in 1 + \sum_{i=1}^{d} z_i\mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$. De plus, d'après les identités (1.1.1) et (2.1.1) définissant les séries G_k et $G_{\mathbf{L}}$, on a $G_k(\mathbf{0}) = G_{\mathbf{L}}(\mathbf{0}) = 0$ et donc $G_k(\mathbf{z})/\alpha$ et $G_{\mathbf{L}}(\mathbf{z})/\alpha$ sont dans $\sum_{i=1}^{d} z_i\mathbb{Q}[[\mathbf{z}]]$. Ainsi, d'après le lemme 12, on a $(z_k^{-1}q_k(\mathbf{z}))^{1/\alpha} \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$, respectivement $(q_{\mathbf{L}}(\mathbf{z}))^{1/\alpha} \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$, si et seulement si on a $F(\mathbf{z})G_k(\mathbf{z}^p) - pF(\mathbf{z}^p)G_k(\mathbf{z}) \in p\alpha\sum_{i=1}^{d} z_i\mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$, respectivement $F(\mathbf{z})G_{\mathbf{L}}(\mathbf{z}^p) - pF(\mathbf{z}^p)G_{\mathbf{L}}(\mathbf{z}) \in p\alpha\sum_{i=1}^{d} z_i\mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$.

D'après l'identité (1.1.1) définissant G_k, le coefficient de $\mathbf{z}^{\mathbf{a}+p\mathbf{K}}$ dans $F(\mathbf{z})G_k(\mathbf{z}^p) - pF(\mathbf{z}^p)G_k(\mathbf{z})$ est

$$\Phi_{p,k}(\mathbf{a}+p\mathbf{K}) :=$$
$$\sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{j}\le\mathbf{K}} \mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a}+p\mathbf{j})\left(\sum_{i=1}^{q_1}\mathbf{e}_i^{(k)}(H_{(\mathbf{K}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{e}_i} - pH_{(\mathbf{a}+p\mathbf{j})\cdot\mathbf{e}_i}) - \sum_{i=1}^{q_2}\mathbf{f}_i^{(k)}(H_{(\mathbf{K}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{f}_i} - pH_{(\mathbf{a}+p\mathbf{j})\cdot\mathbf{f}_i})\right)$$

et, d'après l'identité (2.1.1) définissant $G_{\mathbf{L}}$, le coefficient de $\mathbf{z}^{\mathbf{a}+p\mathbf{K}}$ dans $F(\mathbf{z})G_{\mathbf{L}}(\mathbf{z}^p) - pF(\mathbf{z}^p)G_{\mathbf{L}}(\mathbf{z})$ est

$$\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}+\mathbf{K}p) := \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{j}\le\mathbf{K}} \mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)(H_{\mathbf{L}\cdot(\mathbf{K}-\mathbf{j})} - pH_{\mathbf{L}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)}).$$

On a donc $(z_k^{-1}q_k(\mathbf{z}))^{1/\alpha} \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$, respectivement $(q_{\mathbf{L}}(\mathbf{z}))^{1/\alpha} \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$, si et seulement si, pour tout $\mathbf{a} \in \{0,\dots,p-1\}^d$ et tout $\mathbf{K} \in \mathbb{N}^d$, on a $\Phi_{p,k}(\mathbf{a}+p\mathbf{K}) \in p\alpha\mathbb{Z}_p$, respectivement $\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}+p\mathbf{K}) \in p\alpha\mathbb{Z}_p$.

6.2 Un lemme technique

Le but de cette partie est de démontrer le lemme suivant que nous utilisons dans les démonstrations des points (i) et (ii) du théorème 2.

Lemme 13. *Soit e et f deux suites de vecteurs de $\mathbb{N}^d$ telles que $|e| = |f|$. Alors, pour tout $s \in \mathbb{N}$, tout $\mathbf{c} \in \{0,\dots,p^s-1\}^d$ et tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, on a*

$$\frac{\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{c})}{\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{c}p)}\frac{\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{c}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s)} \in 1+p^{s+1}\mathbb{Z}_p.$$

Pour démontrer le lemme 13, nous allons utiliser certaines propriétés de la fonction Gamma p-adique définie pour n entier, par $\Gamma_p(n) := (-1)^n\gamma_p(n)$, où $\gamma_p(n) := \prod_{\substack{k=1\\(k,p)=1}}^{n-1} k$. On peut étendre Γ_p à tout $\mathbb{Z}_p$ mais on n'en aura pas besoin ici.

Lemme 14. (i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'identité $\frac{(np)!}{n!} = p^n\gamma_p(1+np)$.*
(ii) *Pour tous $k,n,s \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma_p(k+np^s) \equiv \Gamma_p(k) \mod p^s$.*

Le point (i) du lemme 14 s'obtient en remarquant que $\gamma_p(1+np) = \frac{(np)!}{n!p^n}$. Le point (ii) du lemme 14 est le lemme 1.1 de [19]. Nous pouvons maintenant démontrer le lemme 13.

Démonstration du lemme 13. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{c}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s)} &= \prod_{i=1}^{q_1}\frac{(\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{c}p+\mathbf{m}p^{s+1}))!}{(\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s))!}\prod_{i=1}^{q_2}\frac{(\mathbf{f}_i\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s))!}{(\mathbf{f}_i\cdot(\mathbf{c}p+\mathbf{m}p^{s+1}))!}\\
&= \frac{\prod_{i=1}^{q_1}p^{\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s)}\gamma_p(1+p\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s))}{\prod_{i=1}^{q_2}p^{\mathbf{f}_i\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s)}\gamma_p(1+p\mathbf{f}_i\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s))}\\
&= p^{(|e|-|f|)\cdot\mathbf{m}p^s}\frac{\prod_{i=1}^{q_1}(p^{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{c}}(-1)^{1+p\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s)}\Gamma_p(1+p\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s)))}{\prod_{i=1}^{q_2}(p^{\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{c}}(-1)^{1+p\mathbf{f}_i\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s)}\Gamma_p(1+p\mathbf{f}_i\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s)))}\\
&= (-1)^{(|e|-|f|)\cdot\mathbf{m}p^{s+1}}\frac{\prod_{i=1}^{q_1}(p^{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{c}}(-1)^{1+\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{c}p}\,\Gamma_p(1+p\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s)))}{\prod_{i=1}^{q_2}(p^{\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{c}}(-1)^{1+\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{c}p}\,\Gamma_p(1+p\mathbf{f}_i\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s)))} \qquad (6.2.1)\\
&= \frac{\prod_{i=1}^{q_1}p^{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{c}}(-1)^{1+\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{c}p}}{\prod_{i=1}^{q_2}p^{\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{c}}(-1)^{1+\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{c}p}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{q_1}\Gamma_p(1+p\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s))}{\prod_{i=1}^{q_2}\Gamma_p(1+p\mathbf{f}_i\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s))}, \qquad (6.2.2)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité $|e|-|f|=\mathbf{0}$ dans (6.2.1) et (6.2.2) . D'après le point (ii) du lemme 14, pour tout $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$, on a $\Gamma_p(1+\mathbf{n}\cdot\mathbf{c}p+\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}p^{s+1})\equiv\Gamma_p(1+\mathbf{n}\cdot\mathbf{c}p) \mod p^{s+1}$. On obtient donc

$$\frac{\prod_{i=1}^{q_1}\Gamma_p(1+\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{c}p+\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{m}p^{s+1})}{\prod_{i=1}^{q_2}\Gamma_p(1+\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{c}p+\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{m}p^{s+1})}=\frac{\prod_{i=1}^{q_1}(\Gamma_p(1+\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{c}p)+O(p^{s+1}))}{\prod_{i=1}^{q_2}(\Gamma_p(1+\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{c}p)+O(p^{s+1}))},$$

où l'on note $x=O(p^k)$ lorsque $x\in p^k\mathbb{Z}_p$. De plus, par définition de Γ_p, pour tout $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$, on a $\Gamma_p(1+\mathbf{n}\cdot\mathbf{c}p)\in\mathbb{Z}_p^\times$. On obtient alors

$$\frac{\prod_{i=1}^{q_1}(\Gamma_p(1+\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{c}p)+O(p^{s+1}))}{\prod_{i=1}^{q_2}(\Gamma_p(1+\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{c}p)+O(p^{s+1}))}=\frac{\prod_{i=1}^{q_1}\Gamma_p(1+\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{c}p)}{\prod_{i=1}^{q_2}\Gamma_p(1+\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{c}p)}(1+O(p^{s+1}))$$

et ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{c}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{c}+\mathbf{m}p^s)} &= \frac{\prod_{i=1}^{q_1}p^{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{c}}(-1)^{1+\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{c}p}}{\prod_{i=1}^{q_2}p^{\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{c}}(-1)^{1+\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{c}p}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{q_1}\Gamma_p(1+\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{c}p)}{\prod_{i=1}^{q_2}\Gamma_p(1+\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{c}p)}(1+O(p^{s+1}))\\
&= \frac{\prod_{i=1}^{q_1}p^{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{c}}}{\prod_{i=1}^{q_2}p^{\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{c}}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{q_1}\gamma_p(1+\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{c}p)}{\prod_{i=1}^{q_2}\gamma_p(1+\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{c}p)}(1+O(p^{s+1}))\\
&= \frac{\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{c}p)}{\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{c})}(1+O(p^{s+1})).
\end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. □

Chapitre 7

Démonstration des théorèmes 4 et 5 et du cas (i) du théorème 2

On se place sous les hypothèses du théorème 2. On suppose de plus que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, on a $\Delta(\mathbf{x}) \geq 1$. Pour démontrer le point (i) du théorème 2, il nous faut montrer que, pour tout $\mathbf{L} \in \mathcal{E}$, on a $q_{\mathbf{L}}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$. Pour démontrer le théorème 4, il nous faut montrer que, si de plus $d = 1$, alors, pour tout $L \in \mathcal{E}$, on a $(q_L(z))^{1/D_L} \in \mathbb{Z}[[z]]$. Fixons un $\mathbf{L} \in \mathcal{E}$ dans cette partie. D'après la partie 6.1, il nous suffit de montrer que, pour tout nombre premier p, tout $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p-1\}^d$ et tout $\mathbf{K} \in \mathbb{N}^d$, on a $\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a} + p\mathbf{K}) \in p\alpha_d\mathbb{Z}_p$, où $\alpha_d := D_L$ si $d = 1$ et $\alpha_d := 1$ sinon.

7.1 Nouvelle reformulation du problème

Pour tout premier p, tout $s \in \mathbb{N}$, tout $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p-1\}^d$ et tous $\mathbf{K}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, on définit

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{K}, s, p, \mathbf{m}) := \sum_{\mathbf{m}p^s \leq \mathbf{j} \leq (\mathbf{m}+\mathbf{1})p^s - \mathbf{1}} (\mathcal{Q}(\mathbf{a} + \mathbf{j}p)\mathcal{Q}(\mathbf{K} - \mathbf{j}) - \mathcal{Q}(\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a} + (\mathbf{K} - \mathbf{j})p)),$$

où l'on pose $\mathcal{Q}(\mathbf{n}) = 0$ s'il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $n_i < 0$.

Le but de cette partie est de produire, pour tout nombre premier p, une fonction g_p de $\mathbb{N}^d$ dans $\mathbb{Z}_p$ telle que : si, pour tout premier p, tout $s \in \mathbb{N}$, tout $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p-1\}^d$ et tous $\mathbf{K}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, on a $S(\mathbf{a}, \mathbf{K}, s, p, \mathbf{m}) \in p^{s+1}g_p(\mathbf{m})\mathbb{Z}_p$, alors on a $\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a} + \mathbf{K}p) \in p\alpha_d\mathbb{Z}_p$. Démontrer le théorème 4 et le cas (i) du théorème 2 reviendra donc à minorer convenablement la valuation p-adique de $S(\mathbf{a}, \mathbf{K}, s, p, \mathbf{m})$ pour tout nombre premier p. Cette méthode de réduction est une adaptation de l'approche du problème faite par Dwork dans [10].

Une réécriture de $\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}+\mathbf{K}p)$ modulo $p\alpha_d\mathbb{Z}_p$

Cette étape est l'analogue d'une réécriture effectuée par Krattenthaler et Rivoal dans la partie 2 de [15]. On fixe un nombre premier p. Nous allons montrer que

$$\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}+\mathbf{K}p) \equiv -\sum_{\mathbf{0}\leq\mathbf{j}\leq\mathbf{K}} H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}}\left(\mathcal{Q}(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)\mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j}) - \mathcal{Q}(\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a}+(\mathbf{K}-\mathbf{j})p)\right) \mod p\alpha_d\mathbb{Z}_p. \tag{7.1.1}$$

Si $\mathbf{a}=\mathbf{K}=\mathbf{0}$, alors c'est évident. On suppose donc, dans cette partie, que $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ ou $\mathbf{K}\neq\mathbf{0}$. Pour tout $\mathbf{a}\in\{0,\dots,p-1\}^d$ et tout $\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d$, on a

$$\begin{aligned} pH_{\mathbf{L}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)} &= p\left(\sum_{i=1}^{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}p}\frac{1}{i}+\sum_{i=1}^{\mathbf{L}\cdot\mathbf{a}}\frac{1}{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}p+i}\right)\\ &\equiv p\left(\sum_{i=1}^{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}}\frac{1}{ip}+\sum_{i=1}^{\lfloor\mathbf{L}\cdot\mathbf{a}/p\rfloor}\frac{1}{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}p+ip}\right) \mod p\mathbb{Z}_p\\ &\equiv H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}}+\sum_{i=1}^{\lfloor\mathbf{L}\cdot\mathbf{a}/p\rfloor}\frac{1}{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}+i} \mod p\mathbb{Z}_p. \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

Nous avons besoin d'un résultat, que l'on démontrera plus loin à l'aide du lemme 17 énoncé en partie 7.1 :

Pour tout $\mathbf{a}\in\{0,\dots,p-1\}^d$, $\mathbf{K}\in\mathbb{N}^d$ et tout $\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d$, $\mathbf{0}\leq\mathbf{j}\leq\mathbf{K}$, tels que $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ ou $\mathbf{K}\neq\mathbf{0}$, on a

$$\mathcal{Q}(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)\sum_{i=1}^{\lfloor\mathbf{L}\cdot\mathbf{a}/p\rfloor}\frac{1}{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}+i}\in p\alpha_d\mathbb{Z}_p \tag{7.1.3}$$

et

$$\mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a}+p\mathbf{j})\in\alpha_d\mathbb{Z}_p. \tag{7.1.4}$$

En appliquant (7.1.3) et (7.1.4) à (7.1.2) on obtient que

$$\mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)pH_{\mathbf{L}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)} \equiv \mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}} \mod p\alpha_d\mathbb{Z}_p.$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}+\mathbf{K}p) &= \sum_{\mathbf{0}\leq\mathbf{j}\leq\mathbf{K}}\mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)(H_{\mathbf{L}\cdot(\mathbf{K}-\mathbf{j})}-pH_{\mathbf{L}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)})\\ &\equiv \sum_{\mathbf{0}\leq\mathbf{j}\leq\mathbf{K}}\mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)(H_{\mathbf{L}\cdot(\mathbf{K}-\mathbf{j})}-H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}}) \mod p\alpha_d\mathbb{Z}_p\\ &\equiv -\sum_{\mathbf{0}\leq\mathbf{j}\leq\mathbf{K}} H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}}\left(\mathcal{Q}(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)\mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j}) - \mathcal{Q}(\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a}+(\mathbf{K}-\mathbf{j})p)\right) \mod p\alpha_d\mathbb{Z}_p, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'équation (7.1.1) attendue.

On utilise maintenant un lemme combinatoire dû à Krattenthaler et Rivoal (voir [17, Lemma 5, p. 14]) qui nous permet d'écrire

$$\sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{j}\le\mathbf{K}} H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}}\left(\mathcal{Q}(\mathbf{a}+\mathbf{j}p)\mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j})-\mathcal{Q}(\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a}+(\mathbf{K}-\mathbf{j})p)\right)$$
$$=\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{m}\le(p^{r-s}-1)\mathbf{1}} W_{\mathbf{L}}(\mathbf{a},\mathbf{K},s,p,\mathbf{m}),$$

où r est tel que $p^{r-1}>\max(K_1,\dots,K_d)$ et

$$W_{\mathbf{L}}(\mathbf{a},\mathbf{K},s,p,\mathbf{m}):=S(\mathbf{a},\mathbf{K},s,p,\mathbf{m})(H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{m}p^s}-H_{\mathbf{L}\cdot\lfloor\mathbf{m}/p\rfloor p^{s+1}}).$$

Si l'on montre que, pour tout $s\in\mathbb{N}$ et tout $\mathbf{m}\in\mathbb{N}^d$, on a $W_{\mathbf{L}}(\mathbf{a},\mathbf{K},s,p,\mathbf{m})\in p\alpha_d\mathbb{Z}_p$, alors on aura bien $\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}+\mathbf{K}p)\in p\alpha_d\mathbb{Z}_p$, comme voulu.

Pour tout $\mathbf{m}\in\mathbb{N}^d$, on pose $\mu_p(\mathbf{m}):=\sum_{\ell=1}^{\infty}\mathbf{1}_{\mathcal{D}}(\{\mathbf{m}/p^\ell\})$ et $g_p(\mathbf{m}):=p^{\mu_p(\mathbf{m})}$, où $\mathbf{1}_{\mathcal{D}}$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{D}$. On utilise maintenant le lemme suivant que l'on démontre à la fin de cette partie.

Lemme 15. *Pour tout nombre premier p, tout $\mathbf{L}\in\mathcal{E}$, tout $\mathbf{m}\in\mathbb{N}^d$ et tout $s\in\mathbb{N}$, on a*

$$p^{s+1}g_p(\mathbf{m})\left(H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{m}p^s}-H_{\mathbf{L}\cdot\lfloor\mathbf{m}/p\rfloor p^{s+1}}\right)\in p\alpha_d\mathbb{Z}_p.$$

D'après le lemme 15, si on montre que, pour tout $\mathbf{a}\in\{0,\dots,p-1\}^d$, tous $\mathbf{K},\mathbf{m}\in\mathbb{N}^d$ et tout $s\in\mathbb{N}$, on a $S(\mathbf{a},\mathbf{K},s,p,\mathbf{m})\in p^{s+1}g_p(\mathbf{m})\mathbb{Z}_p$, alors on aura $(q_{\mathbf{L}}(\mathbf{z}))^{1/\alpha_d}\in\mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$, ce qui est la reformulation annoncée.

Démonstration de (7.1.4)

Nous allons énoncer un nouveau lemme permettant de démontrer (7.1.4) que l'on utilisera aussi dans la démonstration du lemme 15.

Lemme 16. *Supposons que $d=1$. Soit p un nombre premier et $\beta:=\lfloor\log_p(M_{e,f})\rfloor$. Pour tout $m\in\mathbb{N}$, $m\ge1$ et tout $\ell\in\{v_p(m)+1,\dots,v_p(m)+\beta\}$, on a $\{m/p^\ell\}\ge1/M_{e,f}$.*

Démonstration. On note $m=p^{v_p(m)}(a+pb)$ avec $a\in\{1,\dots,p-1\}$ et $b\in\mathbb{N}$. On note $b=\sum_{k=0}^{\infty}b_kp^k$, où $b_k\in\{0,\dots,p-1\}$. Pour tout $\ell\in\{v_p(m)+1,\dots,v_p(m)+\beta\}$, on a bien

$$\left\{\frac{m}{p^\ell}\right\}=\left\{\frac{a+bp}{p^{\ell-v_p(m)}}\right\}=\frac{a+p\sum_{k=0}^{\ell-v_p(m)-2}b_kp^k}{p^{\ell-v_p(m)}}\ge\frac{a}{p^{\ell-v_p(m)}}\ge\frac{a}{p^\beta}\ge\frac{1}{M_{e,f}}.$$

□

Démonstration de (7.1.4). Si $d\ge2$, alors $\alpha_d=1$ et il n'y a rien à montrer car $\mathcal{Q}$ est une famille à termes entiers. Supposons donc que $d=1$. Dans ce cas, on a $\alpha_d=D_L$. Soit $L\in\{1,\dots,M_{e,f}\}$, $\beta:=\lfloor\log_p(M_{e,f})\rfloor$, $a\in\{0,\dots,p-1\}$, $K\in\mathbb{N}$ et $j\in\{0,\dots,K\}$ tels que

$a \neq 0$ ou $K \neq 0$. Par définition, D_L est le plus petit multiple commun des entiers allant de 1 à $\lfloor M_{e,f}/L \rfloor$. Ainsi, pour tout $L \geq 1$, D_L divise D_1. Comme $v_p(D_1) = p^\beta$, il nous suffit de montrer que

$$\mathcal{Q}(K-j)\mathcal{Q}(a+jp) \in p^\beta \mathbb{Z}_p. \tag{7.1.5}$$

Si $K - j = 0$, alors $a + jp = a + Kp \neq 0$. Ainsi, on a $K - j \neq 0$ ou $a + jp \neq 0$. Supposons, par exemple, que $K - j \neq 0$. En appliquant le lemme 16 avec $K - j$ à la place de m, on obtient que, pour tout $\ell \in \{v_p(K-j)+1, \ldots, v_p(K-j)+\beta\}$, on a $\{(K-j)/p^\ell\} \geq 1/M_{e,f}$. Comme Δ est positive sur $\mathbb{R}$ et comme, pour tout $x \in [1/M_{\mathbf{e},\mathbf{f}}, 1[$, on a $\Delta(x) \geq 1$, on obtient

$$v_p(\mathcal{Q}(K-j)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{K-j}{p^\ell}\right\}\right) \geq \sum_{\ell=v_p(K-j)+1}^{v_p(K-j)+\beta} \Delta\left(\left\{\frac{K-j}{p^\ell}\right\}\right) \geq \beta.$$

De plus, d'après le critère de Landau, on a $\mathcal{Q}(a+jp) \in \mathbb{N}$ donc on a bien (7.1.5).

Si $K - j = 0$, alors $a + jp \neq 0$ et, de la même manière, le lemme 16 appliqué avec $a + jp$ à la place de m et le fait que $\mathcal{Q}(K-j) \in \mathbb{N}$ donnent bien (7.1.5). □

Démonstration de (7.1.3)

Nous allons énoncer un résultat permettant de démontrer (7.1.3) et le lemme 15.

Lemme 17. *Soit $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, $\mathbf{a} \in \{0, \ldots, p^s - 1\}^d$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$ et $\mathbf{L} \in \mathcal{E}$. Si on a $\lfloor \mathbf{L} \cdot \mathbf{a}/p^s \rfloor \geq 1$, alors, pour tout $u \in \{1, \ldots, \lfloor \mathbf{L} \cdot \mathbf{a}/p^s \rfloor\}$ et tout $\ell \in \{s, \ldots, s + v_p(\mathbf{L} \cdot \mathbf{m} + u) + v_p(\alpha_d)\}$, on a*

$$\left\{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{m}p^s}{p^\ell}\right\} \in \mathcal{D}.$$

Démonstration. On rappelle que $\mathcal{D}$ est l'ensemble des $\mathbf{x} \in [0,1[^d$ tels qu'il existe $\mathbf{d} \in \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{q_2}\}$ vérifiant $\mathbf{d} \cdot \mathbf{x} \geq 1$. On a $\left\{(\mathbf{a} + \mathbf{m}p^s)/p^\ell\right\} \in [0,1[^d$, il nous suffit donc de montrer que $\mathbf{L} \cdot \left\{(\mathbf{a} + \mathbf{m}p^s)/p^\ell\right\} \geq 1$. En effet, comme $\mathbf{L} \in \mathcal{E}$, il existe $\mathbf{d} \in \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{q_2}\}$ tel que $\mathbf{d} \geq \mathbf{L}$, ce qui donne bien

$$\mathbf{L} \cdot \left\{\frac{\mathbf{a} + p^s\mathbf{m}}{p^\ell}\right\} \geq 1 \Rightarrow \mathbf{d} \cdot \left\{\frac{\mathbf{a} + p^s\mathbf{m}}{p^\ell}\right\} \geq 1 \Rightarrow \left\{\frac{\mathbf{a} + p^s\mathbf{m}}{p^\ell}\right\} \in \mathcal{D}.$$

Soit $\ell \in \{s, \ldots, s + v_p(\mathbf{L} \cdot \mathbf{m} + u)\}$. On note $\mathbf{m} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{m}_j p^j$ avec $\mathbf{m}_j \in \{0, \ldots, p-1\}^d$. On a

$$\left\{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{m}p^s}{p^\ell}\right\} = \frac{\mathbf{a} + p^s \sum_{j=0}^{\ell-s-1} \mathbf{m}_j p^j}{p^\ell}.$$

On a que $p^{\ell-s}$ divise $(u + \mathbf{L} \cdot \mathbf{m})$ et donc $p^{\ell-s}$ divise

$$u + \mathbf{L} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{L} \cdot \left(\sum_{j=\ell-s}^{\infty} \mathbf{m}_j p^j\right) = u + \mathbf{L} \cdot \left(\sum_{j=0}^{\ell-s-1} \mathbf{m}_j p^j\right).$$

Ainsi, on obtient $p^{\ell-s} \leq u + \mathbf{L}\cdot\left(\sum_{j=0}^{\ell-s-1}\mathbf{m}_j p^j\right) \leq \frac{1}{p^s}\mathbf{L}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{L}\cdot\left(\sum_{j=0}^{\ell-s-1}\mathbf{m}_j p^j\right)$ et on a

$$1 \leq \frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{a} + p^s\mathbf{L}\cdot\left(\sum_{j=0}^{\ell-s-1}\mathbf{m}_j p^j\right)}{p^\ell} = \mathbf{L}\cdot\left\{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{m}p^s}{p^\ell}\right\}. \tag{7.1.6}$$

Si $d \geq 2$, alors $\alpha_d = 1$ et $v_p(\alpha_d) = 0$. Dans ce cas, l'inéquation (7.1.6) étant valable pour tout $\ell \in \{s, \ldots, s + v_p(\mathbf{L}\cdot\mathbf{m} + u)\}$, le lemme 17 est démontré.

Supposons maintenant que $d = 1$. On note $a := \mathbf{a}$, $m := \mathbf{m}$, $m_j := \mathbf{m}_j$ et $L := \mathbf{L}$. Ainsi, on a $\alpha_d = D_L$. En multipliant (7.1.6) par $M_{e,f}/L$, on obtient

$$\frac{M_{e,f}}{L} \leq M_{e,f}\frac{a + p^s\sum_{j=0}^{\ell-s-1} m_j p^j}{p^\ell}.$$

Comme $v_p(\alpha_d) = v_p(D_L) \leq \log_p(M_{e,f}/L)$, pour tout $i \in \{0, \ldots, v_p(\alpha_d)\}$, on a $p^i \leq M_{e,f}/L$ et donc

$$p^i \leq M_{e,f}\frac{a + p^s\sum_{j=0}^{\ell-s-1} m_j p^j}{p^\ell}.$$

Ainsi, pour tout $\ell \in \{s, \ldots, s + v_p(Lm + u)\}$ et tout $i \in \{0, \ldots, v_p(\alpha_d)\}$, on a

$$1 \leq M_{e,f}\frac{a + p^s\sum_{j=0}^{\ell-s-1} m_j p^j}{p^{\ell+i}} \leq M_{e,f}\frac{a + p^s\sum_{j=0}^{\ell+i-s-1} m_j p^j}{p^{\ell+i}} = M_{e,f}\left\{\frac{a+mp^s}{p^{\ell+i}}\right\}$$

et on obtient bien que, pour tout $\ell \in \{s, \ldots, s + v_p(Lm + u) + v_p(\alpha_d)\}$, on a $1/M_{e,f} \leq \left\{(a + mp^s)/p^\ell\right\} \in \mathcal{D}$, car $\mathcal{D} = [1/M_{e,f}, 1[$. □

Nous allons maintenant appliquer le lemme 17 pour démontrer (7.1.3).

Démonstration de (7.1.3). Soit $\mathbf{L} \in \mathcal{E}$, $\mathbf{a} \in \{0, \ldots, p-1\}^d$ et $j \in \mathbb{N}^d$. Il nous faut montrer que

$$\mathcal{Q}(\mathbf{a} + \mathbf{j}p)\sum_{i=1}^{\lfloor \mathbf{L}\cdot\mathbf{a}/p\rfloor}\frac{1}{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j} + i} \in p\alpha_d\mathbb{Z}_p.$$

Si $\lfloor \mathbf{L}\cdot\mathbf{a}/p\rfloor = 0$, c'est évident. Supposons donc que $\lfloor \mathbf{L}\cdot\mathbf{a}/p\rfloor \geq 1$. En appliquant le lemme 17 avec $s = 1$ et $\mathbf{m} = \mathbf{j}$, on obtient que, pour tout $i \in \{1, \ldots, \lfloor \mathbf{L}\cdot\mathbf{a}/p\rfloor\}$ et tout $\ell \in \{1, \ldots, 1 + v_p(i + \mathbf{L}\cdot\mathbf{j}) + v_p(\alpha_d)\}$, on a $\{(\mathbf{a} + \mathbf{j}p)/p^\ell\} \in \mathcal{D}$ et donc $\Delta((\mathbf{a} + \mathbf{j}p)/p^\ell) \geq 1$. Comme Δ est positive sur $\mathbb{R}^d$, cela donne

$$\begin{aligned} v_p(\mathcal{Q}(\mathbf{a} + \mathbf{j}p)) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{j}p}{p^\ell}\right\}\right) &\geq \sum_{\ell=1}^{1+v_p(\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}+i)+v_p(\alpha_d)}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{j}p}{p^\ell}\right\}\right) \\ &\geq 1 + v_p(\mathbf{L}\cdot\mathbf{j} + i) + v_p(\alpha_d), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de (7.1.3). □

Démonstration du lemme 15

Soit $\mathbf{L} \in \mathcal{E}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$ et $s \in \mathbb{N}$. Il nous faut montrer que

$$p^{s+1} g_p(\mathbf{m})(H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{m}p^s} - H_{\mathbf{L}\cdot\lfloor \mathbf{m}/p\rfloor p^{s+1}}) \in p\alpha_d \mathbb{Z}_p.$$

On écrit $\mathbf{m} = \mathbf{b}+\mathbf{q}p$ où $\mathbf{b} \in \{0,\dots,p-1\}^d$ et $\mathbf{q} \in \mathbb{N}^d$. On a alors $\mathbf{L}\cdot\mathbf{m}p^s = \mathbf{L}\cdot\mathbf{b}p^s + \mathbf{L}\cdot\mathbf{q}p^{s+1}$ et $\mathbf{L}\cdot\lfloor \mathbf{m}/p\rfloor p^{s+1} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{q}p^{s+1}$. Ainsi, on obtient

$$H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{m}p^s} - H_{\mathbf{L}\cdot\lfloor \mathbf{m}/p\rfloor p^{s+1}} = \sum_{j=1}^{\mathbf{L}\cdot\mathbf{b}p^s} \frac{1}{\mathbf{L}\cdot\mathbf{q}p^{s+1}+j} \equiv \sum_{i=1}^{\lfloor \mathbf{L}\cdot\mathbf{b}/p\rfloor} \frac{1}{\mathbf{L}\cdot\mathbf{q}p^{s+1}+ip^{s+1}} \mod \frac{1}{p^s}\mathbb{Z}_p$$

et donc

$$p^{s+1} g_p(\mathbf{m})(H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{m}p^s} - H_{\mathbf{L}\cdot\lfloor \mathbf{m}/p\rfloor p^{s+1}}) \equiv g_p(\mathbf{b}+\mathbf{q}p) \sum_{i=1}^{\lfloor \mathbf{L}\cdot\mathbf{b}/p\rfloor} \frac{1}{\mathbf{L}\cdot\mathbf{q}+i} \mod p g_p(\mathbf{m})\mathbb{Z}_p.$$

Il nous suffit de montrer que

$$g_p(\mathbf{b}+\mathbf{q}p) \sum_{i=1}^{\lfloor \mathbf{L}\cdot\mathbf{b}/p\rfloor} \frac{1}{\mathbf{L}\cdot\mathbf{q}+i} \in p\alpha_d\mathbb{Z}_p \tag{7.1.7}$$

et

$$g_p(\mathbf{m}) \in \alpha_d \mathbb{Z}_p. \tag{7.1.8}$$

Si $\lfloor \mathbf{L}\cdot\mathbf{b}/p\rfloor = 0$, alors (7.1.7) est évident. Supposons que $\lfloor \mathbf{L}\cdot\mathbf{b}/p\rfloor \geq 1$. En appliquant le lemme 17 avec $s=1$ et $\mathbf{q}$ à la place de $\mathbf{m}$, on obtient que, pour tout $i \in \{1,\dots,\lfloor \mathbf{L}\cdot\mathbf{b}/p\rfloor\}$ et tout $\ell \in \{1,\dots,1+v_p(i+\mathbf{L}\cdot\mathbf{q})+v_p(\alpha_d)\}$, on a $\{(\mathbf{b}+\mathbf{q}p)/p^\ell\} \in \mathcal{D}$, donc

$$\begin{aligned} v_p(g_p(\mathbf{b}+\mathbf{q}p)) = \mu_p(\mathbf{b}+\mathbf{q}p) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{D}}\left(\left\{\frac{\mathbf{b}+\mathbf{q}p}{p^\ell}\right\}\right) \\ &\geq \sum_{\ell=1}^{1+v_p(\mathbf{L}\cdot\mathbf{q}+i)+v_p(\alpha_d)} \mathbf{1}_{\mathcal{D}}\left(\left\{\frac{\mathbf{b}+\mathbf{q}p}{p^\ell}\right\}\right) \geq 1+v_p(\mathbf{L}\cdot\mathbf{q}+i)+v_p(\alpha_d) \end{aligned}$$

et on a bien (7.1.7).

Montrons maintenant (7.1.8). Si $d \geq 2$, alors $\alpha_d = 1$ et il n'y a rien à montrer. Supposons donc que $d=1$ et notons $m := \mathbf{m}$, $L := \mathbf{L}$ et $\beta := \lfloor \log_p(M_{e,f})\rfloor$, de sorte que $v_p(\alpha_d) = v_p(D_L) \leq \beta$. D'après le lemme 16, pour tout $\ell \in \{v_p(m)+1,\dots,v_p(m)+\beta\}$, on a $\{m/p^\ell\} \geq 1/M_{\mathbf{e},\mathbf{f}}$. On obtient

$$v_p(g_p(m)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{m}{p^\ell}\right\}\right) \geq \sum_{\ell=v_p(m)+1}^{v_p(m)+\beta} \mathbf{1}_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{m}{p^\ell}\right\}\right) \geq \beta \geq v_p(\alpha_d).$$

ce qui achève la preuve de (7.1.8) et donc celle du lemme 15.

7.2 Application du théorème 6

Nous allons utiliser le théorème 6 pour terminer les démonstrations du théorème 4 et du cas (i) du théorème 2. Nous allons montrer dans les parties suivantes qu'en posant $\mathbf{A}_r = \mathcal{Q}$ et $\mathbf{g}_r = g_p$ pour tout $r \geq 0$, alors les suites $(\mathbf{A}_r)_{r\geq 0}$ et $(\mathbf{g}_r)_{r\geq 0}$ vérifient les points (i), (ii) et (iii) du théorème 6. Ainsi, on obtiendra bien que $S(\mathbf{a}, \mathbf{K}, s, p, \mathbf{m}) \in p^{s+1} g_p(\mathbf{m})\mathbb{Z}_p$, comme voulu.

Dans les parties suivantes, on vérifie les hypothèses d'application du théorème 6.

7.2.1 Vérification des conditions (i) et (ii) du théorème 6

On fixe p un nombre premier et on note $g := g_p$ et $\mu := \mu_p$. Pour tout $r \geq 0$, on pose $\mathbf{A}_r = \mathcal{Q}$ et $\mathbf{g}_r = g$. On va montrer dans cette partie que les suites $(\mathbf{A}_r)_{r\geq 0}$ et $(\mathbf{g}_r)_{r\geq 0}$ vérifient les conditions (i) et (ii) du théorème 6.

Pour tout $r \geq 0$, on a $|\mathbf{A}_r(\mathbf{0})|_p = |\mathcal{Q}(\mathbf{0})|_p = 1$. De plus, pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, on a $v_p(g(\mathbf{m})) = \mu(\mathbf{m}) \geq 0$, donc on a bien $g(\mathbf{m}) \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. Il ne reste plus qu'à montrer que $A(\mathbf{m}) \in g(\mathbf{m})\mathbb{Z}_p$, ce qui revient donc à montrer qu'on a $\mu_p(\mathbf{m}) \leq v_p(\mathcal{Q}(\mathbf{m}))$. C'est bien le cas puisque, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 1$, on a $\Delta(\mathbf{m}/p^\ell) = \Delta(\{\mathbf{m}/p^\ell\}) \geq \mathbf{1}_{\mathcal{D}}(\{\mathbf{m}/p^\ell\})$, car $\Delta(\mathbf{x}) \geq 1$ pour $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$.

7.2.2 Vérification de la condition (iii) du théorème 6

On fixe un nombre premier p et on pose

$$\mathcal{N} := \bigcup_{t\geq 1} \left(\left\{ \mathbf{n} \in \{0, \dots, p^t - 1\}^d \,:\, \forall \ell \in \{1, \dots, t\}, \left\{ \frac{\mathbf{n}}{p^\ell} \right\} \in \mathcal{D} \right\} \times \{t\} \right).$$

Vérification du point (b) du théorème 6

Soit $(\mathbf{n}, t) \in \mathcal{N}$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$. On doit montrer que $g(\mathbf{n} + p^t\mathbf{m}) \in p^t g(\mathbf{m})\mathbb{Z}_p$. On a

$$\begin{aligned} v_p(g(\mathbf{n} + p^t\mathbf{m})) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \left(\left\{ \frac{\mathbf{n} + p^t\mathbf{m}}{p^\ell} \right\} \right) &= \sum_{\ell=1}^{t} \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \left(\left\{ \frac{\mathbf{n}}{p^\ell} \right\} \right) + \sum_{\ell=t+1}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \left(\left\{ \frac{\mathbf{n} + p^t\mathbf{m}}{p^\ell} \right\} \right) \\ &= t + \sum_{\ell=t+1}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \left(\left\{ \frac{\mathbf{n} + p^t\mathbf{m}}{p^\ell} \right\} \right). \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

Notons $\mathbf{m} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{m}_k p^k$, où les $\mathbf{m}_k \in \{0, \dots, p-1\}^d$ sont nuls sauf pour un nombre fini de k. Pour tout $\ell \geq t+1$, on a

$$\left\{ \frac{\mathbf{n} + p^t\mathbf{m}}{p^\ell} \right\} = \frac{\mathbf{n} + p^t \left(\sum_{k=0}^{\ell-t-1} \mathbf{m}_k p^k \right)}{p^\ell} \geq \frac{p^t \left(\sum_{k=0}^{\ell-t-1} \mathbf{m}_k p^k \right)}{p^\ell} = \left\{ \frac{\mathbf{m}}{p^{\ell-t}} \right\}.$$

Ainsi, pour tout $\ell \geq t+1$, si $\left\{\mathbf{m}/p^{\ell-t}\right\} \in \mathcal{D}$, alors il existe $\mathbf{L} \in \mathcal{E}$ tel que $1 \leq \mathbf{L}\cdot\left\{\mathbf{m}/p^{\ell-t}\right\} \leq \mathbf{L}\cdot\left\{(\mathbf{n}+p^t\mathbf{m})/p^\ell\right\}$, ce qui donne $\left\{(\mathbf{n}+p^t\mathbf{m})/p^\ell\right\} \in \mathcal{D}$. On obtient

$$\sum_{\ell=t+1}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{D}}\left(\left\{\frac{\mathbf{n}+p^t\mathbf{m}}{p^\ell}\right\}\right) \geq \sum_{\ell=t+1}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{D}}\left(\left\{\frac{\mathbf{m}}{p^{\ell-t}}\right\}\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{D}}\left(\left\{\frac{\mathbf{m}}{p^\ell}\right\}\right) = v_p(g(\mathbf{m})),$$

ce qui, joint à (7.2.1), donne bien $v_p(g(\mathbf{n}+p^t\mathbf{m})) \geq t+v_p(g(\mathbf{m}))$, *i.e.* $g(\mathbf{n}+p^t\mathbf{m}) \in p^t g(\mathbf{m})\mathbb{Z}_p$, comme voulu.

Vérification du point (a_2) du théorème 6

Soit $s \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u} \in \Psi_s(\mathcal{N})$ et $\mathbf{v} \in \{0,\dots,p-1\}^d$ tels que $\mathbf{v}+p\mathbf{u} \notin \Psi_{s+1}(\mathcal{N})$. On doit montrer que

$$\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{u}+p^s\mathbf{m})}{\mathcal{Q}(\mathbf{u})} \in p^{s+1}\frac{g(\mathbf{m})}{g(\mathbf{v}+p\mathbf{u})}\mathbb{Z}_p. \tag{7.2.2}$$

Dans un premier temps, nous donnons une autre expression pour

$$\Psi_s(\mathcal{N}) = \{\mathbf{u} \in \{0,\dots,p^s-1\}^d \,:\, \forall(\mathbf{n},t) \in \mathcal{N}, t \leq s, \forall \mathbf{j} \in \{0,\dots,p^{s-t}-1\}^d, \mathbf{u} \neq \mathbf{j}+p^{s-t}\mathbf{n}\}.$$

Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 18. *Soit $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, et $\mathbf{u} \in \{0,\dots,p^s-1\}^d$. On note $\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{s-1} \mathbf{u}_k p^k$, avec $\mathbf{u}_k \in \{0,\dots,p-1\}^d$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *On a $\{\mathbf{u}/p^s\} \in \mathcal{D}$.*

(2) *Il existe $(\mathbf{n},t) \in \mathcal{N}, t \leq s$ et $\mathbf{j} \in \{0,\dots,p^{s-t}-1\}^d$ tels que $\mathbf{u} = \mathbf{j}+p^{s-t}\mathbf{n}$.*

Démonstration du lemme 18. (1) $\Rightarrow$ (2) : Pour tout $s \geq 1$, tout $\mathbf{u} \in \{0,\dots,p^s-1\}^d$ tel que $\{\mathbf{u}/p^s\} \in \mathcal{D}$ et tout $i \in \{0,\dots,s-1\}$, on note $\mathcal{A}_{s,i}(\mathbf{u})$ l'assertion : pour tout $\ell \in \{1,\dots,s-i\}$, on a $\left\{\left(\sum_{k=i}^{s-1} \mathbf{u}_k p^{k-i}\right)/p^\ell\right\} \in \mathcal{D}$.

Pour tout $s \geq 1$, on note $\mathcal{B}_s$ l'assertion : pour tout $\mathbf{u} \in \{0,\dots,p^s-1\}^d$ tel que $\{\mathbf{u}/p^s\} \in \mathcal{D}$, il existe $i \in \{0,\dots,s-1\}$, tel que $\mathcal{A}_{s,i}(\mathbf{u})$ est vraie.

Dans un premier temps, nous allons montrer par récurrence sur s que, pour tout $s \geq 1$, $\mathcal{B}_s$ est vraie.

Si $s=1$, alors, pour tout $\mathbf{u} \in \{0,\dots,p-1\}^d$ tel que $\{\mathbf{u}/p\} \in \mathcal{D}$, l'assertion $\mathcal{A}_{1,0}(\mathbf{u})$ n'est autre que $\{\mathbf{u}/p\} \in \mathcal{D}$ et est donc vraie. Ainsi, $\mathcal{B}_1$ est vraie.

Soit $s \geq 2$ tel que $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_{s-1}$ soient vraies, soit $\mathbf{u} \in \{0,\dots,p^s-1\}^d$ tel que $\{\mathbf{u}/p^s\} \in \mathcal{D}$ et tel que $\mathcal{A}_{s,1}(\mathbf{u}),\dots,\mathcal{A}_{s,s-1}(\mathbf{u})$ soient fausses. Nous allons montrer que, dans ce cas, l'assertion $\mathcal{A}_{s,0}(\mathbf{u})$ est vraie ce qui prouvera que $\mathcal{B}_s$ est vraie et achèvera la récurrence sur s.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\ell \in \{1,\dots,s\}$ tel que

$$\mathbf{a}_\ell := \frac{\sum_{k=0}^{\ell-1} \mathbf{u}_k p^k}{p^\ell} = \left\{\frac{\sum_{k=0}^{s-1} \mathbf{u}_k p^k}{p^\ell}\right\} \notin \mathcal{D}.$$

On a en fait $\ell \in \{1, \dots, s-1\}$ car $\{\mathbf{u}/p^s\} \in \mathcal{D}$. Pour tout $\mathbf{L} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{q_2}\}$, on a $\mathbf{L} \cdot \mathbf{a}_\ell < 1$. On écrit

$$\left\{\frac{\mathbf{u}}{p^s}\right\} = \frac{\mathbf{u}}{p^s} = \frac{p^\ell \mathbf{a}_\ell + p^\ell \sum_{k=\ell}^{s-1} \mathbf{u}_k p^{k-\ell}}{p^s} = \frac{\mathbf{a}_\ell}{p^{s-\ell}} + \frac{\sum_{k=\ell}^{s-1} \mathbf{u}_k p^{k-\ell}}{p^{s-\ell}}.$$

Comme $\{\mathbf{u}/p^s\} \in \mathcal{D}$, il existe $\mathbf{L} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{q_2}\}$ tel que

$$1 \leq \mathbf{L} \cdot \left\{\frac{\mathbf{u}}{p^s}\right\} = \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{a}_\ell}{p^{s-\ell}} + \mathbf{L} \cdot \frac{\sum_{k=\ell}^{s-1} \mathbf{u}_k p^{k-\ell}}{p^{s-\ell}} < \frac{1}{p^{s-\ell}} + \mathbf{L} \cdot \frac{\sum_{k=\ell}^{s-1} \mathbf{u}_k p^{k-\ell}}{p^{s-\ell}},$$

ce qui donne que $\mathbf{L} \cdot \left(\sum_{k=\ell}^{s-1} \mathbf{u}_k p^{k-\ell}\right) > p^{s-\ell} - 1$. Comme $\mathbf{L} \cdot \left(\sum_{k=\ell}^{s-1} \mathbf{u}_k p^{k-\ell}\right)$ est un entier, on obtient $\mathbf{L} \cdot \left(\sum_{k=\ell}^{s-1} \mathbf{u}_k p^{k-\ell}\right) \geq p^{s-\ell}$, *i.e.*

$$\left\{\frac{\sum_{k=\ell}^{s-1} \mathbf{u}_k p^{k-\ell}}{p^{s-\ell}}\right\} \in \mathcal{D}.$$

En particulier, on a $\ell < s$. On note $\mathbf{v} := \sum_{k=\ell}^{s-1} \mathbf{u}_k p^{k-\ell} \in \{0, \dots, p^{s-\ell} - 1\}^d$. On a donc $\{\mathbf{v}/p^{s-\ell}\} \in \mathcal{D}$ et, en appliquant $\mathcal{B}_{s-\ell}$, on obtient qu'il existe $i \in \{0, \dots, s-\ell-1\}$ tel que $\mathcal{A}_{s-\ell,i}(\mathbf{v})$ est vraie, *i.e.*, pour tout $r \in \{1, \dots, s-\ell-i\}$, on a

$$\left\{\frac{\sum_{k=i}^{s-\ell-1} \mathbf{v}_k p^{k-i}}{p^r}\right\} \in \mathcal{D}.$$

Or, pour tout k, on a $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_{\ell+k}$ et donc $\sum_{k=i}^{s-\ell-1} \mathbf{v}_k p^{k-i} = \sum_{k=i+\ell}^{s-1} \mathbf{u}_k p^{k-i-\ell}$. Ainsi, l'assertion $\mathcal{A}_{s-\ell,i}(\mathbf{v})$ devient : pour tout $r \in \{1, \dots, s-\ell-i\}$, on a

$$\left\{\frac{\sum_{k=i+\ell}^{s-1} \mathbf{u}_k p^{k-i-\ell}}{p^r}\right\} \in \mathcal{D};$$

qui n'est autre que l'assertion $\mathcal{A}_{s,i+\ell}(\mathbf{u})$. Comme on a supposé que $\mathcal{A}_{s,1}(\mathbf{u}), \dots, \mathcal{A}_{s,s-1}(\mathbf{u})$ sont fausses, on obtient une contradiction. Ainsi $\mathcal{A}_{s,0}(\mathbf{u})$ est vraie donc $\mathcal{B}_s$ l'est aussi, ce qui achève la récurrence sur s.

Comme $\{\mathbf{u}/p^s\} \in \mathcal{D}$, l'assertion $\mathcal{B}_s$ donne qu'il existe $i \in \{0, \dots, s-1\}$ tel que $\mathcal{A}_{s,i}(\mathbf{u})$ est vraie, *i.e.* pour tout $\ell \in \{1, \dots, s-i\}$, on a $\left\{\left(\sum_{k=i}^{s-1} p^{k-i} \mathbf{u}_k\right)/p^\ell\right\} \in \mathcal{D}$. On a donc

$$\left(\sum_{k=i}^{s-1} p^{k-i} \mathbf{u}_k, s-i\right) \in \mathcal{N} \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = \sum_{k=0}^{i-1} p^k \mathbf{u}_k + p^i \sum_{k=i}^{s-1} p^{k-i} \mathbf{u}_k.$$

Ainsi, le point (2) est vérifié avec $s-i$ à la place de t, $\sum_{k=i}^{s-1} p^{k-i} \mathbf{u}_k$ à la place de $\mathbf{n}$ et $\sum_{k=0}^{i-1} p^k \mathbf{u}_k$ à la place de $\mathbf{j}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : On a

$$\left\{\frac{\mathbf{u}}{p^s}\right\} = \frac{\mathbf{u}}{p^s} = \frac{\mathbf{j} + p^{s-t}\mathbf{n}}{p^s} \geq \frac{\mathbf{n}}{p^t} = \left\{\frac{\mathbf{n}}{p^t}\right\} \in \mathcal{D}$$

et donc $\{\mathbf{u}/p^s\} \in \mathcal{D}$, comme voulu. □

D'après le lemme 18, on obtient que

$$\Psi_s(\mathcal{N}) = \{\mathbf{u} \in \{0, \dots, p^s - 1\}^d \,:\, \{\mathbf{u}/p^s\} \notin \mathcal{D}\}. \tag{7.2.3}$$

Ainsi, pour tout $\mathbf{u} \in \Psi_s(\mathcal{N})$ et tout $\ell \geq s$, on a $\{\mathbf{u}/p^\ell\} = \mathbf{u}/p^\ell \leq \mathbf{u}/p^s = \{\mathbf{u}/p^s\}$, ce qui donne que, pour tout $\mathbf{L} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{q_2}\}$ et tout $\ell \geq s$, on a $\mathbf{L} \cdot \{\mathbf{u}/p^\ell\} \leq \mathbf{L} \cdot \{\mathbf{u}/p^s\} < 1$ et donc $\{\mathbf{u}/p^\ell\} \notin \mathcal{D}$. On obtient que, pour tout $\ell \geq s$, on a $\Delta(\{\mathbf{u}/p^\ell\}) = 0$ et donc

$$v_p\left(\mathcal{Q}(\mathbf{u})\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{u}}{p^\ell}\right\}\right) = \sum_{\ell=1}^{s} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{u}}{p^\ell}\right\}\right).$$

De plus, on a

$$v_p\left(\mathcal{Q}(\mathbf{u} + p^s\mathbf{m})\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{u} + p^s\mathbf{m}}{p^\ell}\right\}\right) = \sum_{\ell=1}^{s} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{u}}{p^\ell}\right\}\right) + \sum_{\ell=s+1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{u} + p^s\mathbf{m}}{p^\ell}\right\}\right),$$

ce qui donne

$$v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{u} + p^s\mathbf{m})}{\mathcal{Q}(\mathbf{u})}\right) = \sum_{\ell=s+1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{u} + p^s\mathbf{m}}{p^\ell}\right\}\right). \tag{7.2.4}$$

On note $\mathbf{m} = \sum_{k=0}^{\infty} p^k \mathbf{m}_k$, avec $\mathbf{m}_k \in \{0, \dots, p-1\}^d$. Pour tout $\ell \geq s+1$, on a

$$\left\{\frac{\mathbf{u} + p^s\mathbf{m}}{p^\ell}\right\} = \frac{\mathbf{u} + p^s \sum_{k=0}^{\ell-1-s} p^k \mathbf{m}_k}{p^\ell} \geq \frac{\sum_{k=0}^{\ell-1-s} p^k \mathbf{m}_k}{p^{\ell-s}} = \left\{\frac{\mathbf{m}}{p^{\ell-s}}\right\}$$

et donc

$$\sum_{\ell=s+1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{u} + p^s\mathbf{m}}{p^\ell}\right\}\right) \geq \sum_{\ell=s+1}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{D}}\left(\left\{\frac{\mathbf{u} + p^s\mathbf{m}}{p^\ell}\right\}\right) \tag{7.2.5}$$

$$\geq \sum_{\ell=s+1}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{D}}\left(\left\{\frac{\mathbf{m}}{p^{\ell-s}}\right\}\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{D}}\left(\left\{\frac{\mathbf{m}}{p^\ell}\right\}\right) = v_p(g(\mathbf{m})), \tag{7.2.6}$$

où l'inégalité (7.2.5) vient du fait que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, on a $\Delta(\mathbf{x}) \geq 1$. En utilisant (7.2.6) dans (7.2.4), on obtient

$$v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{u} + p^s\mathbf{m})}{\mathcal{Q}(\mathbf{u})}\right) \geq v_p(g(\mathbf{m})).$$

Ainsi, afin de vérifier le point (a_2), il nous suffit de montrer que, pour tout $\mathbf{u} \in \Psi_s(\mathcal{N})$ et tout $\mathbf{v} \in \{0, \dots, p-1\}^d$ tels que $\mathbf{v} + p\mathbf{u} \notin \Psi_{s+1}(\mathcal{N})$, on a $g(\mathbf{v} + p\mathbf{u}) \in p^{s+1}\mathbb{Z}_p$.

On écrit $\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{s-1} p^k \mathbf{u}_k$, avec $\mathbf{u}_k \in \{0, \dots, p-1\}^d$. On a $\{(\mathbf{v} + p\mathbf{u})/p\} = \mathbf{v}/p$ et, pour tout $\ell \geq 2$, on a

$$\left\{\frac{\mathbf{v} + p\mathbf{u}}{p^\ell}\right\} = \frac{\mathbf{v} + p\sum_{k=0}^{\ell-2} p^k \mathbf{u}_k}{p^\ell}.$$

On obtient

$$v_p(g(\mathbf{v}+p\mathbf{u})) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{D}}\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+p\mathbf{u}}{p^\ell}\right\}\right) \geq \mathbf{1}_{\mathcal{D}}\left(\frac{\mathbf{v}}{p}\right) + \sum_{\ell=2}^{s+1} \mathbf{1}_{\mathcal{D}}\left(\frac{\mathbf{v}+p\sum_{k=0}^{\ell-2} p^k\mathbf{u}_k}{p^\ell}\right).$$

Ainsi, si on montre que $\mathbf{v}/p \in \mathcal{D}$ et que $\left(\mathbf{v}+p\sum_{k=0}^{\ell-2} p^k\mathbf{u}_k\right)/p^\ell \in \mathcal{D}$ pour tout $\ell \in \{2,\dots,s+1\}$, alors on aura bien $v_p(g(\mathbf{v}+p\mathbf{u})) \geq s+1$.

– Montrons que $\mathbf{v}/p \in \mathcal{D}$.

Comme $\mathbf{v}+p\mathbf{u} \notin \Psi_{s+1}(\mathcal{N})$, on obtient, d'après (7.2.3), que $\{(\mathbf{v}+p\mathbf{u})/p^{s+1}\} \in \mathcal{D}$. Il existe donc $\mathbf{L} \in \{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{q_1},\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_{q_2}\}$ tel que $\mathbf{L}\cdot\{(\mathbf{v}+p\mathbf{u})/p^{s+1}\} \geq 1$. On obtient

$$1 \leq \mathbf{L}\cdot\frac{\mathbf{v}+p\sum_{k=0}^{s-1} p^k\mathbf{u}_k}{p^{s+1}} = \mathbf{L}\cdot\frac{\mathbf{v}}{p^{s+1}} + \mathbf{L}\cdot\frac{\sum_{k=0}^{s-1} p^k\mathbf{u}_k}{p^s} = \mathbf{L}\cdot\frac{\mathbf{v}}{p^{s+1}} + \mathbf{L}\cdot\left\{\frac{\mathbf{u}}{p^s}\right\}. \tag{7.2.7}$$

Comme $\mathbf{u} \in \Psi_s(\mathcal{N})$, on a $\{\mathbf{u}/p^s\} \notin \mathcal{D}$ et donc $\mathbf{L}\cdot\{\mathbf{u}/p^s\} < 1$. On a $\mathbf{L}\cdot\{\mathbf{u}/p^s\} \in \frac{1}{p^s}\mathbb{N}$ donc $\mathbf{L}\cdot\{\mathbf{u}/p^s\} \leq (p^s-1)/p^s$ et on obtient, *via* l'inégalité (7.2.7), que $\mathbf{L}\cdot\mathbf{v}/p^{s+1} \geq 1/p^s$, *i.e.* $\mathbf{L}\cdot\mathbf{v}/p \geq 1$. Ainsi, on a bien $\mathbf{v}/p \in \mathcal{D}$.

– Montrons que, pour tout $\ell \in \{2,\dots,s+1\}$, on a $\left(\mathbf{v}+p\sum_{k=0}^{\ell-2} p^k\mathbf{u}_k\right)/p^\ell \in \mathcal{D}$.

On suppose que $s \geq 1$. Soit $\ell \in \{2,\dots,s+1\}$. On a

$$1 \leq \mathbf{L}\cdot\frac{\mathbf{v}+p\sum_{k=0}^{s-1} p^k\mathbf{u}_k}{p^{s+1}} = \mathbf{L}\cdot\frac{\mathbf{v}+p\sum_{k=0}^{\ell-2} p^k\mathbf{u}_k}{p^{s+1}} + \mathbf{L}\cdot\frac{p\sum_{k=\ell-1}^{s-1} p^k\mathbf{u}_k}{p^{s+1}}. \tag{7.2.8}$$

On a $\mathbf{u} \in \Psi_s(\mathcal{N})$ et $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + p\sum_{k=1}^{s-1} p^{k-1}\mathbf{u}_k$. Ainsi, en appliquant (5.3.14) avec $t=0$, on obtient que $\sum_{k=1}^{s-1} p^{k-1}\mathbf{u}_k \in \Psi_{s-1}(\mathcal{N})$. En itérant (5.3.14), on obtient finalement que $\sum_{k=\ell-1}^{s-1} p^{k-\ell+1}\mathbf{u}_k \in \Psi_{s-\ell+1}(\mathcal{N})$. D'après le lemme 18, cela donne

$$\frac{p\sum_{k=\ell-1}^{s-1} p^k\mathbf{u}_k}{p^{s+1}} = \frac{\sum_{k=\ell-1}^{s-1} p^{k-\ell+1}\mathbf{u}_k}{p^{s-\ell+1}} = \left\{\frac{\sum_{k=\ell-1}^{s-1} p^{k-\ell+1}\mathbf{u}_k}{p^{s-\ell+1}}\right\} \notin \mathcal{D}.$$

En particulier, on obtient que

$$1 > \mathbf{L}\cdot\frac{\sum_{k=\ell-1}^{s-1} p^{k-\ell+1}\mathbf{u}_k}{p^{s-\ell+1}} \in \frac{1}{p^{s-\ell+1}}\mathbb{N}$$

et donc

$$\mathbf{L}\cdot\frac{\sum_{k=\ell-1}^{s-1} p^{k-\ell+1}\mathbf{u}_k}{p^{s-\ell+1}} \leq \frac{p^{s-\ell+1}-1}{p^{s-\ell+1}}.$$

En utilisant cette dernière inégalité dans (7.2.8), on obtient que

$$\mathbf{L}\cdot\frac{\mathbf{v}+p\sum_{k=0}^{\ell-2} p^k\mathbf{u}_k}{p^{s+1}} \geq \frac{1}{p^{s-\ell+1}}.$$

Ainsi, pour tout $\ell \in \{2, \dots, s+1\}$, on a

$$\mathbf{L} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{v} + p\mathbf{u}}{p^\ell} \right\} = \mathbf{L} \cdot \frac{\mathbf{v} + p \sum_{k=0}^{\ell-2} p^k \mathbf{u}_k}{p^\ell} \geq 1 \tag{7.2.9}$$

et on obtient bien que, pour tout $\ell \in \{2, \dots, s+1\}$, on a $\left\{ (\mathbf{v} + p\mathbf{u}) / p^\ell \right\} \in \mathcal{D}$. Ceci achève la vérification du point (a_2) du théorème 6.

Vérification des points (a) et (a_1) du théorème 6

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, tout $\mathbf{v} \in \{0, \dots, p-1\}^d$ et tout $\mathbf{u} \in \Psi_s(\mathcal{N})$, on pose $\theta_s(\mathbf{v} + \mathbf{u}p) := \mathcal{Q}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)$ si $\mathbf{v} + \mathbf{u}p \notin \Psi_{s+1}(\mathcal{N})$, et $\theta_s(\mathbf{v} + \mathbf{u}p) := g(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)$ si $\mathbf{v} + \mathbf{u}p \in \Psi_{s+1}(\mathcal{N})$.

Le but de cette partie est de démontrer le fait suivant : pour tout $s \in \mathbb{N}$, tout $\mathbf{v} \in \{0, \dots, p-1\}^d$, tout $\mathbf{u} \in \Psi_s(\mathcal{N})$ et tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p + \mathbf{m}p^{s+1})}{\mathcal{Q}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)} - \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{u} + \mathbf{m}p^s)}{\mathcal{Q}(\mathbf{u})} \in p^{s+1} \frac{g(\mathbf{m})}{\theta_s(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)} \mathbb{Z}_p, \tag{7.2.10}$$

ce qui démontrera les points (a) et (a_1) du théorème 6. En effet, pour tout $\mathbf{v} \in \{0, \dots, p-1\}^d$ et tout $\mathbf{u} \in \Psi_s(\mathcal{N})$, on a $\mathcal{Q}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p) \in g(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)\mathbb{Z}_p$ de sorte que

$$p^{s+1} \frac{g(\mathbf{m})}{\theta_s(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)} \in p^{s+1} \frac{g(\mathbf{m})}{\mathcal{Q}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)} \mathbb{Z}_p$$

et (7.2.10) implique bien (a). De plus, par définition de θ_s, lorsque $\mathbf{v} + \mathbf{u}p \in \Psi_{s+1}(\mathcal{N})$, la congruence (7.2.10) implique bien (a_1).

La congruence (7.2.10) est vérifiée si et seulement si, pour tout $\mathbf{v} \in \{0, \dots, p-1\}^d$, tout $\mathbf{u} \in \Psi_s(\mathcal{N})$ et tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\left(1 - \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)}{\mathcal{Q}(\mathbf{u})} \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{u} + \mathbf{m}p^s)}{\mathcal{Q}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p + \mathbf{m}p^{s+1})} \right) \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p + \mathbf{m}p^{s+1})}{\mathcal{Q}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)} \in p^{s+1} \frac{g(\mathbf{m})}{\theta_s(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)} \mathbb{Z}_p.$$

Dans la suite, on pose

$$X_s(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{m}) := \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)}{\mathcal{Q}(\mathbf{u})} \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{u} + \mathbf{m}p^s)}{\mathcal{Q}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p + \mathbf{m}p^{s+1})}.$$

Ainsi, pour démontrer (7.2.10), il nous suffit de montrer que

$$(X_s(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{m}) - 1) \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p + \mathbf{m}p^{s+1})}{g(\mathbf{m})} \in p^{s+1} \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)}{\theta_s(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)} \mathbb{Z}_p. \tag{7.2.11}$$

Afin d'estimer la valuation de $X_s(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{m}) - 1$, posons, pour tout $\mathbf{v} \in \{0, \dots, p-1\}^d$, tout $\mathbf{u} \in \{0, \dots, p^s - 1\}^d$, tout $s \in \mathbb{N}$ et tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$,

$$Y_s(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{m}) := \frac{\prod_{i=1}^{q_2} \prod_{j=1}^{\lfloor \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}/p \rfloor} \left(1 + \frac{\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{m} p^s}{\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u} + j} \right)}{\prod_{i=1}^{q_1} \prod_{j=1}^{\lfloor \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}/p \rfloor} \left(1 + \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{m} p^s}{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} + j} \right)}.$$

Pour $s \in \mathbb{N}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$ et $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p^s - 1\}^d$, on note

$$\eta_s(\mathbf{a}, \mathbf{m}) := \sum_{\ell=s+1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{m}p^s}{p^\ell}\right\}\right).$$

On énonce quatres lemmes, que l'on démontre dans la partie 7.2.2.

Lemme 19. *Pour tout $s \in \mathbb{N}$, tout $\mathbf{v} \in \{0, \dots, p-1\}^d$, tout $\mathbf{u} \in \Psi_s(\mathcal{N})$ et tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, on a $X_s(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{m}) \in Y_s(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{m})\,(1 + p^{s+1}\mathbb{Z}_p)$ et $v_p(Y_s(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{m})) \geq \eta_s(\mathbf{u}, \mathbf{m}) - \eta_{s+1}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p, \mathbf{m})$.*

Lemme 20. *Soit $s \in \mathbb{N}$, $\mathbf{v} \in \{0, \dots, p-1\}^d$ et $\mathbf{u} \in \{0, \dots, p^s - 1\}^d$. S'il existe $j \in \{1, \dots, s+1\}$ tel que $\{(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)/p^j\} \notin \mathcal{D}$, alors on a $Y_s(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{m}) \in 1 + p^{s-j+2}\mathbb{Z}_p$.*

Lemme 21. *Pour tout $s \in \mathbb{N}$, tout $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p^{s+1} - 1\}^d$ et tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, on a*

$$\eta_{s+1}(\mathbf{a}, \mathbf{m}) \geq \mu(\mathbf{m}) \tag{7.2.12}$$

et

$$v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{a} + \mathbf{m}p^{s+1})}{g(\mathbf{m})}\right) \geq \sum_{\ell=1}^{s+1} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{a}}{p^\ell}\right\}\right). \tag{7.2.13}$$

Lemme 22. *Soit $s \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{a} \in \Psi_s(\mathcal{N})$. On a $v_p(Q(\mathbf{a})) = \sum_{\ell=1}^{s} \Delta\left(\{\mathbf{a}/p^\ell\}\right)$.*

Afin de montrer (7.2.11), on va maintenant différencier deux cas.

– *Cas* 1 : Supposons qu'il existe $j \in \{1, \dots, s+1\}$ tel que

$$\left\{\frac{\mathbf{v} + \mathbf{u}p}{p^j}\right\} \notin \mathcal{D}. \tag{7.2.14}$$

Soit j_0 le plus petit des $j \in \{1, \dots, s+1\}$ vérifiant (7.2.14). D'après le lemme 20 appliqué en j_0, on obtient $Y_s(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{m}) \in 1 + p^{s-j_0+2}\mathbb{Z}_p$ et donc, d'après le lemme 19,

$$v_p(X_s(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{m}) - 1) \geq s - j_0 + 2.$$

D'après (7.2.13), on obtient

$$\begin{aligned} v_p\left((X_s(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{m}) - 1)\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p + \mathbf{m}p^{s+1})}{g(\mathbf{m})}\right) &\geq v_p(X_s(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{m}) - 1) + \sum_{\ell=1}^{s+1} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v} + \mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right) \\ &\geq s - j_0 + 2 + \sum_{\ell=1}^{s+1} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v} + \mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right). \end{aligned} \tag{7.2.15}$$

Pour tout $\ell \in \{1, \dots, j_0 - 1\}$, on a $\{(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)/p^\ell\} \in \mathcal{D}$ et donc $\Delta(\{(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)/p^\ell\}) \geq 1$. On obtient $\sum_{\ell=1}^{s+1} \Delta(\{(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)/p^\ell\}) \geq j_0 - 1$ ce qui, joint à (7.2.15), donne

$$v_p\left((X_s(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{m}) - 1)\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v} + \mathbf{u}p + \mathbf{m}p^{s+1})}{g(\mathbf{m})}\right) \geq s + 1. \tag{7.2.16}$$

Si $\mathbf{v}+\mathbf{u}p \notin \Psi_{s+1}(\mathcal{N})$, alors on a $\theta_s(\mathbf{v}+\mathbf{u}p) = \mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)$ et

$$p^{s+1}\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)}{\theta_s(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)} = p^{s+1}.$$

Ainsi, lorsque $\mathbf{v}+\mathbf{u}p \notin \Psi_{s+1}(\mathcal{N})$, l'inégalité (7.2.16) donne bien (7.2.11).

On suppose, dans la fin de la démonstration du cas 1, que $\mathbf{v}+\mathbf{u}p \in \Psi_{s+1}(\mathcal{N})$, ainsi $\theta_s(\mathbf{v}+\mathbf{u}p) = g(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)$. Montrons qu'on a $v_p(g(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)) \geq j_0 - 1$. En effet, pour tout $\ell \in \{1,\dots,j_0-1\}$, on a $\{(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)/p^\ell\} \in \mathcal{D}$ et donc

$$v_p(g(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{D}}\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right) \geq j_0 - 1.$$

D'après (7.2.15), on obtient

$$\begin{aligned}
&v_p\left((X_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m})-1)\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{g(\mathbf{m})}\right) \\
&\qquad \geq s - j_0 + 2 + v_p(g(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)) + \left(\sum_{\ell=1}^{s+1}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right) - v_p(g(\mathbf{v}+\mathbf{u}p))\right) \\
&\qquad \geq (s-j_0+2) + j_0 - 1 + v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)}{g(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)}\right) \qquad (7.2.17)\\
&\qquad \geq s+1+v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)}{g(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)}\right),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé dans (7.2.17) le lemme 22 appliqué avec $s+1$ à la place de s et $\mathbf{v}+\mathbf{u}p$ à la place de $\mathbf{a}$ qui donne $v_p(\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)) = \sum_{\ell=1}^{s+1}\Delta(\{(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)/p^\ell\})$. On a donc bien (7.2.11) dans ce cas.

– *Cas 2* : Supposons que, pour tout $j \in \{1,\dots,s+1\}$, on ait $\{(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)/p^j\} \in \mathcal{D}$.

En particulier, on a $\mathbf{v}+\mathbf{u}p \notin \Psi_{s+1}(\mathcal{N})$ et donc $\theta_s(\mathbf{v}+\mathbf{u}p) = \mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)$. De plus, on obtient que

$$\sum_{\ell=1}^{s+1}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right) \geq s+1.$$

Si $v_p(Y_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m})) \geq 0$, alors, d'après le lemme 19, $v_p(X_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m})-1) \geq 0$ et, d'après (7.2.13), on a

$$v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{g(\mathbf{m})}\right) \geq \sum_{\ell=1}^{s+1}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right) \geq s+1.$$

On a donc bien (7.2.11).

Supposons maintenant que $v_p(Y_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m})) < 0$. Dans ce cas, d'après le lemme 19, on a

$$v_p(X_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m})-1) = v_p(Y_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m})) \geq \eta_s(\mathbf{u},\mathbf{m}) - \eta_{s+1}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p,\mathbf{m}).$$

De plus,

$$\begin{aligned} v_p(\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})) &= \sum_{\ell=1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1}}{p^\ell}\right\}\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{s+1}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right)+\sum_{\ell=s+2}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1}}{p^\ell}\right\}\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{s+1}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right)+\eta_{s+1}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p,\mathbf{m}). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} &v_p\left((X_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m})-1)\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{g(\mathbf{m})}\right) \\ &\qquad \geq \eta_s(\mathbf{u},\mathbf{m})-\eta_{s+1}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p,\mathbf{m})+\sum_{\ell=1}^{s+1}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right)+\eta_{s+1}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p,\mathbf{m})-\mu(\mathbf{m}) \\ &\qquad \geq s+1+\eta_s(\mathbf{u},\mathbf{m})-\mu(\mathbf{m}). \end{aligned}$$

Si $s=0$, alors on a $\mathbf{u}=\mathbf{0}$,

$$\eta_0(\mathbf{0},\mathbf{m})=\sum_{\ell=1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{m}}{p^\ell}\right\}\right)\geq\sum_{\ell=1}^{\infty}\mathbf{1}_{\mathcal{D}}\left(\left\{\frac{\mathbf{m}}{p^\ell}\right\}\right)=\mu(\mathbf{m})$$

et on a bien (7.2.11). En revanche, si $s\geq 1$ alors, en utilisant le lemme 21 avec $s-1$ à la place de s et $\mathbf{a}=\mathbf{u}$, on obtient $\eta_s(\mathbf{u},\mathbf{m})\geq\mu(\mathbf{m})$, ce qui donne bien (7.2.11). Ceci achève la preuve de l'équation (7.2.10) modulo celles des divers lemmes, ce que l'on fait maintenant.

Démonstration des lemmes 19, 20, 21 et 22

Démonstration du lemme 19. On veut montrer que $X_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m})\in Y_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m})(1+p^{s+1}\mathbb{Z}_p)$.

On a

$$X_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m})=\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)}{\mathcal{Q}(\mathbf{u}p)}\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}\cdot\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{u}p)}{\mathcal{Q}(\mathbf{u})}\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{u}+\mathbf{m}p^{s})}{\mathcal{Q}(\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}. \tag{7.2.18}$$

En appliquant le lemme 13 avec $\mathbf{c}=\mathbf{u}$, on obtient

$$\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{u}p)}{\mathcal{Q}(\mathbf{u})}\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{u}+\mathbf{m}p^{s})}{\mathcal{Q}(\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}\in 1+p^{s+1}\mathbb{Z}_p,$$

ce qui, joint à (7.2.18), donne

$$X_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m})\in\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)}{\mathcal{Q}(\mathbf{u}p)}\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}(1+p^{s+1}\mathbb{Z}_p). \tag{7.2.19}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)}{\mathcal{Q}(\mathbf{u}p)}\cdot\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}&\\ &=\frac{\left(\prod_{i=1}^{q_1}\prod_{k=1}^{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{v}}(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{u}p+k)\right)\left(\prod_{i=1}^{q_2}\prod_{k=1}^{\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{v}}(\mathbf{f}_i\cdot(\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})+k)\right)}{\left(\prod_{i=1}^{q_2}\prod_{k=1}^{\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{v}}(\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{u}p+k)\right)\left(\prod_{i=1}^{q_1}\prod_{k=1}^{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{v}}(\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})+k)\right)}\\ &=\frac{\prod_{i=1}^{q_2}\prod_{k=1}^{\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{v}}\left(1+\frac{\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{m}p^{s+1}}{\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{u}p+k}\right)}{\prod_{i=1}^{q_1}\prod_{k=1}^{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{v}}\left(1+\frac{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{m}p^{s+1}}{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{u}p+k}\right)}.\end{aligned}$$

Si $\mathbf{d}\in\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{q_1},\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_{q_2}\}$ et $k\in\{1,\dots,\mathbf{d}\cdot\mathbf{v}\}$, alors $\mathbf{d}\cdot\mathbf{u}p+k$ est divisible par p si et seulement s'il existe $j\in\{1,\dots,\lfloor\mathbf{d}\cdot\mathbf{v}/p\rfloor\}$ tel que $k=jp$. On a donc

$$\prod_{k=1}^{\mathbf{d}\cdot\mathbf{v}}\left(1+\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{m}p^{s+1}}{\mathbf{d}\cdot\mathbf{u}p+k}\right)=\prod_{j=1}^{\lfloor\mathbf{d}\cdot\mathbf{v}/p\rfloor}\left(1+\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{m}p^{s}}{\mathbf{d}\cdot\mathbf{u}+j}\right)(1+O(p^{s+1})).$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)}{\mathcal{Q}(\mathbf{u}p)}\cdot\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}&=\frac{\prod_{i=1}^{q_2}\prod_{j=1}^{\lfloor\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{v}/p\rfloor}\left(1+\frac{\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{m}p^{s}}{\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{u}+j}\right)}{\prod_{i=1}^{q_1}\prod_{j=1}^{\lfloor\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{v}/p\rfloor}\left(1+\frac{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{m}p^{s}}{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{u}+j}\right)}(1+O(p^{s+1}))\\ &=Y_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m})(1+O(p^{s+1}))\end{aligned}$$

et donc $X_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m})\in Y_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m})(1+p^{s+1}\mathbb{Z}_p)$, comme voulu.

On va maintenant montrer qu'on a bien aussi

$$v_p(Y_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m}))\geq\eta_s(\mathbf{u},\mathbf{m})-\eta_{s+1}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p,\mathbf{m}).$$

On a vu ci-dessus que $v_p(Y_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m}))=v_p(X_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m}))$. Or, d'après (7.2.19), on a aussi

$$\begin{aligned}v_p(X_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m}))&=v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)}{\mathcal{Q}(\mathbf{u}p)}\cdot\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}\right)\\ &=v_p(\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p))-v_p(\mathcal{Q}(\mathbf{u}p))+v_p(\mathcal{Q}(\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1}))\\ &-v_p(\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1}))\\ &=\sum_{\ell=1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right)-\sum_{\ell=1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right)+\sum_{\ell=1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1})}{p^\ell}\right\}\right)\\ &-\sum_{\ell=1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1}}{p^\ell}\right\}\right).\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right)-\sum_{\ell=1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1}}{p^\ell}\right\}\right)\\
&\quad=\sum_{\ell=1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right)-\sum_{\ell=1}^{s+1}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right)-\sum_{\ell=s+2}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1}}{p^\ell}\right\}\right)\\
&\qquad=\sum_{\ell=s+2}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right)-\sum_{\ell=s+2}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1}}{p^\ell}\right\}\right)\\
&\qquad\qquad=\eta_{s+1}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p,\mathbf{0})-\eta_{s+1}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p,\mathbf{m})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right)-\sum_{\ell=1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1}}{p^\ell}\right\}\right)\\
&\qquad=\sum_{\ell=s+2}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{u}p}{p^\ell}\right\}\right)-\sum_{\ell=s+2}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{u}p+\mathbf{m}p^{s+1}}{p^\ell}\right\}\right)\\
&\qquad=\sum_{\ell=s+1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{u}}{p^\ell}\right\}\right)-\sum_{\ell=s+1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{u}+\mathbf{m}p^{s}}{p^\ell}\right\}\right)=\eta_s(\mathbf{u},\mathbf{0})-\eta_s(\mathbf{u},\mathbf{m}),
\end{aligned}$$

donc

$$v_p(Y_s(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{m}))=\eta_{s+1}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p,\mathbf{0})-\eta_s(\mathbf{u},\mathbf{0})+\eta_s(\mathbf{u},\mathbf{m})-\eta_{s+1}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p,\mathbf{m}).$$

Il nous reste à montrer que si $\mathbf{u}\in\Psi_s(\mathcal{N})$, alors on a $\eta_{s+1}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p,\mathbf{0})-\eta_s(\mathbf{u},\mathbf{0})\geq 0$. Comme $\mathbf{u}\in\Psi_s(\mathcal{N})$, on a $\{\mathbf{u}/p^s\}\notin\mathcal{D}$. Ainsi, pour tout $\ell\geq s+1$ et tout $\mathbf{L}\in\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{q_1},\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_{q_2}\}$, on obtient que

$$\mathbf{L}\cdot\left\{\frac{\mathbf{u}}{p^\ell}\right\}=\mathbf{L}\cdot\frac{\mathbf{u}}{p^\ell}\leq\mathbf{L}\cdot\frac{\mathbf{u}}{p^s}=\mathbf{L}\cdot\left\{\frac{\mathbf{u}}{p^s}\right\}<1,$$

i.e., pour tout $\ell\geq s+1$, $\{\mathbf{u}/p^\ell\}\notin\mathcal{D}$. On a alors $\eta_s(\mathbf{u},\mathbf{0})=\sum_{\ell=s+1}^{\infty}\Delta\left(\{\mathbf{u}/p^\ell\}\right)=0$ et

$$\eta_{s+1}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p,\mathbf{0})-\eta_s(\mathbf{u},\mathbf{0})=\eta_{s+1}(\mathbf{v}+\mathbf{u}p,\mathbf{0})\geq 0,$$

ce qui achève la preuve du lemme 19. □

Démonstration du lemme 20. Soit $s\in\mathbb{N}$, $\mathbf{v}\in\{0,\dots,p-1\}^d$ et $\mathbf{u}\in\{0,\dots,p^s-1\}^d$. On écrit $\mathbf{u}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{u}_k p^k$, où $\mathbf{u}_k\in\{0,\dots,p-1\}^d$. Soit $\mathbf{L}\in\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{q_1},\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_{q_2}\}$. On définit $s+1$ entiers naturels par les relations $b_{\mathbf{L},0}:=\lfloor\mathbf{L}\cdot\mathbf{v}/p\rfloor$ et $b_{\mathbf{L},k+1}:=\lfloor(\mathbf{L}\cdot\mathbf{u}_k+b_{\mathbf{L},k})/p\rfloor$ pour $k\in\{0,\dots,s-1\}$. On note, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lceil x\rceil$ l'entier immédiatement supérieur à x et on définit $s+1$ entiers naturels $a_{\mathbf{L},j}$ par les relations $a_{\mathbf{L},0}:=1$ et $a_{\mathbf{L},k+1}:=\lceil(\mathbf{L}\cdot\mathbf{u}_k+a_{\mathbf{L},k})/p\rceil$. Dans un premier temps, nous allons montrer par récurrence sur r que l'assertion $\mathcal{A}_r$:

$$\prod_{n=1}^{\lfloor\mathbf{L}\cdot\mathbf{v}/p\rfloor}\left(1+\frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{m}p^s}{\mathbf{L}\cdot\mathbf{u}+n}\right)=\prod_{n=a_{\mathbf{L},r}}^{b_{\mathbf{L},r}}\left(1+\frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{m}p^{s-r}}{\mathbf{L}\cdot(\sum_{k=r}^{\infty}\mathbf{u}_k p^{k-r})+n}\right)\left(1+O(p^{s-r+1})\right)$$

est vraie pour tout $r \in \{0, \dots, s\}$.

On a $b_{\mathbf{L},0} = \lfloor \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}/p \rfloor$ et $a_{\mathbf{L},0} = 1$, donc $\mathcal{A}_0$ est vraie.

Soit $r \geq 0$. Supposons que $\mathcal{A}_r$ est vraie et montrons $\mathcal{A}_{r+1}$. Si $a_{\mathbf{L},r} > b_{\mathbf{L},r}$ alors $a_{\mathbf{L},r+1} > b_{\mathbf{L},r+1}$ et $\mathcal{A}_r$ implique $\mathcal{A}_{r+1}$. On peut donc supposer que $a_{\mathbf{L},r} \leq b_{\mathbf{L},r}$. Si $n \in \{a_{\mathbf{L},r}, \dots, b_{\mathbf{L},r}\}$, alors p divise $\mathbf{L} \cdot \left(\sum_{k=r}^{\infty} \mathbf{u}_k p^{k-r}\right) + n$ si et seulement si p divise $\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_r + n$, *i.e.* si et seulement s'il existe $i \in \{\lceil (\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_r + a_{\mathbf{L},r})/p \rceil, \dots, \lfloor (\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_r + b_{\mathbf{L},r})/p \rfloor\}$ tel que $\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_r + n = ip$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=a_{\mathbf{L},r}}^{b_{\mathbf{L},r}} \left(1 + \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{m} p^{s-r}}{\mathbf{L} \cdot (\sum_{k=r}^{\infty} \mathbf{u}_k p^{k-r}) + n}\right) \\
&\qquad = \prod_{i=a_{\mathbf{L},r+1}}^{b_{\mathbf{L},r+1}} \left(1 + \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{m} p^{s-r}}{\mathbf{L} \cdot \left(\sum_{k=r+1}^{\infty} \mathbf{u}_k p^{k-r}\right) + ip}\right) (1 + O(p^{s-r})) \\
&\qquad\qquad = \prod_{i=a_{\mathbf{L},r+1}}^{b_{\mathbf{L},r+1}} \left(1 + \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{m} p^{s-r-1}}{\mathbf{L} \cdot \left(\sum_{k=r+1}^{\infty} \mathbf{u}_k p^{k-r-1}\right) + i}\right) (1 + O(p^{s-r})). \quad (7.2.20)
\end{aligned}$$

D'après $\mathcal{A}_r$ et (7.2.20), on a bien $\mathcal{A}_{r+1}$, ce qui achève la récurrence sur r.

Soit $\mathbf{L} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{q_2}\}$. Nous allons montrer par récurrence sur k que l'assertion $\mathcal{B}_k$: $a_{\mathbf{L},k} \geq 1$ et $b_{\mathbf{L},k} \leq \lfloor \mathbf{L} \cdot \{(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)/p^{k+1}\} \rfloor$ est vraie pour tout $k \in \{0, \dots, s\}$.

On a $a_{\mathbf{L},0} = 1$ et $b_{\mathbf{L},0} = \lfloor \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}/p \rfloor = \lfloor \mathbf{L} \cdot \{(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)/p\} \rfloor$, donc $\mathcal{B}_0$ est vraie.

Soit $k \geq 0$. Supposons que $\mathcal{B}_k$ est vraie et montrons $\mathcal{B}_{k+1}$. On a

$$a_{\mathbf{L},k+1} = \lceil (\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_k + a_{\mathbf{L},k})/p \rceil \quad \text{et} \quad b_{\mathbf{L},k+1} = \lfloor (\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_k + b_{\mathbf{L},k})/p \rfloor ,$$

donc $a_{\mathbf{L},k+1} \geq \lceil (\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_k + 1)/p \rceil \geq 1$ et

$$\begin{aligned}
b_{\mathbf{L},k+1} \leq \left\lfloor \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_k}{p} + \frac{\mathbf{L}}{p} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{v} + \mathbf{u}p}{p^{k+1}} \right\} \right\rfloor &= \left\lfloor \mathbf{L} \cdot \left(\frac{\mathbf{u}_k p^{k+1}}{p^{k+2}} + \frac{\mathbf{v} + p \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{u}_i p^i}{p^{k+2}} \right) \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \mathbf{L} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{v} + \mathbf{u}p}{p^{k+2}} \right\} \right\rfloor ,
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence sur k.

Soit $j \in \{1, \dots, s+1\}$ tel que $\{(\mathbf{v}+\mathbf{u}p)/p^j\} \notin \mathcal{D}$. Pour tout $\mathbf{L} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{q_2}\}$, on obtient, *via* $\mathcal{B}_{j-1}$, que $a_{\mathbf{L},j-1} \geq 1$ et $b_{\mathbf{L},j-1} \leq \lfloor \mathbf{L} \cdot \{(\mathbf{v} + \mathbf{u}p)/p^j\} \rfloor = 0$. Ainsi, d'après $\mathcal{A}_{j-1}$, on a

$$\prod_{n=1}^{\lfloor \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}/p \rfloor} \left(1 + \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{m} p^s}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{u} + n}\right) = 1 + O(p^{s-j+2})$$

et donc

$$Y_s(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{m}) = \frac{\prod_{i=1}^{q_2} \prod_{n=1}^{\lfloor \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}/p \rfloor} \left(1 + \frac{\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{m} p^s}{\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u} + n}\right)}{\prod_{i=1}^{q_1} \prod_{n=1}^{\lfloor \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}/p \rfloor} \left(1 + \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{m} p^s}{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} + n}\right)} = \frac{1 + O(p^{s-j+2})}{1 + O(p^{s-j+2})} = 1 + O(p^{s-j+2}),$$

ce qui achève la preuve du lemme 20. □

Démonstration du lemme 21. Dans un premier temps, nous allons montrer qu'on a bien (7.2.12). Écrivons $\mathbf{m} = \sum_{k=0}^{q} \mathbf{m}_k p^k$, où $\mathbf{m}_k \in \{0, \dots, p-1\}^d$. On a

$$\begin{aligned}
\eta_{s+1}(\mathbf{a}, \mathbf{m}) - \mu(\mathbf{m}) &= \sum_{\ell=s+2}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{m}p^{s+1}}{p^\ell}\right\}\right) - \sum_{\ell=1}^{\infty} 1_{\mathcal{D}}\left(\left\{\frac{\mathbf{m}}{p^\ell}\right\}\right) \\
&= \sum_{\ell=s+2}^{\infty} \left(\Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{m}p^{s+1}}{p^\ell}\right\}\right) - 1_{\mathcal{D}}\left(\left\{\frac{\mathbf{m}p^{s+1}}{p^\ell}\right\}\right)\right) \\
&= \sum_{\ell=s+2}^{\infty} \left(\Delta\left(\frac{\mathbf{a} + \sum_{k=0}^{\ell-s-2} \mathbf{m}_k p^{k+s+1}}{p^\ell}\right) - 1_{\mathcal{D}}\left(\frac{\sum_{k=0}^{\ell-s-2} \mathbf{m}_k p^{k+s+1}}{p^\ell}\right)\right).
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $\ell \geq s+2$, on a

$$\mathbf{0} \leq \frac{\sum_{k=0}^{\ell-s-2} \mathbf{m}_k p^{k+s+1}}{p^\ell} \leq \frac{\mathbf{a} + \sum_{k=0}^{\ell-s-2} \mathbf{m}_k p^{k+s+1}}{p^\ell} \leq \frac{(p^\ell - 1)\mathbf{1}}{p^\ell} \in [0,1[^d.$$

Donc

$$\begin{aligned}
1_{\mathcal{D}}\left(\frac{\sum_{k=0}^{\ell-s-2} \mathbf{m}_k p^{k+s+1}}{p^\ell}\right) = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\sum_{k=0}^{\ell-s-2} \mathbf{m}_k p^{k+s+1}}{p^\ell} \in \mathcal{D} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{\mathbf{a} + \sum_{k=0}^{\ell-s-2} \mathbf{m}_k p^{k+s+1}}{p^\ell} \in \mathcal{D} \\
&\Longrightarrow \quad \Delta\left(\frac{\mathbf{a} + \sum_{k=0}^{\ell-s-2} \mathbf{m}_k p^{k+s+1}}{p^\ell}\right) \geq 1
\end{aligned}$$

et donc $\eta_{s+1}(\mathbf{a}, \mathbf{m}) - \mu(\mathbf{m}) \geq 0$. Ceci termine la preuve de (7.2.12).

Montrons maintenant (7.2.13). On a

$$\begin{aligned}
v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{a} + \mathbf{m}p^{s+1})}{g(\mathbf{m})}\right) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{m}p^{s+1}}{p^\ell}\right\}\right) - \mu(\mathbf{m}) \\
&= \sum_{\ell=1}^{s+1} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{a}}{p^\ell}\right\}\right) + \sum_{\ell=s+2}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{m}p^{s+1}}{p^\ell}\right\}\right) - \mu(\mathbf{m}) \\
&= \sum_{\ell=1}^{s+1} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{a}}{p^\ell}\right\}\right) + \eta_{s+1}(\mathbf{a}, \mathbf{m}) - \mu(\mathbf{m}), \\
&\geq \sum_{\ell=1}^{s+1} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{a}}{p^\ell}\right\}\right). \qquad (7.2.21)
\end{aligned}$$

où dans (7.2.21), on a utilisé l'inégalité (7.2.12). □

Démonstration du lemme 22. On a $v_p(Q(\mathbf{a})) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{\mathbf{a}}{p^\ell}\right\}\right)$. Comme $\mathbf{a} \in \Psi_s(\mathcal{N})$, on a $\{\mathbf{a}/p^s\} \notin \mathcal{D}$ et, pour tout $\ell \geq s+1$ et tout $\mathbf{L} \in \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{q_2}\}$, on obtient

$$\mathbf{L} \cdot \left\{\frac{\mathbf{a}}{p^\ell}\right\} = \mathbf{L} \cdot \frac{\mathbf{a}}{p^\ell} \leq \mathbf{L} \cdot \frac{\mathbf{a}}{p^s} = \mathbf{L} \cdot \left\{\frac{\mathbf{a}}{p^s}\right\} < 1,$$

i.e. $\{\mathbf{a}/p^\ell\} \notin \mathcal{D}$. Ainsi, pour tout $\ell \geq s+1$, on a $\Delta\left(\{\mathbf{a}/p^\ell\}\right) = 0$. D'où le résultat. □

7.3 Démonstration du théorème 5

Soit e et f deux suites d'entiers strictement positifs disjointes vérifiant $|e| = |f|$ et telles que, pour tout $x \in [1/M_{e,f}, 1[$, on a $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$. Soit $\theta \geq 1$ un diviseur de $M_{e,f}$ tel que, pour tout élément L de e et f, on a que $\theta/\mathrm{pgcd}(L,\theta)$ divise D_L. On doit montrer que

$$(z^{-1} q_{e,f}(z))^{1/\theta} \in \mathbb{Z}[[z]].$$

En notant $e = (e_1, \ldots, e_{q_1})$ et $f = (f_1, \ldots, f_{q_2})$, on rappelle qu'on a

$$z^{-1} q_{e,f}(z) = \frac{\prod_{i=1}^{q_1} q_{e_i,\mathbf{e},\mathbf{f}}(z)^{e_i}}{\prod_{i=1}^{q_2} q_{f_i,e,f}(z)^{f_i}}.$$

Il suffit donc de montrer que, pour tout $L \in \{e_1, \ldots, e_{q_1}, f_1, \ldots, f_{q_2}\}$, on a

$$q_{L,e,f}(z)^{L/\theta} = (q_{L,e,f}(z)^{\mathrm{pgcd}(L,\theta)/\theta})^{L/\mathrm{pgcd}(L,\theta)} \in \mathbb{Z}[[z]],$$

ce qui est impliqué, comme $L/\mathrm{pgcd}(L,\theta) \in \mathbb{N}$, par le fait que, pour tout élément L de e et f, on a $q_{L,e,f}(z)^{\mathrm{pgcd}(L,\theta)/\theta} \in \mathbb{Z}[[z]]$.

Soit $L \in \{e_1, \ldots, e_{q_1}, f_1, \ldots, f_{q_2}\}$ et $k_L \in \mathbb{N}$ tel que $D_L = \frac{\theta}{\mathrm{pgcd}(L,\theta)} k_L$. D'après le théorème 4, on a $q_{L,e,f}(z)^{1/D_L} \in \mathbb{Z}[[z]]$ donc on a bien

$$q_{L,e,f}(z)^{\mathrm{pgcd}(L,\theta)/\theta} = (q_{L,e,f}(z)^{1/D_L})^{k_L} \in \mathbb{Z}[[z]].$$

Chapitre 8

Démonstration du théorème 3 et du cas (ii) du théorème 2

8.1 Démonstration du cas (ii) du théorème 2

On se place sous les hypothèses du théorème 2. On suppose de plus que $\Delta_{e,f}$ s'annule en $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}_{e,f}$. Dans la partie 8.1.1, nous démontrons un résultat d'analyse élémentaire qui nous sera utile dans la preuve du point (ii) du théorème 2.

8.1.1 Préliminaires

Un résultat d'analyse élémentaire

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe un ouvert non vide $\mathcal{U}$ de $\mathcal{D}_{e,f}$ tel que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$, tout $i \in \{1, \ldots, q_1\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, q_2\}$, on a $\lfloor \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} \rfloor = \lfloor \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x}_0 \rfloor$, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} \neq 0$, $\lfloor \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{x} \rfloor = \lfloor \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{x}_0 \rfloor$, $\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{x} \neq 0$ et $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} \neq \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{x}$.

En particulier, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$, on aura $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) = \Delta_{e,f}(\mathbf{x}_0) = 0$. Nous utiliserons cet ouvert $\mathcal{U}$ dans toute la suite de la démonstration.

Dans un premier temps, on démontre le lemme suivant que nous utiliserons aussi pour la démonstration du point (ii) du critère de Landau.

Lemme 23. *Soit $u := (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ une suite de vecteurs de $\mathbb{N}^d$ et $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$. Alors, il existe $\mu > 0$ tel que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mu \mathbf{1}$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\lfloor \mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) \rfloor = \lfloor \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{x}_0 \rfloor$.*

Démonstration. Pour tout $y > 0$, il existe $\nu_y > 0$ tel que $\lfloor y + \nu_y \rfloor = \lfloor y \rfloor$. Ainsi, en posant

$$\nu := \min\{\nu_{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{x}_0} \, : \, 1 \leq i \leq n\} > 0,$$

on obtient que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\lfloor \mathbf{u}_i . \mathbf{x}_0 + \nu \rfloor = \lfloor \mathbf{u}_i . \mathbf{x}_0 \rfloor$. Ainsi, en posant

$$\mu := \min\{\nu / |\mathbf{u}_i| \, : \, 1 \leq i \leq n, \, \mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}\} > 0,$$

on obtient que, pour tout $\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mu\mathbf{1}$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{x} \leq \mu|\mathbf{u}_i| \leq \nu$ donc $\lfloor \mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) \rfloor = \lfloor \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{x}_0 \rfloor$. Ce qui termine la preuve du lemme. □

En appliquant le lemme 23 avec, à la place de u, la suite constituée des éléments de e et f, on obtient qu'il existe $\mu > 0$ tel que, pour tout $\mathbf{x} \in [0, \mu]^d$ et tout $\mathbf{L} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \dots \mathbf{f}_{q_2}\}$, on a $\lfloor \mathbf{L} \cdot (\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) \rfloor = \lfloor \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}_0 \rfloor$. Comme $\mathbf{x}_0 \in [0, 1[^d$, il existe $\mu_1 > 0$, $\mu_1 \leq \mu$, tel que, pour tout $\mathbf{x} \in [0, \mu_1]^d$, on a $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \in [0, 1[^d$. Comme $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}_{e,f}$, il existe $\mathbf{L} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{q_2}\}$ tel que $\mathbf{L} \cdot \mathbf{x}_0 \geq 1$, ce qui donne que, pour tout $\mathbf{x} \in [0, \mu_1]^d$, on a $\mathbf{L} \cdot (\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) \geq \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}_0 \geq 1$ et donc, comme $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \in [0, 1[^d$, on obtient que $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$. Ainsi, il existe un ouvert non vide $\mathcal{U}_1$ de $\mathcal{D}_{e,f}$ tel que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_1$ et tout $\mathbf{L} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{q_2}\}$, on a $\lfloor \mathbf{L} \cdot \mathbf{x} \rfloor = \lfloor \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}_0 \rfloor$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, q_1\}$ et tout $j \in \{1, \dots, q_2\}$, on définit les ensembles $\mathcal{H}_{\mathbf{e}_i} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \, : \, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} = 0\}$, $\mathcal{H}_{\mathbf{f}_j} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \, : \, \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{x} = 0\}$ et $\mathcal{H}_{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \, : \, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{x}\}$. Comme e et f sont deux suites disjointes constituées de vecteurs non nuls, on obtient que les $\mathcal{H}_{\mathbf{e}_i}$, $\mathcal{H}_{\mathbf{f}_j}$ et $\mathcal{H}_{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j}$ sont des hyperplans de $\mathbb{R}^d$ et sont donc des fermés d'intérieurs vides de $\mathbb{R}^d$. Ainsi, leurs complémentaires sont des ouverts denses dans $\mathbb{R}^d$ et le complémentaire $\mathcal{U}_2$ de la réunion des $\mathcal{H}_{\mathbf{e}_i}$, $\mathcal{H}_{\mathbf{f}_j}$ et $\mathcal{H}_{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j}$ est un ouvert dense dans $\mathbb{R}^d$. On obtient donc que $\mathcal{U} := \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ est un ouvert non vide de $\mathcal{D}_{e,f}$ et que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$, tout $i \in \{1, \dots, q_1\}$ et tout $j \in \{1, \dots, q_2\}$, on a bien $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} \neq 0$, $\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{x} \neq 0$, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} \neq \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{x}$, $\lfloor \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} \rfloor = \lfloor \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x}_0 \rfloor$ et $\lfloor \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{x} \rfloor = \lfloor \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{x}_0 \rfloor$.

Un lemme technique

Le but de cette partie est de démontrer le lemme suivant.

Lemme 24. *Soit $\mathbf{E} := (E_1, \dots, E_{q_1})$ et $\mathbf{F} := (F_1, \dots, F_{q_2})$ deux suites d'entiers strictement positifs disjointes. On note $\mathcal{A} := \{E_1, \dots, E_{q_1}, F_1, \dots, F_{q_2}\}$ et $\gamma_1 < \dots < \gamma_t = 1$ les rationnels qui vérifient $\{\gamma_1, \dots, \gamma_t\} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \{\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \dots, \frac{a-1}{a}, 1\}$ et $m_i \in \mathbb{Z}$ l'amplitude du saut de $\Delta_{\mathbf{E},\mathbf{F}}$ en γ_i. Soit $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$. S'il existe $i_0 \in \{1, \dots, t\}$ tel que $\Delta_{\mathbf{E},\mathbf{F}}$ soit positive sur $[\gamma_1, \gamma_{i_0}]$, alors on a*

$$\sum_{k=1}^{i_0} \frac{m_k}{\gamma_k + b} > 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{i_0} \left(1 + \frac{1}{\gamma_k + b}\right)^{m_k} > 1.$$

Démonstration du lemme 24. Dans cette démonstration, pour tout $k \in \{1, \dots, t\}$, on note $\delta_k := \gamma_k + b$. Les suites $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ sont disjointes donc $\gamma_1 = 1/M_{\mathbf{E},\mathbf{F}}$ est un saut effectif de Δ. Comme, pour tout $x \in [\gamma_1, \gamma_{i_0}]$, on a $\Delta(x) \geq 0$, on obtient $\Delta(\gamma_1) \geq 1$, *i.e.* $m_1 \geq 1$. Ainsi, si $i_0 = 1$, alors on a bien $m_1/\delta_1 > 0$ et $(1 + 1/\delta_1)^{m_1} > 1$. On suppose que $i_0 \geq 2$ dans la suite de la démonstration. On va maintenant montrer par récurrence sur ℓ que, pour tout $\ell \in \{2, \dots, i_0\}$, on a

$$\sum_{k=1}^{\ell} \frac{m_k}{\delta_k} > \frac{1}{\delta_\ell} \sum_{k=1}^{\ell} m_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{\ell} \left(1 + \frac{1}{\delta_k}\right)^{m_k} > \left(1 + \frac{1}{\delta_\ell}\right)^{\sum_{k=1}^{\ell} m_k}. \tag{8.1.1}$$

On a $\frac{1}{\delta_1} > \cdots > \frac{1}{\delta_t}$ et $m_1 \geq 1$ donc

$$\frac{m_1}{\delta_1} + \frac{m_2}{\delta_2} > \frac{m_1}{\delta_2} + \frac{m_2}{\delta_2} \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{\delta_1}\right)^{m_1}\left(1+\frac{1}{\delta_2}\right)^{m_2} > \left(1+\frac{1}{\delta_2}\right)^{m_1+m_2}.$$

Ainsi, (8.1.1) est vraie pour $\ell = 2$. Si $i_0 \geq 3$, soit $\ell \in \{2, \ldots, i_0 - 1\}$ tel que (8.1.1) soit vraie. Par hypothèse de récurrence, on a

$$\sum_{k=1}^{\ell+1} \frac{m_k}{\delta_k} > \frac{1}{\delta_\ell}\sum_{k=1}^{\ell} m_k + \frac{m_{\ell+1}}{\delta_{\ell+1}} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{\ell+1}\left(1+\frac{1}{\delta_k}\right)^{m_k} > \left(1+\frac{1}{\delta_\ell}\right)^{\sum_{k=1}^{\ell} m_k}\left(1+\frac{1}{\delta_{\ell+1}}\right)^{m_{\ell+1}}.$$

Comme Δ est positive sur $[\gamma_1, \gamma_{i_0}]$, on obtient $\sum_{k=1}^{\ell} m_k \geq 0$ et donc

$$\frac{1}{\delta_\ell}\sum_{k=1}^{\ell} m_k \geq \frac{1}{\delta_{\ell+1}}\sum_{k=1}^{\ell} m_k \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{\delta_\ell}\right)^{\sum_{k=1}^{\ell} m_k} \geq \left(1+\frac{1}{\delta_{\ell+1}}\right)^{\sum_{k=1}^{\ell} m_k}.$$

Ainsi, on a bien

$$\sum_{k=1}^{\ell+1} \frac{m_k}{\delta_k} > \frac{1}{\delta_{\ell+1}}\sum_{k=1}^{\ell+1} m_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{\ell+1}\left(1+\frac{1}{\delta_k}\right)^{m_k} > \left(1+\frac{1}{\delta_{\ell+1}}\right)^{\sum_{k=1}^{\ell+1} m_k},$$

ce qui achève la récurrence.

En utilisant (8.1.1) avec $\ell = i_0$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{i_0} \frac{m_k}{\delta_k} > \frac{1}{\delta_{i_0}}\sum_{k=1}^{i_0} m_k \geq 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{i_0}\left(1+\frac{1}{\delta_k}\right)^{m_k} > \left(1+\frac{1}{\delta_{i_0}}\right)^{\sum_{k=1}^{i_0} m_k} \geq 1,$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

8.1.2 Le cas des applications miroir

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe $k \in \{1, \ldots, d\}$ tel qu'il n'existe qu'un nombre fini de premiers p tels que $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \in z_k\mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$. D'après la partie 6.1, il nous suffit de montrer qu'il existe $k \in \{1, \ldots, d\}$ tel que, pour tout nombre premier p assez grand, il existe $\mathbf{a} \in \{0, \ldots, p-1\}^d$ et $\mathbf{K} \in \mathbb{N}^d$ tels que $\Phi_{p,k}(\mathbf{a} + p\mathbf{K}) \notin p\mathbb{Z}_p$. Nous allons en fait montrer qu'il existe $k \in \{1, \ldots, d\}$ tel que, pour tout premier p assez grand, il existe $\mathbf{a} \in \{0, \ldots, p-1\}^d$ tel que $\Phi_{p,k}(\mathbf{a}) \notin p\mathbb{Z}_p$. Dans ce cas, on a

$$\Phi_{p,k}(\mathbf{a}) = -p\mathcal{Q}(\mathbf{a})\left(\sum_{i=1}^{q_1} \mathbf{e}_i^{(k)} H_{\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i} - \sum_{i=1}^{q_2} \mathbf{f}_i^{(k)} H_{\mathbf{a}\cdot\mathbf{f}_i}\right). \tag{8.1.2}$$

Pour tout $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^d$, on a

$$pH_{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}} = p\sum_{i=1}^{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}} \frac{1}{i} \equiv p \sum_{j=1}^{\lfloor \mathbf{d}\cdot\mathbf{a}/p \rfloor} \frac{1}{jp} \mod p\mathbb{Z}_p$$
$$\equiv \sum_{j=1}^{\lfloor \mathbf{d}\cdot\mathbf{a}/p \rfloor} \frac{1}{j} \mod p\mathbb{Z}_p.$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$ et tout $\mathbf{x} \in [0,1]^d$, on pose

$$\Psi_k(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=1}^{\lfloor \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{x} \rfloor} \frac{\mathbf{e}_i^{(k)}}{j} - \sum_{i=1}^{q_2} \sum_{j=1}^{\lfloor \mathbf{f}_i\cdot\mathbf{x} \rfloor} \frac{\mathbf{f}_i^{(k)}}{j}.$$

Ainsi, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$ et tout $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p-1\}^d$, on a $\Phi_{p,k}(\mathbf{a}) \equiv -\mathcal{Q}(\mathbf{a})\Psi_k(\mathbf{a}/p) \mod p\mathbb{Z}_p$. Il nous suffit donc de montrer qu'il existe $k \in \{1, \dots, d\}$ tel que, pour tout premier p assez grand, il existe $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p-1\}^d$ tel que $v_p(\mathcal{Q}(\mathbf{a})) = v_p(\Psi_k(\mathbf{a}/p)) = 0$. On note $\mathcal{M} := \max\{|\mathbf{d}| : \mathbf{d} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{q_2}\}\}$ dans la suite de la démonstration.

Il existe une constante $\mathcal{P}_1 \geq \mathcal{M}$ telle que, pour tout nombre premier $p \geq \mathcal{P}_1$, il existe $\mathbf{a}_p \in \{0, \dots, p-1\}^d$ tel que $\mathbf{a}_p/p \in \mathcal{U}$. Pour tout $\ell \geq 2$, on a $\mathbf{a}_p/p^\ell \leq \mathbf{a}_p/p^2 < \mathbf{1}/p$ et donc, pour tout $\mathbf{L} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{q_2}\}$, on a $\mathbf{L}\cdot\mathbf{a}_p/p^\ell < \mathbf{L}\cdot\mathbf{1}/p \leq \mathcal{M}/p \leq 1$. Ainsi, pour tout premier $p \geq \mathcal{P}_1$ et tout $\ell \geq 2$, on a $\mathbf{a}_p/p^\ell \notin \mathcal{D}_{e,f}$, ce qui donne

$$v_p(\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_{e,f}\left(\frac{\mathbf{a}_p}{p^\ell}\right) = \Delta_{e,f}\left(\frac{\mathbf{a}_p}{p}\right) = 0,$$

car $\Delta_{e,f}$ est nulle sur $\mathcal{U}$ et sur $[0,1[^d \backslash \mathcal{D}_{e,f}$.

Il suffit de montrer qu'il existe $k \in \{1, \dots, d\}$ et une constante $\mathcal{P} \geq \mathcal{P}_1$ tels que, pour tout premier $p \geq \mathcal{P}$, on a $v_p(\Psi_k(\mathbf{a}_p/p)) = 0$.

Pour tout premier $p \geq \mathcal{P}_1$, tout $i \in \{1, \dots, q_1\}$ et tout $j \in \{1, \dots, q_2\}$, on note $\alpha_i := \lfloor \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{a}_p/p \rfloor$ et $\beta_j := \lfloor \mathbf{f}_j\cdot\mathbf{a}_p/p \rfloor$. Par construction de $\mathcal{U}$ et comme $\mathbf{a}_p/p \in \mathcal{U}$, on a $\lfloor \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{a}_p/p \rfloor = \lfloor \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{x}_0 \rfloor$ et $\lfloor \mathbf{f}_j\cdot\mathbf{a}_p/p \rfloor = \lfloor \mathbf{f}_j\cdot\mathbf{x}_0 \rfloor$. Ainsi, les α_i et β_j ne dépendent pas de p. Il existe donc une constante $\mathcal{P} \geq \mathcal{P}_1$ telle que, pour tout premier $p \geq \mathcal{P}$ et tout $k \in \{1, \dots, d\}$, on a

$$\Psi_k(\mathbf{a}_p/p) = \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\mathbf{e}_i^{(k)}}{j} - \sum_{i=1}^{q_2} \sum_{j=1}^{\beta_j} \frac{\mathbf{f}_i^{(k)}}{j} \in \mathbb{Z}_p^\times \cup \{0\}.$$

Il nous suffit donc de montrer qu'il existe $k \in \{1, \dots, d\}$ tel que $\Psi_k(\mathbf{a}_p/p) \neq 0$. Pour cela, nous utilisons le lemme 24 avec $\mathbf{E}_p := (\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{a}_p, \dots, \mathbf{e}_{q_1}\cdot\mathbf{a}_p)$ à la place de $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}_p := (\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{a}_p, \dots, \mathbf{f}_{q_2}\cdot\mathbf{a}_p)$ à la place de $\mathbf{F}$ et $b = 0$.

On doit montrer, dans un premier temps, que $\mathbf{E}_p$ et $\mathbf{F}_p$ sont deux suites d'entiers strictement positifs disjointes. En effet, par construction de $\mathcal{U}$, pour tout $i \in \{1, \dots, q_1\}$ et tout $j \in \{1, \dots, q_2\}$, on a $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{a}_p/p \neq 0$, $\mathbf{f}_j\cdot\mathbf{a}_p/p \neq 0$ et $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{a}_p/p \neq \mathbf{f}_j\cdot\mathbf{a}_p/p$, donc $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{a}_p \neq 0$,

$\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{a}_p \neq 0$ et $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}_p \neq \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{a}_p$, ce qui donne bien que $\mathbf{E}_p$ et $\mathbf{F}_p$ sont deux suites d'entiers strictement positifs disjointes.

On note $\mathcal{A} := \{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a}_p, \dots, \mathbf{e}_{q_1} \cdot \mathbf{a}_p, \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{a}_p, \dots, \mathbf{f}_{q_2} \cdot \mathbf{a}_p\}$, $\gamma_1 < \cdots < \gamma_t = 1$ les rationnels qui vérifient $\{\gamma_1, \dots, \gamma_t\} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \{\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \dots, \frac{a-1}{a}, 1\}$ et $m_i \in \mathbb{Z}$ l'amplitude du saut de $\Delta_{\mathbf{E}_p, \mathbf{F}_p}$ en γ_i. Comme $\mathbf{a}_p/p \in \mathcal{D}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $a \geq p$ et donc $\max(\mathcal{A}) \geq p$. Ainsi, on a $\gamma_1 = 1/\max(\mathcal{A}) \leq 1/p$. Il existe donc $i_0 \in \{1, \dots, t-1\}$ tel que $\gamma_{i_0} \leq 1/p < \gamma_{i_0+1}$. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\Delta_{\mathbf{E}_p, \mathbf{F}_p}(x) = \sum_{i=1}^{q_1} \lfloor (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}_p)x \rfloor - \sum_{j=1}^{q_2} \lfloor (\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{a}_p)x \rfloor = \Delta_{e,f}(x\mathbf{a}_p) \geq 0,$$

car $\Delta_{\mathbf{e},\mathbf{f}}$ est positive sur $[0,1]^d$. En particulier, $\Delta_{\mathbf{E}_p, \mathbf{F}_p}$ est positive sur $[\gamma_1, \gamma_{i_0}]$.

On peut donc appliquer le lemme 24 qui donne que

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{i=1}^{i_0} \frac{m_i}{\gamma_i} &= \sum_{c \in \mathbf{E}_p} \sum_{j=1}^{\lfloor c/p \rfloor} \frac{c}{j} - \sum_{d \in \mathbf{F}_p} \sum_{j=1}^{\lfloor d/p \rfloor} \frac{d}{j} \qquad (8.1.3) \\ &= \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=1}^{\lfloor \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_i / p \rfloor} \frac{\mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_i}{j} - \sum_{i=1}^{q_2} \sum_{j=1}^{\lfloor \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{f}_i / p \rfloor} \frac{\mathbf{a}_p \cdot \mathbf{f}_i}{j} \\ &= \sum_{k=1}^{d} \mathbf{a}_p^{(k)} \left(\sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\mathbf{e}_i^{(k)}}{j} - \sum_{i=1}^{q_2} \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{\mathbf{f}_i^{(k)}}{j} \right) = \sum_{k=1}^{d} \mathbf{a}_p^{(k)} \Psi_k(\mathbf{a}_p/p), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé, dans (8.1.3), le fait que les abscisses des sauts de $\Delta_{\mathbf{E}_p, \mathbf{F}_p}$ sur $[0, 1/p]$ sont exactement les rationnels de la forme j/a avec $a \in \mathcal{A}$ et $j \leq \lfloor a/p \rfloor$, et le fait qu'une abscisse j/a correspond à un saut d'amplitude positive si $a \in \mathbf{E}_p$ et à un saut d'amplitude négative si $a \in \mathbf{F}_p$.

Il existe donc $k \in \{1, \dots, d\}$ tel que $\Psi_k(\mathbf{a}_p/p) \neq 0$ et, pour tout $p \geq \mathcal{P}$, on a bien $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \notin \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$.

8.1.3 Le cas des applications de type miroir

D'après la partie 8.1.2, il existe $k_0 \in \{1, \dots, d\}$ tel qu'il n'existe qu'un nombre fini de premiers p tels que $q_{e,f,k_0}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$. Pour terminer la preuve du point (ii) du théorème 2, il nous suffit de montrer que, pour tout $\mathbf{L} \in \mathcal{E}$ tel que $\mathbf{L}^{(k_0)} \geq 1$, il n'existe qu'un nombre fini de premiers p tels que $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$. Dans la suite de la démonstration, on fixe un $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{e,f}$ tel que $\mathbf{L}^{(k_0)} \geq 1$ ([1]). Nous allons séparer la preuve en deux cas selon que $\lfloor \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}_0 \rfloor = 0$ ou $\lfloor \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}_0 \rfloor \neq 0$.

D'après la partie 8.1.2, on sait qu'il existe une constante $\mathcal{P}_1$ telle que, pour tout premier $p \geq \mathcal{P}_1$, il existe $\mathbf{a}_p \in \{0, \dots, p-1\}^d$ tel que $\mathbf{a}_p/p \in \mathcal{U}$ et $v_p(\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)) = 0$.

[1] Un tel $\mathbf{L}$ existe car $q_{e,f,k_0}(\mathbf{z}) \notin z_{k_0}\mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$.

Lorsque $\lfloor \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}_0 \rfloor \neq 0$

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une constante $\mathcal{P} \geq \mathcal{P}_1$ telle que, pour tout premier $p \geq \mathcal{P}$, on a $\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}_p) \notin p\mathbb{Z}_p$, ce qui, d'après la partie 6.1, montrera bien qu'il n'existe qu'un nombre fini de premiers p tels que $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$.

On rappelle que, pour tout $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p-1\}^d$, on a

$$\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}) = -p\mathcal{Q}(\mathbf{a})H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{a}} \equiv -\mathcal{Q}(\mathbf{a})H_{\lfloor \mathbf{L}\cdot\mathbf{a}/p \rfloor} \mod p\mathbb{Z}_p. \tag{8.1.4}$$

Pour tout premier $p \geq \mathcal{P}_1$, on a $\lfloor \mathbf{L}\cdot\mathbf{a}_p/p \rfloor = \lfloor \mathbf{L}\cdot\mathbf{x}_0 \rfloor \neq 0$ donc $H_{\lfloor \mathbf{L}\cdot\mathbf{a}_p/p \rfloor} \in \{H_1, \dots, H_{|\mathbf{L}|}\}$. Il existe une constante $\mathcal{P} \geq \mathcal{P}_1$ telle que, pour tout premier $p \geq \mathcal{P}$, on a $\{H_1, \dots, H_{|\mathbf{L}|}\} \subset \mathbb{Z}_p^\times$. Ainsi, pour tout premier $p \geq \mathcal{P}$, on a $\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)H_{\lfloor \mathbf{L}\cdot\mathbf{a}_p/p \rfloor} \in \mathbb{Z}_p^\times$ et, d'après (8.1.4), on obtient bien que $\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}_p) \notin p\mathbb{Z}_p$.

On remarque que dans ce cas, nous n'avons pas utilisé l'hypothèse $\mathbf{L}^{(k_0)} \geq 1$.

Lorsque $\lfloor \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}_0 \rfloor = 0$

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ et une constante $\mathcal{P}' \geq \mathcal{P}_1$ tels que, pour tout premier $p \geq \mathcal{P}'$, on a $\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}_p + pr\mathbf{1}_{k_0}) \notin p\mathbb{Z}_p$. D'après la partie 6.1, ceci montrera bien qu'il n'existe qu'un nombre fini de premiers p tels que $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$.

Dans la suite, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, on note R_k la fraction rationnelle définit comme suit.

$$R_k(X) := \frac{\prod_{i=1}^{q_1} \prod_{j=1}^{\alpha_i} \left(1 + \frac{\mathbf{e}_i^{(k)}}{j} X\right)}{\prod_{i=1}^{q_2} \prod_{j=1}^{\beta_i} \left(1 + \frac{\mathbf{f}_i^{(k)}}{j} X\right)}. \tag{8.1.5}$$

Nous allons utiliser le lemme suivant, que nous démontrons à la fin de cette partie.

Lemme 25. *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$, il existe une constante $\mathcal{P}_r \geq \mathcal{P}_1$ telle que, pour tout premier $p \geq \mathcal{P}_r$ et tout $k \in \{1, \dots, d\}$, on a*

$$\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}_p + pr\mathbf{1}_k) \equiv -\sum_{j=1}^{r} H_{j\mathbf{L}^{(k)}} \mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)\mathcal{Q}(j\mathbf{1}_k)\mathcal{Q}((r-j)\mathbf{1}_k)\big(R_k(j) - R_k(r-j)\big) \mod p\mathbb{Z}_p.$$

D'après la fin de la partie 8.1.2, on sait que

$$\sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\mathbf{e}_i^{(k_0)}}{j} - \sum_{i=1}^{q_2} \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{\mathbf{f}_i^{(k_0)}}{j} \neq 0. \tag{8.1.6}$$

L'inégalité (8.1.6) donne que $R_{k_0}(X)$ n'est pas constante de valeur 1. Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ tel que $R_{k_0}(r) \neq 1$. Soit r_0 le plus petit entier non nul vérifiant $R_{k_0}(r_0) \neq 1$. En

appliquant le lemme 25 avec k_0 à la place de k et r_0 à la place de r, on obtient qu'il existe une constante $\mathcal{P}_{r_0} \geq \mathcal{P}_1$ telle que, pour tout premier $p \geq \mathcal{P}_{r_0}$, on a

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}_p+pr_0\mathbf{1}_{k_0}) \\
&\qquad \equiv -\sum_{j=1}^{r_0} H_{j\mathbf{L}^{(k_0)}}\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)\mathcal{Q}(j\mathbf{1}_{k_0})\mathcal{Q}((r_0-j)\mathbf{1}_{k_0})\big(R_{k_0}(j)-R_{k_0}(r_0-j)\big) \mod p\mathbb{Z}_p \\
&\qquad \equiv -H_{r_0\mathbf{L}^{(k_0)}}\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)\mathcal{Q}(r_0\mathbf{1}_{k_0})\big(R_{k_0}(r_0)-1\big) \mod p\mathbb{Z}_p, \qquad (8.1.7)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé dans (8.1.7) le fait que, pour tout $j \in \{1,\dots,r_0-1\}$, on a $R_{k_0}(j) = R_{k_0}(r_0-j) = 1$. Comme $R_{k_0}(r_0) \neq 1$, on obtient que si $\mathbf{L}^{(k_0)} \geq 1$, alors il existe une constante $\mathcal{P} \geq \mathcal{P}_{r_0}$ telle que, pour tout premier $p \geq \mathcal{P}$, on a

$$H_{r_0\mathbf{L}^{(k_0)}}\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)\mathcal{Q}(r_0\mathbf{1}_{k_0})\left(R_{k_0}(r_0)-1\right) \in \mathbb{Z}_p^\times$$

et donc $\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}_p+pr_0\mathbf{1}_{k_0}) \notin p\mathbb{Z}_p$, ce qui achève la preuve du point (ii) du théorème 2 modulo la preuve du lemme 25.

Démonstration du lemme 25. D'après la partie 6.1, pour tout premier $p \geq \mathcal{P}_1$ et tout $\mathbf{K} \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}_p+p\mathbf{K}) = \sum_{\mathbf{0}\leq\mathbf{j}\leq\mathbf{K}} \mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p+p\mathbf{j})\left(H_{\mathbf{L}\cdot(\mathbf{K}-\mathbf{j})} - pH_{\mathbf{L}\cdot(\mathbf{a}_p+p\mathbf{j})}\right). \qquad (8.1.8)$$

De plus, on a $pH_{\mathbf{L}\cdot(\mathbf{a}_p+p\mathbf{j})} \equiv H_{\left\lfloor\frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{a}_p+p\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}}{p}\right\rfloor} \mod p\mathbb{Z}_p$ avec $\left\lfloor\frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{a}_p+p\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}}{p}\right\rfloor = \lfloor\mathbf{L}\cdot\mathbf{a}_p/p\rfloor + \mathbf{L}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{j}$ car $\lfloor\mathbf{L}\cdot\mathbf{a}_p/p\rfloor = \lfloor\mathbf{L}\cdot\mathbf{x}_0\rfloor = 0$. Ainsi, pour tout $\mathbf{K} \in \mathbb{N}^d$ et tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{j} \leq \mathbf{K}$, on obtient que

$$\mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p+p\mathbf{j})pH_{\mathbf{L}\cdot(\mathbf{a}_p+p\mathbf{j})} \equiv \mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p+p\mathbf{j})H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}} \mod p\mathbb{Z}_p. \qquad (8.1.9)$$

En utilisant (8.1.9) dans (8.1.8), on obtient que, pour tout $\mathbf{K} \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}_p+p\mathbf{K}) \\
&\qquad \equiv \sum_{\mathbf{0}\leq\mathbf{j}\leq\mathbf{K}} \mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p+p\mathbf{j})\left(H_{\mathbf{L}\cdot(\mathbf{K}-\mathbf{j})} - H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}}\right) \mod p\mathbb{Z}_p \\
&\qquad \equiv -\sum_{\mathbf{0}\leq\mathbf{j}\leq\mathbf{K}} H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}}\big(\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p+p\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j}) - \mathcal{Q}(\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p+p(\mathbf{K}-\mathbf{j}))\big) \mod p\mathbb{Z}_p \\
&\qquad \equiv -\sum_{\mathbf{0}\leq\mathbf{j}\leq\mathbf{K}} H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{j}}\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)\mathcal{Q}(\mathbf{j})\mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j})\left(\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p+p\mathbf{j})}{\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)\mathcal{Q}(\mathbf{j})} - \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p+p(\mathbf{K}-\mathbf{j}))}{\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)\mathcal{Q}(\mathbf{K}-\mathbf{j})}\right) \mod p\mathbb{Z}_p.
\end{aligned} \qquad (8.1.10)$$

En appliquant (8.1.10) avec $r\mathbf{1}_k$ à la place de $\mathbf{K}$, on obtient finalement que

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}_p+pr\mathbf{1}_k) \equiv \\
&-\sum_{j=0}^{r} H_{j\mathbf{L}^{(k)}}\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)\mathcal{Q}(j\mathbf{1}_k)\mathcal{Q}((r-j)\mathbf{1}_k)\left(\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p+pj\mathbf{1}_k)}{\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)\mathcal{Q}(j\mathbf{1}_k)} - \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p+(r-j)\mathbf{1}_k)}{\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)\mathcal{Q}((r-j)\mathbf{1}_k)}\right) \mod p\mathbb{Z}_p.
\end{aligned} \qquad (8.1.11)$$

Nous allons maintenant montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{1, \dots, d\}$, on a

$$\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p + pn\mathbf{1}_k)}{\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)\mathcal{Q}(n\mathbf{1}_k)} = R_k(n)(1 + O(p)), \tag{8.1.12}$$

ce qui nous permettra de conclure. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p + pn\mathbf{1}_k)}{\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)\mathcal{Q}(n\mathbf{1}_k)} &= \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p + pn\mathbf{1}_k)}{\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)\mathcal{Q}(pn\mathbf{1}_k)} \frac{\mathcal{Q}(pn\mathbf{1}_k)}{\mathcal{Q}(n\mathbf{1}_k)} \\
&= \frac{1}{\mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)} \frac{\prod_{i=1}^{q_1} \prod_{j=1}^{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}_p} (pn\mathbf{e}_i^{(k)} + j)}{\prod_{i=1}^{q_2} \prod_{j=1}^{\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{a}_p} (pn\mathbf{f}_i^{(k)} + j)} \big(1 + O(p)\big) \qquad (8.1.13) \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{q_1} \prod_{j=1}^{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}_p} \left(1 + \frac{pn\mathbf{e}_i^{(k)}}{j}\right)}{\prod_{i=1}^{q_2} \prod_{j=1}^{\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{a}_p} \left(1 + \frac{pn\mathbf{f}_i^{(k)}}{j}\right)} \big(1 + O(p)\big) \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{q_1} \prod_{j=1}^{\lfloor \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}_p / p \rfloor} \left(1 + \frac{\mathbf{e}_i^{(k)}}{j} n\right)}{\prod_{i=1}^{q_2} \prod_{j=1}^{\lfloor \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{a}_p / p \rfloor} \left(1 + \frac{\mathbf{f}_i^{(k)}}{j} n\right)} \big(1 + O(p)\big) \qquad (8.1.14) \\
&= R_k(n)\big(1 + O(p)\big),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé dans (8.1.13) le lemme 13 appliqué avec $s = 0$, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ et $n\mathbf{1}_k$ à la place de $\mathbf{m}$, qui donne $\mathcal{Q}(pn\mathbf{1}_k)/\mathcal{Q}(n\mathbf{1}_k) = 1 + O(p)$ et, dans (8.1.14), on a utilisé le fait que, pour tout $\mathbf{d} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{q_2}\}$ et tout $j \in \{1, \dots, \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_p\}$, on a $1 + \frac{pn\mathbf{d}^{(k)}}{j} = 1 + O(p)$ si j n'est pas divisible par p.

Il existe une constante $\mathcal{P}_r \geq \mathcal{P}_1$ telle que, pour tout premier $p \geq \mathcal{P}_r$ et tout $n \in \{0, \dots, r\}$, on a $R_k(n) \in \mathbb{Z}_p^\times$ et $H_{n\mathbf{L}^{(k)}} \in \mathbb{Z}_p$. Ainsi, en utilisant (8.1.12) dans (8.1.11), on obtient bien que, pour tout premier $p \geq \mathcal{P}_r$, on a

$$\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a}_p + pr\mathbf{1}_k) \equiv -\sum_{j=1}^{r} H_{j\mathbf{L}^{(k)}} \mathcal{Q}(\mathbf{a}_p)\mathcal{Q}(j\mathbf{1}_k)\mathcal{Q}((r-j)\mathbf{1}_k)\,(R_k(j) - R_k(r-j)) \mod p\mathbb{Z}_p,$$

ce qui achève la preuve du lemme 25. □

8.2 Démonstration du théorème 3

On se place sous les hypothèses du théorème 3. Le but de cette partie est de montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de premiers p tels que $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \in z_k\mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$ et que, pour tout $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{e,f}$ vérifiant $\mathbf{L}^{(k)} \geq 1$, il n'existe qu'un nombre fini de premiers p tels que $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$. On fixe $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{e,f}$ vérifiant $\mathbf{L}^{(k)} \geq 1$ dans cette partie.

D'après la partie 6.1, il nous suffit de montrer que, pour tout premier p assez grand, il existe $\mathbf{a} \in \{0, \dots, p-1\}^d$ et $\mathbf{K} \in \mathbb{N}^d$ tels que $\Phi_{p,k}(\mathbf{a} + \mathbf{K}p) \notin p\mathbb{Z}_p$ et $\Phi_{\mathbf{L},p}(\mathbf{a} + \mathbf{K}p) \notin p\mathbb{Z}_p$.

En fait, nous allons montrer que, pour tout premier p assez grand, on a $\Phi_{p,k}(p\mathbf{1}_k) \notin p\mathbb{Z}_p$ et $\Phi_{\mathbf{L},p}(p\mathbf{1}_k) \notin p\mathbb{Z}_p$. On a

$$\begin{aligned}
&\Phi_{p,k}(p\mathbf{1}_k)\\
&= \sum_{j=0}^{1} \mathcal{Q}((1-j)\mathbf{1}_k)\mathcal{Q}(jp\mathbf{1}_k)\left(\sum_{i=1}^{q_1} \mathbf{e}_i^{(k)}(H_{\mathbf{e}_i^{(k)}(1-j)} - pH_{\mathbf{e}_i^{(k)}jp}) - \sum_{i=1}^{q_2} \mathbf{f}_i^{(k)}(H_{\mathbf{f}_i^{(k)}(1-j)} - pH_{\mathbf{f}_i^{(k)}jp})\right)\\
&= \mathcal{Q}(\mathbf{1}_k)\left(\sum_{i=1}^{q_1} \mathbf{e}_i^{(k)} H_{\mathbf{e}_i^{(k)}} - \sum_{i=1}^{q_2} \mathbf{f}_i^{(k)} H_{\mathbf{f}_i^{(k)}}\right) - p\mathcal{Q}(p\mathbf{1}_k)\left(\sum_{i=1}^{q_1} \mathbf{e}_i^{(k)} H_{\mathbf{e}_i^{(k)}p} - \sum_{i=1}^{q_2} \mathbf{f}_i^{(k)} H_{\mathbf{f}_i^{(k)}p}\right)
\end{aligned} \tag{8.2.1}$$

et

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathbf{L},p}(p\mathbf{1}_k) &= \sum_{j=0}^{1} \mathcal{Q}((1-j)\mathbf{1}_k)\mathcal{Q}(jp\mathbf{1}_k)(H_{\mathbf{L}^{(k)}(1-j)} - pH_{\mathbf{L}^{(k)}jp})\\
&= \mathcal{Q}(\mathbf{1}_k)H_{\mathbf{L}^{(k)}} - p\mathcal{Q}(p\mathbf{1}_k)H_{\mathbf{L}^{(k)}p}.
\end{aligned} \tag{8.2.2}$$

Il existe une constante $\mathcal{P}_1$ telle que, pour tout premier $p \geq \mathcal{P}_1$, on a

$$\sum_{i=1}^{q_1} \mathbf{e}_i^{(k)} H_{\mathbf{e}_i^{(k)}} - \sum_{i=1}^{q_2} \mathbf{f}_i^{(k)} H_{\mathbf{f}_i^{(k)}} \in \mathbb{Z}_p^\times \cup \{0\} \quad \text{et} \quad H_{\mathbf{L}^{(k)}} \in \mathbb{Z}_p^\times,$$

car $\mathbf{L}^{(k)} \geq 1$. Dans la suite, on note Δ_k l'application de Landau associée aux suites $e^{(k)} := (\mathbf{e}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{e}_{q_1}^{(k)})$ et $f^{(k)} := (\mathbf{f}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{f}_{q_2}^{(k)})$. On note aussi M le plus grand élément des suites $e^{(k)}$ et $f^{(k)}$. On remarque que M est non nul car $|e|^{(k)} > |f|^{(k)}$, et que Δ_k est nulle sur $[0, 1/M[$. Si $p > M$, alors, pour tout $\ell \geq 1$, on a $1/p^\ell < 1/M$ et donc

$$v_p(\mathcal{Q}(\mathbf{1}_k)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_{e,f}(\mathbf{1}_k/p^\ell) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_k(1/p^\ell) = 0.$$

Ainsi, pour tout premier $p > \max(\mathcal{P}_1, M) =: \mathcal{P}_2$, on a

$$\mathcal{Q}(\mathbf{1}_k)\left(\sum_{i=1}^{q_1} \mathbf{e}_i^{(k)} H_{\mathbf{e}_i^{(k)}} - \sum_{i=1}^{q_2} \mathbf{f}_i^{(k)} H_{\mathbf{f}_i^{(k)}}\right) \in \mathbb{Z}_p^\times \cup \{0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}(\mathbf{1}_k)H_{\mathbf{L}^{(k)}} \in \mathbb{Z}_p^\times. \tag{8.2.3}$$

De plus, on a

$$pH_{\mathbf{L}^{(k)}p} = p\left(\sum_{i=1}^{\mathbf{L}^{(k)}} \frac{1}{ip} + \sum_{\substack{j=1 \\ p\nmid j}}^{\mathbf{L}^{(k)}p} \frac{1}{j}\right) \equiv H_{\mathbf{L}^{(k)}} \mod p\mathbb{Z}_p,$$

ce qui donne que, pour tout premier $p > \mathcal{P}_2$, on a $pH_{\mathbf{L}^{(k)}p} \in \mathbb{Z}_p^\times$. De la même manière, on obtient

$$p\left(\sum_{i=1}^{q_1} \mathbf{e}_i^{(k)} H_{\mathbf{e}_i^{(k)}p} - \sum_{i=1}^{q_2} \mathbf{f}_i^{(k)} H_{\mathbf{f}_i^{(k)}p}\right) \in \mathbb{Z}_p.$$

Enfin, pour tout premier $p > \mathcal{P}_2$, on a

$$v_p(\mathcal{Q}(p\mathbf{1}_k)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_{e,f}\left(\frac{p\mathbf{1}_k}{p^\ell}\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_k\left(\frac{p}{p^\ell}\right) = \Delta_k(1) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_k\left(\frac{1}{p^\ell}\right) = |\mathbf{e}|^{(k)} - |\mathbf{f}\,|^{(k)} \geq 1,$$

d'où l'on obtient que, pour tout premier $p > \mathcal{P}_2$, on a

$$p\mathcal{Q}(p\mathbf{1}_k)\left(\sum_{i=1}^{q_1} \mathbf{e}_i^{(k)} H_{\mathbf{e}_i^{(k)}p} - \sum_{i=1}^{q_2} \mathbf{f}_i^{(k)} H_{\mathbf{f}_i^{(k)}p}\right) \in p\mathbb{Z}_p \quad \text{et} \quad p\mathcal{Q}(p\mathbf{1}_k) H_{\mathbf{L}^{(k)}p} \in p\mathbb{Z}_p. \tag{8.2.4}$$

En utilisant (8.2.3) et (8.2.4) dans (8.2.2), on obtient bien que, pour tout premier $p > \mathcal{P}_2$, on a $\Phi_{\mathbf{L},p}(p\mathbf{1}_k) \notin p\mathbb{Z}_p$.

Les appartenances (8.2.3) et (8.2.4) jointes à (8.2.1) montrent qu'il nous suffit de prouver que $\sum_{i=1}^{q_1} \mathbf{e}_i^{(k)} H_{\mathbf{e}_i^{(k)}} - \sum_{i=1}^{q_2} \mathbf{f}_i^{(k)} H_{\mathbf{f}_i^{(k)}} \neq 0$ pour conclure que, pour tout premier $p > \mathcal{P}_2$, on a bien $\Phi_{p,k}(p\mathbf{1}_k) \notin p\mathbb{Z}_p$. Pour cela, on procède comme suit.

On note $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ les sous-suites respectives de $e^{(k)}$ et $f^{(k)}$ obtenues de la manière suivante. On enlève les éléments nuls de $e^{(k)}$ et $f^{(k)}$ et, si $e^{(k)}$ et $f^{(k)}$ ont un élément en commun, alors on l'enlève de $e^{(k)}$ et $f^{(k)}$ une seule fois. On répète cette dernière étape jusqu'à ce que les suites obtenues soient disjointes. La suite $\mathbf{F}$ peut être vide mais la condition $|e|^{(k)} > |f|^{(k)}$ assure que la suite $\mathbf{E}$ est non vide. On a alors

$$\sum_{i=1}^{q_1} \mathbf{e}_i^{(k)} H_{\mathbf{e}_i^{(k)}} - \sum_{i=1}^{q_2} \mathbf{f}_i^{(k)} H_{\mathbf{f}_i^{(k)}} = \sum_{c\in\mathbf{E}} cH_c - \sum_{d\in\mathbf{F}} dH_d \quad \text{et} \quad \Delta_k = \Delta_{\mathbf{E},\mathbf{F}}. \tag{8.2.5}$$

En particulier, si $\mathbf{F}$ est vide alors on a bien $\sum_{i=1}^{q_1} \mathbf{e}_i^{(k)} H_{\mathbf{e}_i^{(k)}} - \sum_{i=1}^{q_2} \mathbf{f}_i^{(k)} H_{\mathbf{f}_i^{(k)}} = \sum_{c\in\mathbf{E}} cH_c > 0$. Dans la suite, on suppose que $\mathbf{F}$ est non vide.

Comme $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ sont deux suites d'entiers strictement positifs disjointes, on peut appliquer le lemme 24 aux suites $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ avec 0 à la place de b. En utilisant les notations du lemme 24, on obtient que

$$\sum_{c\in\mathbf{E}} cH_c - \sum_{d\in\mathbf{F}} dH_d = \sum_{c\in\mathbf{E}} \sum_{j=1}^{c} \frac{c}{j} - \sum_{d\in\mathbf{F}} \sum_{j=1}^{d} \frac{d}{j} = \sum_{i=1}^{t} \frac{m_i}{\gamma_i}. \tag{8.2.6}$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\Delta_{\mathbf{E},\mathbf{F}}(x) = \Delta_k(x) = \Delta_{e,f}(x\mathbf{1}_k) \geq 0$ donc $\Delta_{\mathbf{E},\mathbf{F}}$ est positive sur $[\gamma_1, \gamma_t]$ et le lemme 24 donne que $\sum_{i=1}^{t} \frac{m_i}{\gamma_i} > 0$. Ceci joint à (8.2.5) et (8.2.6) montre bien que $\sum_{i=1}^{q_1} \mathbf{e}_i^{(k)} H_{\mathbf{e}_i^{(k)}} - \sum_{i=1}^{q_2} \mathbf{f}_i^{(k)} H_{\mathbf{f}_i^{(k)}} \neq 0$ et achève la preuve du théorème 3.

Chapitre 9

Démonstration alternative du cas (i) du théorème 2 en une variable

Dans ce chapitre, nous montrons comment appliquer le théorème 7 pour démontrer le point (i) du théorème 2 dans le cas d'une variable, cette preuve est celle présentée dans [7]. Soit $e = (e_1, \dots, e_{q_1})$ et $f = (f_1, \dots, f_{q_2})$ deux suites d'entiers strictement positifs telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une suite à termes entiers (ce qui équivaut à $\Delta_{e,f} \geq 0$ sur $[0,1]$) et vérifiant $|e| = |f|$. On suppose de plus que, pour tout $x \in [1/M_{e,f}, 1[$, on a $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$. Nous devons montrer que, pour tout $L \in \{1, \dots, M_{e,f}\}$, on a $q_{L,e,f}(z) \in \mathbb{Z}[[z]]$. Pour alléger les notations, on note $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_{e,f}$, $\Delta = \Delta_{e,f}$ et $q_L := q_{L,e,f}$.

D'après la reformulation du problème d'intégralité des coefficients de Taylor de $q_L(z)$ effectuée dans la partie 7.1, il nous suffit de montrer que, pour tout premier p, tout $a \in \{0, \dots, p-1\}$ et tout K, s et m dans $\mathbb{N}$, on a

$$S(a, K, s, p, m) \in p^{s+1} g_p(m) \mathbb{Z}_p.$$

On fixe $L \in \{1, \dots, M_{e,f}\}$ et un nombre premier p dans ce chapitre. Précisons la manière dont nous allons utiliser le théorème 7. Nous allons montrer dans les parties suivantes qu'il existe un entier naturel λ_p tel qu'en posant $\mathbf{A}_r = \mathcal{Q}$ et $\mathbf{g}_r = g_p$ pour tout $r \geq 0$, $((\mathbf{A}_r)_{r\geq 0}, (\mathbf{g}_r)_{r\geq 0})$ est un λ_p-couple de Dwork. En appliquant alors le théorème 7, on obtiendra bien $S(a, K, s, p, m) \in p^{s+1} g_p(m) \mathbb{Z}_p$, comme voulu.

Dans les parties suivantes, on vérifie les hypothèses d'application du théorème 7.

9.0.1 Vérification des conditions (i), (ii) et (iv) du théorème 7

On note $g := g_p$ et $\mu := \mu_p$. Pour tout $r \geq 0$, on pose $\mathbf{A}_r = \mathcal{Q}$ et $\mathbf{g}_r = g$. On définit λ_p comme étant l'unique entier naturel vérifiant $p^{\lambda_p} < M_{e,f} \leq p^{\lambda_p+1}$[1]. On va montrer dans cette partie que les suites $(\mathbf{A}_r)_{r\geq 0}$ et $(\mathbf{g}_r)_{r\geq 0}$ vérifient les conditions (i), (ii) et (iv) du théorème 7 avec $k_0 = \lambda_p$. Pour cela, nous allons uniquement nous servir de l'inégalité

[1] On a bien $M_{e,f} \geq 2$ puisque, si $M_{e,f} = 1$, alors $|e| \geq 1$ et $|f| = 0$, ou bien $|e| = 0$ et $|f| \geq 1$, ce qui contredit l'hypothèse $|e| = |f|$.

$p^{\lambda_p} < M_{e,f}$. L'inégalité $M_{e,f} \leq p^{\lambda_p+1}$ nous servira à démontrer la condition (iii) du théorème 7 dans la partie suivante.

– Vérification de (i) et (ii).

Pour tout r et m dans $\mathbb{N}$, on a $|\mathbf{A}_r(0)|_p = |\mathcal{Q}(0)|_p = 1$. De plus, $v_p(\mathbf{g}_r(m)) = \mu(m) \geq 0$, donc on a bien $\mathbf{g}_r(m) \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. Il ne reste plus qu'à montrer que $\mathbf{A}_r(m) \in \mathbf{g}_r(m)\mathbb{Z}_p$, ce qui revient donc à montrer qu'on a $\mu(m) \leq v_p(\mathcal{Q}(m))$. C'est bien le cas puisque, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 1$, on a $\Delta\left(\left\{m/p^\ell\right\}\right) \geq 1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{m/p^\ell\right\}\right)$, car $\Delta(x) \geq 1$ pour $1 > x \geq 1/M_{e,f}$. On obtient bien

$$v_p(\mathcal{Q}(m)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{m}{p^\ell}\right\}\right) \geq \sum_{\ell=1}^{\infty} 1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{m}{p^\ell}\right\}\right) = \mu(m).$$

D'où le résultat.

– Vérification de (iv) avec $k_0 = \lambda_p$.

Si $\lambda_p = 0$, il n'y a rien à vérifier. Supposons $\lambda_p \geq 1$. Soit $k \in \{1, \ldots, \lambda_p\}$, $v \in \{1, \ldots, p-1\}$ et $m \in \mathbb{N}$. On a $p^{\lambda_p} < M_{e,f}$ donc $p^k < M_{e,f}$. Ainsi $1/M_{e,f} < 1/p^k$ et donc, pour tout $\ell \in \{1, \ldots, k\}$, on a

$$1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{v+mp^k}{p^\ell}\right\}\right) = 1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{v}{p^\ell}\right\}\right) = 1.$$

On a alors

$$v_p(g(v+mp^k)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} 1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{v+mp^k}{p^\ell}\right\}\right) = k + \sum_{\ell=k+1}^{\infty} 1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{v+mp^k}{p^\ell}\right\}\right).$$

Pour tout $\ell \geq k+1$, on a $\left\{(v+mp^k)/p^\ell\right\} > \left\{mp^k/p^\ell\right\}$. En effet, on écrit $m = cp^{\ell-k} + d$ où $c \in \mathbb{N}$ et $d \in \{0, \ldots, p^{\ell-k} - 1\}$, et on obtient bien

$$\left\{\frac{v+mp^k}{p^\ell}\right\} = \left\{\frac{v+dp^k}{p^\ell}\right\} = \frac{v+dp^k}{p^\ell} > \frac{dp^k}{p^\ell} = \left\{\frac{dp^k}{p^\ell}\right\} = \left\{\frac{mp^k}{p^\ell}\right\}.$$

Donc

$$v_p(g(v+mp^k)) \geq k + \sum_{\ell=k+1}^{\infty} 1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{mp^k}{p^\ell}\right\}\right) = k + v_p(g(mp^k))$$

et on a bien $g(v+mp^k) \in p^k g(mp^k)\mathbb{Z}_p$. De plus,

$$\begin{aligned} v_p(g(mp^k)) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} 1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{mp^k}{p^\ell}\right\}\right) = \sum_{\ell=k+1}^{\infty} 1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{mp^k}{p^\ell}\right\}\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} 1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{m}{p^\ell}\right\}\right) = v_p(g(m)), \end{aligned}$$

donc $g(mp^k) \in g(m)\mathbb{Z}_p$, comme voulu.

9.0.2 Vérification de la condition (iii) du théorème 7

On rappelle que λ_p est l'unique entier naturel vérifiant $p^{\lambda_p} < M_{e,f} \leq p^{\lambda_p+1}$. On va montrer que les suites $(\mathbf{A}_r)_{r\geq 0}$ et $(\mathbf{g}_r)_{r\geq 0}$ vérifient la condition (iii) du théorème 7 avec $k_0 = \lambda_p$. Pour cela, nous n'utiliserons que l'inégalité $M_{e,f} \leq p^{\lambda_p+1}$. D'après la partie précédente, la vérification de la condition (iii) montrera que $((\mathbf{A}_r)_{r\geq 0}, (\mathbf{g}_r)_{r\geq 0})$ est un λ_p-couple de Dwork et ainsi achèvera la preuve du point (i) du théorème 2 dans le cas d'une variable. Nous allons montrer que la condition (iii) est vérifiée en deux étapes, selon que $v_p(m) \geq \lambda_p$ ou que $v_p(m) \leq \lambda_p - 1$. La preuve est relativement longue et décomposée en nombreuses étapes.

Lorsque $v_p(m) \leq \lambda_p - 1$

Nous devons montrer ici que si $\lambda_p \geq 1$ et si $v_p(m) = k \leq \lambda_p - 1$, alors on a

$$\frac{\mathcal{Q}(mp)}{\mathcal{Q}(0)} - \frac{\mathcal{Q}(m)}{\mathcal{Q}(0)} \in p^{k+1} g(m)\mathbb{Z}_p.$$

Comme $\mathcal{Q}(0) = 1$, cela revient à montrer que l'on a

$$\mathcal{Q}(m)\left(\frac{\mathcal{Q}(mp)}{\mathcal{Q}(m)} - 1\right) \in p^{k+1} g(m)\mathbb{Z}_p. \tag{9.0.1}$$

On écrit $m = p^k m'$, où $m' \in \mathbb{N}$ et (9.0.1) devient

$$\mathcal{Q}(m)\left(\frac{\mathcal{Q}(m'p^{k+1})}{\mathcal{Q}(m'p^k)} - 1\right) \in p^{k+1} g(m)\mathbb{Z}_p. \tag{9.0.2}$$

En appliquant le lemme 13 avec $s = k$, $\mathbf{c} = 0$ et m' à la place de $\mathbf{m}$, on obtient

$$\frac{\mathcal{Q}(m'p^{k+1})}{\mathcal{Q}(m'p^k)} \in 1 + p^{k+1}\mathbb{Z}_p$$

et donc

$$\left(\frac{\mathcal{Q}(m'p^{k+1})}{\mathcal{Q}(m'p^k)} - 1\right) \in p^{k+1}\mathbb{Z}_p.$$

De plus, d'après la condition (ii) du théorème 7, on a $\mathcal{Q}(m) \in g(m)\mathbb{Z}_p$, donc on a bien (9.0.2).

Lorsque $v_p(m) \geq \lambda_p$

Nous démontrons ici le fait suivant.

Soit p un nombre premier et λ_p l'unique entier naturel tel que $p^{\lambda_p} < M_{e,f} \leq p^{\lambda_p+1}$. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, tout $v \in \{0, \ldots, p-1\}$, tout $u \in \{0, \ldots, p^s - 1\}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\mathcal{Q}(v + up + mp^{s+\lambda_p+1})}{\mathcal{Q}(v + up)} - \frac{\mathcal{Q}(u + mp^{s+\lambda_p})}{\mathcal{Q}(u)} \in p^{s+\lambda_p+1}\frac{g(mp^{\lambda_p})}{g(v + up)}\mathbb{Z}_p. \tag{9.0.3}$$

L'équation (9.0.3) est vérifiée si et seulement si, pour tout $v \in \{0,\dots,p-1\}$, tout $u \in \{0,\dots,p^s-1\}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(1 - \frac{\mathcal{Q}(v+up)}{\mathcal{Q}(u)} \frac{\mathcal{Q}(u+mp^{s+\lambda_p})}{\mathcal{Q}(v+up+mp^{s+\lambda_p+1})}\right) \frac{\mathcal{Q}(v+up+mp^{s+\lambda_p+1})}{\mathcal{Q}(v+up)} \in p^{s+\lambda_p+1} \frac{g(mp^{\lambda_p})}{g(v+up)} \mathbb{Z}_p. \tag{9.0.4}$$

Dans la suite, on pose

$$X_s(v,u,m) := \frac{\mathcal{Q}(v+up)}{\mathcal{Q}(u)} \frac{\mathcal{Q}(u+mp^{s+\lambda_p})}{\mathcal{Q}(v+up+mp^{s+\lambda_p+1})}.$$

Ainsi, pour démontrer (9.0.3), il nous suffit de montrer que

$$(X_s(v,u,m)-1) \frac{\mathcal{Q}(v+up+mp^{s+\lambda_p+1})}{g(mp^{\lambda_p})} \in p^{s+\lambda_p+1} \frac{\mathcal{Q}(v+up)}{g(v+up)} \mathbb{Z}_p. \tag{9.0.5}$$

Afin d'estimer la valuation de $X_s(v,u,m)-1$, posons, pour tout $v \in \{0,\dots,p-1\}$, tout $u \in \{0,\dots,p^s-1\}$ et tous $s,m \in \mathbb{N}$,

$$Y_s(v,u,m) := \frac{\prod_{i=1}^{q_2} \prod_{j=1}^{\lfloor f_i v/p \rfloor} \left(1 + \frac{f_i m p^{s+\lambda_p}}{f_i u + j}\right)}{\prod_{i=1}^{q_1} \prod_{j=1}^{\lfloor e_i v/p \rfloor} \left(1 + \frac{e_i m p^{s+\lambda_p}}{e_i u + j}\right)}.$$

Pour $s,m \in \mathbb{N}$ et $a \in \{0,\dots,p^s-1\}$, on note $\eta_s(a,m) := \sum_{\ell=s+1}^{\infty} \Delta\left(\left\{(a+mp^s)/p^\ell\right\}\right)$. On va énoncer un certain nombre de lemmes, que l'on démontre dans la partie 9.0.2.

Lemme 26. *Pour tout $v \in \{0,\dots,p-1\}$, tout $u \in \{0,\dots,p^s-1\}$ et tous $s,m \in \mathbb{N}$, on a $X_s(v,u,m) \in Y_s(v,u,m)\left(1+p^{s+\lambda_p+1}\mathbb{Z}_p\right)$ et*

$$v_p(Y_s(v,u,m)) = (\eta_{s+\lambda_p+1}(v+up,0) - \eta_{s+\lambda_p}(u,0)) - (\eta_{s+\lambda_p+1}(v+up,m) - \eta_{s+\lambda_p}(u,m)).$$

Lemme 27. *Soit $s \in \mathbb{N}$, $v \in \{0,\dots,p-1\}$ et $u \in \{0,\dots,p^s-1\}$. Si $\{(v+up)/p^j\} < 1/M_{e,f}$ pour un $j \in \{1,\dots,s+\lambda_p+1\}$, alors $Y_s(v,u,m) \in 1+p^{s+\lambda_p-j+2}\mathbb{Z}_p$.*

Lemme 28. *Pour tout $s \in \mathbb{N}$, tout $a \in \{0,\dots,p^{s+1}-1\}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on a*

$$\eta_{s+\lambda_p+1}(a,m) \geq \mu(mp^{\lambda_p}) \tag{9.0.6}$$

et

$$v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(a+mp^{s+\lambda_p+1})}{g(mp^{\lambda_p})}\right) \geq \sum_{\ell=1}^{s+\lambda_p+1} \Delta\left(\left\{\frac{a}{p^\ell}\right\}\right). \tag{9.0.7}$$

Lemme 29. *Pour tout $s \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \{0,\dots,p^{s+1}-1\}$, on a : $\eta_{s+\lambda_p+1}(a,0) = 0$,*

$$v_p(\mathcal{Q}(a)) = \sum_{\ell=1}^{s+\lambda_p+1} \Delta\left(\left\{\frac{a}{p^\ell}\right\}\right) \quad \text{et} \quad v_p(g(a)) = \sum_{\ell=1}^{s+\lambda_p+1} 1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{a}{p^\ell}\right\}\right).$$

Remarque. Le lemme 29 repose essentiellement sur l'inégalité $M_{e,f} \leq p^{\lambda_p+1}$.

Afin de montrer (9.0.5), on va maintenant différencier deux cas.

– *Cas* 1 : Supposons qu'il existe $j \in \{1, \dots, s+\lambda_p+1\}$ tel que

$$\left\{\frac{v+up}{p^j}\right\} < \frac{1}{M_{e,f}}. \tag{9.0.8}$$

Soit j_0 le plus petit des $j \in \{1, \dots, s+\lambda_p+1\}$ vérifiant (9.0.8). D'après le lemme 27 appliqué en j_0, on obtient $Y_s(v,u,m) \in 1 + p^{s+\lambda_p-j_0+2}\mathbb{Z}_p$ et donc, d'après le lemme 26,

$$v_p(X_s(v,u,m)-1) \geq s+\lambda_p-j_0+2.$$

Montrons qu'on a $v_p(g(v+up)) \geq j_0-1$. Si $j_0=1$, c'est évident. Si $j_0 \geq 2$, alors, pour tout $\ell \in \{1, \dots, j_0-1\}$, on a $\{(v+up)/p^\ell\} \geq 1/M_{e,f}$ et donc

$$v_p(g(v+up)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{v+up}{p^\ell}\right\}\right) \geq j_0-1.$$

D'après (9.0.7), on obtient

$$v_p\left((X_s(v,u,m)-1)\frac{\mathcal{Q}(v+up+mp^{s+\lambda_p+1})}{g(mp^{\lambda_p})}\right) \geq v_p(X_s(v,u,m)-1) + \sum_{\ell=1}^{s+\lambda_p+1} \Delta\left(\left\{\frac{v+up}{p^\ell}\right\}\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}
&v_p\left((X_s(v,u,m)-1)\frac{\mathcal{Q}(v+up+mp^{s+\lambda_p+1})}{g(mp^{\lambda_p})}\right) \\
&\quad \geq v_p(X_s(v,u,m)-1) + v_p(g(v+up)) + \left(\sum_{\ell=1}^{s+\lambda_p+1} \Delta\left(\left\{\frac{v+up}{p^\ell}\right\}\right) - v_p(g(v+up))\right) \\
&\quad \geq (s+\lambda_p-j_0+2) + j_0 - 1 + v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(v+up)}{g(v+up)}\right) \qquad (9.0.9) \\
&\quad \geq s+\lambda_p+1+v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(v+up)}{g(v+up)}\right),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité $v_p(\mathcal{Q}(v+up)) = \sum_{\ell=1}^{s+\lambda_p+1} \Delta(\{(v+up)/p^\ell\})$ du lemme 29 dans (9.0.9). On a donc bien (9.0.5) dans ce cas.

– *Cas* 2 : Supposons que, pour tout $j \in \{1, \dots, s+\lambda_p+1\}$, on ait $\{(v+up)/p^j\} \geq 1/M_{e,f}$.

Ainsi, on a $v_p(g(v+up)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[1/M_{e,f},1[}(\{(v+up)/p^\ell\}) \geq s+\lambda_p+1$.

Si $v_p(Y_s(v,u,m)) \geq 0$, alors, d'après le lemme 26, $v_p(X_s(v,u,m)-1) \geq 0$ et, d'après (9.0.7) et le lemme 29, on a

$$\begin{aligned}
v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(v+up+mp^{s+\lambda_p+1})}{g(mp^{\lambda_p})}\right) &\geq \sum_{\ell=1}^{s+\lambda_p+1} \Delta\left(\left\{\frac{v+up}{p^\ell}\right\}\right) = v_p(g(v+up)) + v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(v+up)}{g(v+up)}\right) \\
&\geq s+\lambda_p+1+v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(v+up)}{g(v+up)}\right).
\end{aligned}$$

On a donc bien (9.0.5).

Supposons maintenant que $v_p(Y_s(v,u,m)) < 0$. Dans ce cas, d'après le lemme 26, on a

$$\begin{aligned} v_p(X_s(v,u,m)-1) &= v_p(Y_s(v,u,m)) \\ &= \eta_{s+\lambda_p+1}(v+up,0) - \eta_{s+\lambda_p}(u,0) - \eta_{s+\lambda_p+1}(v+up,m) + \eta_{s+\lambda_p}(u,m). \end{aligned}$$

D'après le lemme 29, on a $\eta_{s+\lambda_p+1}(v+up,0) = 0$ et, si $s \geq 1$, alors $\eta_{s+\lambda_p}(u,0) = 0$. Si $s = 0$, alors on a $u = 0$ et $\eta_{\lambda_p}(0,0) = 0$. Ainsi, pour tout $s \geq 0$, on a

$$v_p(X_s(v,u,m)-1) = \eta_{s+\lambda_p}(u,m) - \eta_{s+\lambda_p+1}(v+up,m).$$

De plus,

$$\begin{aligned} v_p(\mathcal{Q}(v+up+mp^{s+\lambda_p+1})) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{v+up+mp^{s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right\}\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{s+\lambda_p+1} \Delta\left(\left\{\frac{v+up}{p^\ell}\right\}\right) \\ &+ \sum_{\ell=s+\lambda_p+2}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{v+up+mp^{s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right\}\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{s+\lambda_p+1} \Delta\left(\left\{\frac{v+up}{p^\ell}\right\}\right) + \eta_{s+\lambda_p+1}(v+up,m). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} v_p\Bigg((X_s(v,u,m)-1)&\frac{\mathcal{Q}(v+up+mp^{s+\lambda_p+1})}{g(mp^{\lambda_p})}\Bigg) \\ &= \eta_{s+\lambda_p}(u,m) - \eta_{s+\lambda_p+1}(v+up,m) \\ &+ \sum_{\ell=1}^{s+\lambda_p+1} \Delta\left(\left\{\frac{v+up}{p^\ell}\right\}\right) + \eta_{s+\lambda_p+1}(v+up,m) - \mu(mp^{\lambda_p}) \\ &= \sum_{\ell=1}^{s+\lambda_p+1} \Delta\left(\left\{\frac{v+up}{p^\ell}\right\}\right) + \eta_{s+\lambda_p}(u,m) - \mu(mp^{\lambda_p}) \\ &= v_p(g(v+up)) + v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(v+up)}{g(v+up)}\right) + \eta_{s+\lambda_p}(u,m) - \mu(mp^{\lambda_p}) \\ &\geq s+\lambda_p+1 + v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(v+up)}{g(v+up)}\right) + \eta_{s+\lambda_p}(u,m) - \mu(mp^{\lambda_p}). \end{aligned}$$

Si $s = 0$, alors on a $u = 0$ et

$$\eta_{\lambda_p}(0,m) = \sum_{\ell=\lambda_p+1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{mp^{\lambda_p}}{p^\ell}\right\}\right) \geq \sum_{\ell=\lambda_p+1}^{\infty} \mathbf{1}_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{mp^{\lambda_p}}{p^\ell}\right\}\right) = \mu(mp^{\lambda_p})$$

et on a bien (9.0.5). En revanche, si $s \geq 1$ alors, en utilisant le lemme 28 avec $s-1$ à la place de s et $a = u$, on obtient $\eta_{s+\lambda_p}(u,m) \geq \mu(mp^{\lambda_p})$, ce qui donne bien (9.0.5). Ceci achève la preuve de la congruence (9.0.3), modulo celles des divers lemmes.

Démonstration des lemmes 26, 27, 28 et 29

Démonstration du lemme 26. On veut montrer que $X_s(v,u,m) \in Y_s(v,u,m)(1+p^{s+\lambda_p+1}\mathbb{Z}_p)$.

On a

$$X_s(v,u,m) = \frac{\mathcal{Q}(v+up)}{\mathcal{Q}(up)} \frac{\mathcal{Q}(up+mp^{s+\lambda_p+1})}{\mathcal{Q}(v+up+mp^{s+\lambda_p+1})} \cdot \frac{\mathcal{Q}(up)}{\mathcal{Q}(u)} \frac{\mathcal{Q}(u+mp^{s+\lambda_p})}{\mathcal{Q}(up+mp^{s+\lambda_p+1})}. \tag{9.0.10}$$

En appliquant le lemme 13 avec $\mathbf{c} = u$ et $s+\lambda_p$ pour s, on obtient

$$\frac{\mathcal{Q}(up)}{\mathcal{Q}(u)} \frac{\mathcal{Q}(u+mp^{s+\lambda_p})}{\mathcal{Q}(up+mp^{s+\lambda_p+1})} \in 1 + p^{s+\lambda_p+1}\mathbb{Z}_p,$$

ce qui, joint à (9.0.10), donne

$$X_s(v,u,m) \in \frac{\mathcal{Q}(v+up)}{\mathcal{Q}(up)} \frac{\mathcal{Q}(up+mp^{s+\lambda_p+1})}{\mathcal{Q}(v+up+mp^{s+\lambda_p+1})}(1+p^{s+\lambda_p+1}\mathbb{Z}_p). \tag{9.0.11}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathcal{Q}(v+up)}{\mathcal{Q}(up)} \cdot \frac{\mathcal{Q}(up+mp^{s+\lambda_p+1})}{\mathcal{Q}(v+up+mp^{s+\lambda_p+1})} \\
&\qquad = \frac{\left(\prod_{i=1}^{q_1}\prod_{k=1}^{e_i v}(e_i up+k)\right)\left(\prod_{i=1}^{q_2}\prod_{k=1}^{f_i v}(f_i(up+mp^{s+\lambda_p+1})+k)\right)}{\left(\prod_{i=1}^{q_2}\prod_{k=1}^{f_i v}(f_i up+k)\right)\left(\prod_{i=1}^{q_1}\prod_{k=1}^{e_i v}(e_i(up+mp^{s+\lambda_p+1})+k)\right)} \\
&\qquad = \frac{\prod_{i=1}^{q_2}\prod_{k=1}^{f_i v}\left(1+\frac{f_i mp^{s+\lambda_p+1}}{f_i up+k}\right)}{\prod_{i=1}^{q_1}\prod_{k=1}^{e_i v}\left(1+\frac{e_i mp^{s+\lambda_p+1}}{e_i up+k}\right)}.
\end{aligned}$$

Si $d \in \{e_1,\dots,e_{q_1},f_1,\dots,f_{q_2}\}$ et $k \in \{1,\dots,dv\}$, alors $dup+k$ est divisible par p si et seulement s'il existe $j \in \{1,\dots,\lfloor dv/p \rfloor\}$ tel que $k = jp$. On a donc

$$\prod_{k=1}^{dv}\left(1+\frac{dmp^{s+\lambda_p+1}}{dup+k}\right) = \prod_{j=1}^{\lfloor dv/p \rfloor}\left(1+\frac{dmp^{s+\lambda_p}}{du+j}\right)(1+O(p^{s+\lambda_p+1})).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{Q}(v+up)}{\mathcal{Q}(up)} \cdot \frac{\mathcal{Q}(up+mp^{s+\lambda_p+1})}{\mathcal{Q}(v+up+mp^{s+\lambda_p+1})} &= \frac{\prod_{i=1}^{q_2}\prod_{j=1}^{\lfloor f_i v/p \rfloor}\left(1+\frac{f_i mp^{s+\lambda_p}}{f_i u+j}\right)}{\prod_{i=1}^{q_1}\prod_{j=1}^{\lfloor e_i v/p \rfloor}\left(1+\frac{e_i mp^{s+\lambda_p}}{e_i u+j}\right)}(1+O(p^{s+\lambda_p+1})) \\
&= Y_s(v,u,m)(1+O(p^{s+\lambda_p+1}))
\end{aligned}$$

et donc $X_s(v,u,m) \in Y_s(v,u,m)(1+p^{s+\lambda_p+1}\mathbb{Z}_p)$, comme voulu.

On va maintenant montrer qu'on a bien aussi

$$v_p(Y_s(v,u,m)) = \eta_{s+\lambda_p+1}(v+up,0) - \eta_{s+\lambda_p}(u,0) - (\eta_{s+\lambda_p+1}(v+up,m) - \eta_{s+\lambda_p}(u,m)).$$

On a vu ci-dessus que $v_p(Y_s(v,u,m)) = v_p(X_s(v,u,m))$. Or, d'après (9.0.11), on a aussi

$$\begin{aligned} v_p(X_s(v,u,m)) &= v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(v+up)}{\mathcal{Q}(up)} \cdot \frac{\mathcal{Q}(up+mp^{s+\lambda_p+1})}{\mathcal{Q}(v+up+mp^{s+\lambda_p+1})}\right) \\ &= v_p(\mathcal{Q}(v+up)) - v_p(\mathcal{Q}(up)) + v_p(\mathcal{Q}(up+mp^{s+\lambda_p+1})) \\ &- v_p(\mathcal{Q}(v+up+mp^{s+\lambda_p+1})) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{v+up}{p^\ell}\right\}\right) - \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{up}{p^\ell}\right\}\right) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{up+mp^{s+\lambda_p+1})}{p^\ell}\right\}\right) \\ &- \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{v+up+mp^{s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right\}\right). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{v+up}{p^\ell}\right\}\right) - \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{v+up+mp^{s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right\}\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{v+up}{p^\ell}\right\}\right) - \sum_{\ell=1}^{s+\lambda_p+1} \Delta\left(\left\{\frac{v+up}{p^\ell}\right\}\right) - \sum_{\ell=s+\lambda_p+2}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{v+up+mp^{s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right\}\right) \\ &= \sum_{\ell=s+\lambda_p+2}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{v+up}{p^\ell}\right\}\right) - \sum_{\ell=s+\lambda_p+2}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{v+up+mp^{s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right\}\right) \\ &= \eta_{s+\lambda_p+1}(v+up,0) - \eta_{s+\lambda_p+1}(v+up,m), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{up}{p^\ell}\right\}\right) - \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{up+mp^{s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right\}\right) \\ &= \sum_{\ell=s+\lambda_p+2}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{up}{p^\ell}\right\}\right) - \sum_{\ell=s+\lambda_p+2}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{up+mp^{s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right\}\right) \\ &= \sum_{\ell=s+\lambda_p+1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{u}{p^\ell}\right\}\right) - \sum_{\ell=s+\lambda_p+1}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{u+mp^{s+\lambda_p}}{p^\ell}\right\}\right) = \eta_{s+\lambda_p}(u,0) - \eta_{s+\lambda_p}(u,m). \end{aligned}$$

Donc, $v_p(Y_s(v,u,m)) = \eta_{s+\lambda_p+1}(v+up,0) - \eta_{s+\lambda_p}(u,0) - (\eta_{s+\lambda_p+1}(v+up,m) - \eta_{s+\lambda_p}(u,m))$, ce qui achève la preuve du lemme. □

Démonstration du lemme 27. Soit $s \in \mathbb{N}$, $v \in \{0, \dots, p-1\}$ et $u \in \{0, \dots, p^s - 1\}$. Soit $\sum_{k=0}^{\infty} u_k p^k$ le développement p-adique de u et $L \in \{e_1, \dots, e_{q_1}, f_1, \dots, f_{q_2}\}$. On définit $s+\lambda_p+1$ entiers naturels par les relations $b_{L,0} := \lfloor Lv/p \rfloor$ et $b_{L,k+1} := \lfloor (Lu_k + b_{L,k})/p \rfloor$ pour $k \in \{0, \dots, s+\lambda_p-1\}$. On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ l'entier immédiatement supérieur à x et on définit $s+\lambda_p+1$ entiers naturels par les relations $a_{L,0} := 1$ et $a_{L,k+1} := \lceil (Lu_k + a_{L,k})/p \rceil$. Dans un premier temps, nous allons montrer par récurrence sur r que l'assertion $\mathcal{A}_r$:

$$\prod_{n=1}^{\lfloor Lv/p \rfloor} \left(1 + \frac{Lmp^{s+\lambda_p}}{Lu+n}\right) = \prod_{n=a_{L,r}}^{b_{L,r}} \left(1 + \frac{Lmp^{s+\lambda_p-r}}{L\sum_{k=r}^{\infty} u_k p^{k-r} + n}\right) \left(1 + O(p^{s+\lambda_p-r+1})\right),$$

est vraie pour tout $r \in \{0, \dots, s+\lambda_p\}$.

On a $b_{L,0} = \lfloor Lv/p \rfloor$ et $a_{L,0} = 1$, donc $\mathcal{A}_0$ est vraie.

Soit $r \geq 0$. Supposons que $\mathcal{A}_r$ est vraie et montrons $\mathcal{A}_{r+1}$. Si $n \in \{a_{L,r}, \dots, b_{L,r}\}$, alors p divise $L\sum_{k=r}^{\infty} u_k p^{k-r} + n$ si et seulement si p divise $Lu_r + n$, *i.e.* si et seulement s'il existe $i \in \{\lceil (Lu_r + a_{L,r})/p \rceil, \dots, \lfloor (Lu_r + b_{L,r})/p \rfloor\}$ tel que $Lu_r + n = ip$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\prod_{n=a_{L,r}}^{b_{L,r}} \left(1 + \frac{Lmp^{s+\lambda_p-r}}{L\sum_{k=r}^{\infty} u_k p^{k-r} + n}\right) &= \prod_{i=a_{L,r+1}}^{b_{L,r+1}} \left(1 + \frac{Lmp^{s+\lambda_p-r}}{L\sum_{k=r+1}^{\infty} u_k p^{k-r} + ip}\right) (1 + O(p^{s+\lambda_p-r})) \\ &= \prod_{i=a_{L,r+1}}^{b_{L,r+1}} \left(1 + \frac{Lmp^{s+\lambda_p-r-1}}{L\sum_{k=r+1}^{\infty} u_k p^{k-r-1} + i}\right) (1 + O(p^{s+\lambda_p-r})).\end{aligned} \tag{9.0.12}$$

D'après $\mathcal{A}_r$ et (9.0.12), on a bien $\mathcal{A}_{r+1}$, ce qui achève la récurrence sur r.

Soit $L \in \{e_1, \dots, e_{q_1}, f_1, \dots, f_{q_2}\}$. Nous allons montrer par récurrence sur k que l'assertion $\mathcal{B}_k$: $a_{L,k} \geq 1$ et $b_{L,k} \leq \lfloor L\{(v+up)/p^{k+1}\} \rfloor$ est vraie pour tout $k \in \{0, \dots, s+\lambda_p\}$.

On a $a_{L,0} = 1$ et $b_{L,0} = \lfloor Lv/p \rfloor = \lfloor L\{(v+up)/p\} \rfloor$, donc $\mathcal{B}_0$ est vraie.

Soit $k \geq 0$. Supposons que $\mathcal{B}_k$ est vraie et montrons $\mathcal{B}_{k+1}$. On a $a_{L,k+1} = \lceil (Lu_k + a_{L,k})/p \rceil$ et $b_{L,k+1} = \lfloor (Lu_k + b_{L,k})/p \rfloor$, donc $a_{L,k+1} \geq \lceil (Lu_k + 1)/p \rceil \geq 1$ et

$$b_{L,k+1} \leq \left\lfloor \frac{Lu_k}{p} + \frac{L}{p}\left\{\frac{v+up}{p^{k+1}}\right\} \right\rfloor = \left\lfloor L\left(\frac{u_k p^{k+1}}{p^{k+2}} + \frac{v + p\sum_{i=0}^{k-1} u_i p^i}{p^{k+2}}\right) \right\rfloor = \left\lfloor L\left\{\frac{v+up}{p^{k+2}}\right\} \right\rfloor,$$

ce qui achève la récurrence sur k.

Soit $j \in \{1, \dots, s+\lambda_p+1\}$ tel que $\{(v+up)/p^j\} < 1/M_{e,f}$. On obtient, *via* $\mathcal{B}_{j-1}$, que $a_{L,j-1} \geq 1$ et

$$b_{L,j-1} \leq \lfloor L\{(v+up)/p^j\} \rfloor \leq \lfloor M_{e,f}\{(v+up)/p^j\} \rfloor = 0.$$

Ainsi, d'après $\mathcal{A}_{j-1}$, on a

$$\prod_{n=1}^{\lfloor Lv/p \rfloor} \left(1 + \frac{Lmp^{s+\lambda_p}}{Lu+n}\right) = 1 + O(p^{s+\lambda_p-j+2})$$

et donc

$$Y_s(v,u,m) = \frac{\prod_{i=1}^{q_2}\prod_{n=1}^{\lfloor f_i v/p\rfloor}\left(1+\frac{f_i m p^{s+\lambda_p}}{f_i u+n}\right)}{\prod_{i=1}^{q_1}\prod_{n=1}^{\lfloor e_i v/p\rfloor}\left(1+\frac{e_i m p^{s+\lambda_p}}{e_i u+n}\right)} = \frac{1+O(p^{s+\lambda_p-j+2})}{1+O(p^{s+\lambda_p-j+2})} = 1+O(p^{s+\lambda_p-j+2}),$$

ce qui achève la preuve du lemme 27. □

Démonstration du lemme 28. Dans un premier temps, nous allons montrer qu'on a bien (9.0.6). Écrivons $m = \sum_{k=0}^{q} m_k p^k$, où $m_k \in \{0,\dots,p-1\}$. On a

$$\begin{aligned}
&\eta_{s+\lambda_p+1}(a,m) - \mu(mp^{\lambda_p}) \\
&= \sum_{\ell=s+\lambda_p+2}^{\infty} \Delta\left(\left\{\frac{a+mp^{s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right\}\right) - \sum_{\ell=1}^{\infty} 1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{mp^{\lambda_p}}{p^\ell}\right\}\right) \\
&= \sum_{\ell=s+\lambda_p+2}^{\infty} \left(\Delta\left(\left\{\frac{a+mp^{s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right\}\right) - 1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{mp^{s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right\}\right)\right) \\
&= \sum_{\ell=s+\lambda_p+2}^{\infty} \left(\Delta\left(\frac{a+\sum_{k=0}^{\ell-s-\lambda_p-2} m_k p^{k+s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right) - 1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\frac{\sum_{k=0}^{\ell-s-\lambda_p-2} m_k p^{k+s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right)\right).
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $\ell \geq s+\lambda_p+2$, on a

$$0 \leq \frac{\sum_{k=0}^{\ell-s-\lambda_p-2} m_k p^{k+s+\lambda_p+1}}{p^\ell} \leq \frac{a+\sum_{k=0}^{\ell-s-\lambda_p-2} m_k p^{k+s+\lambda_p+1}}{p^\ell} \leq \frac{p^\ell-1}{p^\ell} < 1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\frac{\sum_{k=0}^{\ell-s-\lambda_p-2} m_k p^{k+s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right) = 1 \quad &\Rightarrow \quad 1 > \frac{\sum_{k=0}^{\ell-s-\lambda_p-2} m_k p^{k+s+\lambda_p+1}}{p^\ell} \geq \frac{1}{M_{e,f}} \\
&\Rightarrow \quad 1 > \frac{a+\sum_{k=0}^{\ell-s-\lambda_p-2} m_k p^{k+s+\lambda_p+1}}{p^\ell} \geq \frac{1}{M_{e,f}} \\
&\Rightarrow \quad \Delta\left(\frac{a+\sum_{k=0}^{\ell-s-\lambda_p-2} m_k p^{k+s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right) \geq 1
\end{aligned}$$

et donc $\eta_{s+\lambda_p+1}(a,m) - \mu(mp^{\lambda_p}) \geq 0$. Ceci termine la preuve de (9.0.6).

Montrons maintenant (9.0.7). On a

$$\begin{aligned} v_p\left(\frac{\mathcal{Q}(a+mp^{s+\lambda_p+1})}{g(mp^{\lambda_p})}\right) &= \sum_{\ell=1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{a+mp^{s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right\}\right) - \mu(mp^{\lambda_p}) \\ &= \sum_{\ell=1}^{s+\lambda_p+1}\Delta\left(\left\{\frac{a}{p^\ell}\right\}\right) + \sum_{\ell=s+\lambda_p+2}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{a+mp^{s+\lambda_p+1}}{p^\ell}\right\}\right) - \mu(mp^{\lambda_p}) \\ &= \sum_{\ell=1}^{s+\lambda_p+1}\Delta\left(\left\{\frac{a}{p^\ell}\right\}\right) + \eta_{s+\lambda_p+1}(a,m) - \mu(mp^{\lambda_p}), \\ &\geq \sum_{\ell=1}^{s+\lambda_p+1}\Delta\left(\left\{\frac{a}{p^\ell}\right\}\right). \end{aligned} \tag{9.0.13}$$

où dans (9.0.13), on a utilisé l'inégalité (9.0.6). □

Démonstration du lemme 29. On a

$$\eta_{s+\lambda_p+1}(a,0) = \sum_{\ell=s+\lambda_p+2}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{a}{p^\ell}\right\}\right),\ v_p(\mathcal{Q}(a)) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\Delta\left(\left\{\frac{a}{p^\ell}\right\}\right)$$

et

$$v_p(g(a)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} 1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{\frac{a}{p^\ell}\right\}\right).$$

Or, si $\ell \geq s+\lambda_p+2$, on a

$$\left\{\frac{a}{p^\ell}\right\} \leq \frac{p^{s+1}-1}{p^\ell} < \frac{1}{p^{\lambda_p+1}} \leq \frac{1}{M_{e,f}},$$

car $M_{e,f} \leq p^{\lambda_p+1}$. Donc $\Delta\left(\left\{a/p^\ell\right\}\right) = 1_{[1/M_{e,f},1[}\left(\left\{a/p^\ell\right\}\right) = 0$. D'où le résultat. □

Chapitre 10

Quelques résultats supplémentaires

10.1 Démonstration du point (ii) du critère de Landau

Nous allons montrer que s'il existe $\mathbf{x} \in [0,1]^d$ tel que $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) \leq -1$, alors il n'existe qu'un nombre fini de premiers p tels que tous les termes de la famille $\mathcal{Q}_{e,f}$ soient dans $\mathbb{Z}_p$.

Démonstration du point (ii) du critère de Landau. Soit $\mathbf{x}_0 \in [0,1]^d$ tel que $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}_0) \leq -1$. En utilisant le lemme 23 avec, à la place de u, la suite constituée des éléments de e et f, on obtient qu'il existe $\mu > 0$ tel que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mu\mathbf{1}$, on a $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) = \Delta_{e,f}(\mathbf{x}_0) \leq -1$. On note $\mathcal{U} := \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \,:\, \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mu\mathbf{1}\}$ dans la suite de la démonstration.

Il existe une constante $\mathcal{N}_1$ telle que, pour tout premier $p \geq \mathcal{N}_1$, il existe $\mathbf{n}_p \in \mathbb{N}^d$ tel que $\mathbf{n}_p/p \in \mathcal{U}$. Il existe une constante $\mathcal{N}_2$ telle que, pour tout premier $p \geq \mathcal{N}_2$ et tout $\mathbf{d} \in \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{q_2}\}$, on a $|\mathbf{d}|(\mu+1)/p < 1$.

Ainsi, pour tout nombre premier $p \geq \mathcal{N} := \max(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ et tout entier $\ell \geq 2$, on a $\Delta_{e,f}(\mathbf{n}_p/p) \leq -1$ et, comme $\mathbf{n}_p/p \in \mathcal{U}$, on a $\mathbf{n}_p/p \leq (1+\mu)\mathbf{1}$ et

$$\frac{\mathbf{n}_p}{p^\ell} \leq \frac{\mathbf{n}_p}{p^2} \leq \frac{\mu+1}{p}\mathbf{1}.$$

On obtient que, pour tout $\mathbf{d} \in \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{q_2}\}$, on a

$$\mathbf{d} \cdot \frac{\mathbf{n}_p}{p^\ell} \leq |\mathbf{d}| \frac{(\mu+1)}{p} < 1,$$

ce qui donne $\mathbf{n}_p/p^\ell \in [0,1[^d \backslash \mathcal{D}_{e,f}$ et donc $\Delta_{e,f}(\mathbf{n}_p/p^\ell) = 0$.

Ainsi, pour tout premier $p \geq \mathcal{N}$, on a

$$v_p(\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{n}_p)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_{e,f}(\mathbf{n}_p/p^\ell) \leq -1,$$

ce qui achève la preuve du critère de Landau. □

10.2 Une conséquence des théorèmes 1 et 2

Almkvist, van Enckevort, van Straten et Zudilin présentent dans [1] une liste de plus de 400 équations différentielles d'ordre 4 de type Calabi–Yau. Dans la plupart des équations considérées, ils donnent une formule explicite pour la solution F holomorphe en 0 de terme constant égal à 1. Une des conditions requises pour qu'une équation soit de type Calabi–Yau est que tous ses exposants à l'origine soient égaux à 0 (voir [1]). En particulier, d'après la partie 4.3 de [3], il existe une unique série sans terme constant $G(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ telle que $G(z)+\log(z)F(z)$ soit une solution de l'équation différentielle linéairement indépendante de F. On peut alors définir le q-paramètre de l'équation (d'après [3]) $q(z) := z\exp(G(z)/F(z))$.

Dans [17], Krattenthaler et Rivoal remarquent que 43 équations de la liste [1] ont pour solution F une spécialisation d'une série $F_{e,f}(\mathbf{z})$, où les suites e et f vérifient les conditions du théorème B. On entend par spécialisation de $F_{e,f}(\mathbf{z})$ toute série obtenue en remplaçant chaque z_i, $1 \leq i \leq d$, par $z_i = M_i z^{N_i}$, où $M_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $N_i \in \mathbb{N}$, $N_i \geq 1$. D'après le théorème 2 de [17], on obtient que les coordonnées canoniques et les applications de type miroir associées à e et f ont toutes leurs coefficients de Taylor entiers. Il en est de même pour leurs spécialisations, ce qui donne l'intégralité des coefficients de Taylor de nombreuses nouvelles applications de *type miroir* en une variable. En particulier, on peut obtenir l'intégralité des coefficients de Taylor du q-paramètre associé à l'équation différentielle.

Nous avons trouvé 100 équations supplémentaires dans la liste [1] dont la solution $F(z)$ est une spécialisation d'une série $F_{e,f}(\mathbf{z})$. Parmis ces nouveaux cas, 97 correspondent à des suites e et f telles que $\Delta_{e,f} \geq 1$ sur $\mathcal{D}_{e,f}$ et donc, d'après les théorèmes 1 et 2, telles que les spécialisations des coordonnées canoniques et des applications de type miroir sont dans $z\mathbb{Z}[[z]]$. En revanche, les cas 84, 284 et 338 correspondent à des suites e et f telles qu'il existe $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$ tel que $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) = 0$, on sait alors qu'au moins une des coordonnées canoniques n'est pas dans $z\mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$.

Au total on obtient donc 143 équations qui sont les cas : 1–25, 29, 3*, 4**, 10**, 13**, Î–Î4, 30, 34–40, 43–53, 55, 56, 58–60, 62–91, 93–99, 110–112, 116, 119, 125–128, 130, 149, 180, 185, 188, 190–192, 208, 209, 212, 229, 232, 233, 237–241, 278, 284, 288, 292, 307, 330, 337, 338, 340 et 367.

Explicitons le cas 30 pour l'exemple. L'opérateur différentiel est

$$\mathcal{L} := \theta^4 - 2^4 z(4\theta+1)(4\theta+3)(8\theta^2+8\theta+3) + 2^{12} z^2(4\theta+1)(4\theta+3)(4\theta+5)(4\theta+7), \quad (10.2.1)$$

où $\theta = z\frac{d}{dz}$. La fonction F annulée par cet opérateur est

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{(4n)!}{(n!)^2(2n)!} \sum_{k=0}^{n} 2^{2k} \binom{2(n-k)}{n-k}^2 \binom{2k}{k}.$$

En prenant $e = ((4,4),(2,0),(2,0),(0,2))$ et

$$f = ((2,2),(1,1),(1,1),(1,0),(1,0),(1,0),(1,0),(0,1),(0,1)),$$

on obtient que $|e| = |f|$ et

$$F_{e,f}(z, 2^2 z) = \sum_{k,m\geq 0} \frac{(4k+4m)!}{(2k+2m)!((k+m)!)^2} \cdot \frac{((2k)!)^2}{(k!)^4} \cdot \frac{((2m)!)}{(m!)^2} 2^{2m} z^{k+m}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k+m=n} \frac{(4n)!}{(2n)!(n!)^2} 2^{2m} \binom{2k}{k}^2 \binom{2m}{m} = F(z).$$

La solution $F(z)$ est donc une spécialisation de $F_{e,f}(z, w)$. Nous allons maintenant montrer que $\Delta_{e,f} \geq 1$ sur $\mathcal{D}_{e,f}$.

Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_{e,f}$, on a

$$\Delta_{e,f}(x, y) = \lfloor 4x + 4y \rfloor + 2\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor 2x + 2y \rfloor - 2\lfloor x + y \rfloor, \tag{10.2.2}$$

car x et y sont dans $[0, 1[$. Par définition de $\mathcal{D}_{e,f}$, au moins l'une des parties entières de (10.2.2) doit être supérieure ou égale à 1. Si $2x + 2y < 1$, alors on a bien $\Delta_{e,f}(x, y) \geq 1$. Supposons que $2x + 2y \geq 1$. On a alors

$$\lfloor 4x + 4y \rfloor \geq 2\lfloor 2x + 2y \rfloor \geq 1 + \lfloor 2x + 2y \rfloor,$$

de sorte que si $x + y < 1$, alors $\Delta_{e,f}(x, y) \geq 1$. En revanche, si $x + y \geq 1$, alors $\lfloor 2x \rfloor \geq 1$ ou $\lfloor 2y \rfloor \geq 1$, et comme

$$\lfloor 4x + 4y \rfloor \geq \lfloor 2x + 2y \rfloor + 2\lfloor x + y \rfloor,$$

on obtient bien que $\Delta_{e,f}(x, y) \geq 1$. Ainsi, d'après le théorème 1, on a $q_{e,f,1}(z, 4z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$ et $q_{e,f,2}(z, 4z) \in 4z\mathbb{Z}[[z]]$. Nous allons maintenant montrer que le q-paramètre associé à l'opérateur (10.2.1) est égal à $q_{e,f,1}(z, 4z)$.

Notons $G(z)$ la série sans terme constant telle que $G(z) + \log(z)F(z)$ soit annulée par l'opérateur (10.2.1). Pour déterminer la série $G(z)$ nous utilisons la méthode de Frobenius exposée dans [30].

Pour tout $r \in \mathbb{C}$, $|r| \leq 1/4$, et tout n et k dans $\mathbb{N}$, on pose

$$h_{n,k}(r) := 2^{2k} \left(\frac{\Gamma(1 + 2(n + r - k))}{\Gamma(1 + n + r - k)^2} \right)^2 \binom{2k}{k} \quad \text{si } r \neq 0,$$

$$h_{n,k}(0) := 2^{2k} \left(\frac{\Gamma(1 + 2(n - k))}{\Gamma(1 + n - k)^2} \right)^2 \binom{2k}{k} \quad \text{si } k \leq n$$

et $h_{n,k}(0) = 0$ si $k \geq n + 1$.

La fonction Γ est méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ et a un pôle simple en chaque entier négatif. Ainsi, les fonctions $h_{n,k}$ sont analytiques au moins sur $\{r \in \mathbb{C} : |r| \leq 1/4\}$ et, lorsque $k \geq n + 1$, les fonctions $h_{n,k}$ ont un zéro d'ordre 2 en $r = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in \mathbb{C}$, $|r| \leq 1/4$, on pose

$$c_n(r) := \frac{\Gamma(1 + 4n + 4r)}{\Gamma(1 + n + r)^2 \Gamma(1 + 2n + 2r)} \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}(r).$$

Montrons que la série $c_n(r)$ est bien définie. On rappelle la formule des compléments : pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{10.2.3}$$

On utilisera aussi le fait que, pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, lorsque $|\arg(z)| < \pi - \alpha$ et $z \to \infty$, on a $\Gamma(z) \sim e^{-z} z^{z-1/2}\sqrt{2\pi}$. En particulier, il existe une constante $\mathcal{K} > 0$ telle que, si $\Re(z) > 0$ et $|z| > \mathcal{K}$, alors

$$\frac{1}{2}\left|e^{-z}z^{z-1/2}\sqrt{2\pi}\right| \leq |\Gamma(z)| \leq 2\left|e^{-z}z^{z-1/2}\sqrt{2\pi}\right|. \tag{10.2.4}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Il existe une constante $\mathcal{K}' > n+1$ telle que, pour tout $k \geq \mathcal{K}'$ et tout $r \in \mathbb{C}$, $|r| \leq 1/4$, on a $|k-n-r| \geq \mathcal{K}$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \mathcal{K}'$ et tout $r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $r \leq 1/4$, d'après 10.2.3, on a

$$\Gamma(1+2(n+r-k)) = \frac{\pi}{\sin(2\pi(k-n-r))\Gamma(2(k-n-r))} \tag{10.2.5}$$

et

$$\Gamma(1+n+r-k) = \frac{\pi}{\sin(\pi(k-n-r))\Gamma((k-n-r))}. \tag{10.2.6}$$

En appliquant (10.2.4) à (10.2.5) et (10.2.6), on obtient respectivement

$$|\Gamma(1+2(n+r-k))| \leq \left|\frac{\sqrt{2\pi}e^{2(k-n-r)}}{\sin(2\pi r)(2(k-n-r))^{2(k-n-r)-1/2}}\right|$$

et

$$|\Gamma(1+n+r-k)| \geq \left|\frac{\sqrt{\pi}e^{k-n-r}}{2\sqrt{2}\sin(\pi r)(k-n-r)^{k-n-r-1/2}}\right|.$$

Ainsi, on a

$$\left|\frac{\Gamma(1+2(n+r-k))}{\Gamma(1+n+r-k)^2}\right|^2 \leq \left|\frac{2^5\sin^2(\pi r)}{\pi\cos^2(\pi r)2^{4(k-n-r)}(k-n-r)}\right|. \tag{10.2.7}$$

De plus, d'après (10.2.4), pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \mathcal{K}'$, on a

$$\binom{2k}{k} = \frac{2\Gamma(2k)}{k\Gamma(k)^2} \leq 8\frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}}. \tag{10.2.8}$$

Ainsi, d'après (10.2.7) et (10.2.8), pour tout $r \in \mathbb{C}$, $|r| \leq 1/4$, et tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \mathcal{K}'$, on a

$$|h_{n,k}(r)| \leq 2^8\left|\frac{16^{n+r}\sin^2(\pi r)}{\cos^2(\pi r)\pi^{\frac{3}{2}}(k-n-r)\sqrt{k}}\right|. \tag{10.2.9}$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $r \in \mathbb{C}$, $|r| \leq 1/4$, on ait $|\sin^2(\pi r)/\cos^2(\pi r)| \leq C$, $|16^{n+r}| \leq 2 \cdot 16^n$ et $|k-n-r| \geq k-n-1$. Ainsi, pour tout $r \in \mathbb{C}$, $|r| \leq 1/4$, et tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \mathcal{K}'$, on a

$$|h_{n,k}(r)| \leq 2^9\frac{C16^n}{\pi^{\frac{3}{2}}(k-n-1)\sqrt{k}}.$$

Ainsi la série $c_n(r)$ converge uniformément sur $\{r \in \mathbb{C} : |r| \leq 1/4\}$ et elle définit une fonction analytique.

Notons $P_2(X) := X^4$, $P_1(X) := -2^4(4X+1)(4X+3)(8X^2+8X+3)$ et

$$P_0(X) := 2^{12}(4X+1)(4X+3)(4X+5)(4X+7),$$

de sorte que l'opérateur (10.2.1) s'écrive $\mathcal{L} = P_2(\theta) + zP_1(\theta) + z^2P_0(\theta)$.

Dans un premier temps, nous montrons que, pour tout $r \in \mathbb{C}$, $|r| \leq 1/4$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P_2(n+r+2)c_{n+2}(r) + P_1(n+r+1)c_{n+1}(r) + P_0(n+r)c_n(r) = 0. \tag{10.2.10}$$

Si $r = 0$, alors, d'après [1], $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0)z^n$ est annulée par $\mathcal{L}$ donc on a bien (10.2.10). Supposons que $r \neq 0$. Afin de démontrer (10.2.10), on applique la procédure *Zeilberger* de Maple 12 à la suite

$$(b_k(n,r))_{k\geq 0} := \left(\frac{\Gamma(1+4n+4r)}{\Gamma(1+n+r)^2\Gamma(1+2n+2r)} 2^{2k} \left(\frac{\Gamma(1+2(n+r-k))}{\Gamma(1+n+r-k)^2} \right)^2 \binom{2k}{k} \right)_{k\geq 0}.$$

Cette procédure prend en argument un terme hypergéométrique $T(n,k)$ et renvoie une suite $(d_k)_{k\geq 0}$ et un opérateur $\mathcal{R} = P_v(n)\delta^v + \cdots + P_1(n)\delta + P_0(n)$ tels que $\mathcal{R}T(n,k) = d_{k+1} - d_k$, où $P_i(X) \in \mathbb{C}[[X]]$ et δ est l'opérateur de décalage $\delta T(n,k) = T(n+1,k)$. Dans notre cas, on obtient une suite explicite $(d_k)_{k\geq 0}$ telle que, pour tout n et k dans $\mathbb{N}$, on ait

$$P_2(n+r+2)b_k(n+2,r) + P_1(n+r+1)b_k(n+1,r) + P_0(n+r)b_k(n,r) = d(k+1) - d(k), \tag{10.2.11}$$

avec $d(0) = 0$ et (vérification rapide)

$$d(k) = O\left(\frac{k4^k\Gamma(2(n+r-k)+1)^2}{\Gamma(n+r-k+1)^4} \binom{2k}{k} \right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right),$$

lorsque $k \to +\infty$. En sommant l'identité (10.2.11) pour k allant de 0 à $+\infty$ et en utilisant le fait que $d(0) = 0$ et $d(k) \underset{k\to+\infty}{\to} 0$, on obtient bien (10.2.10).

Ainsi, en notant $\tilde{F}(z,r) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r)z^{n+r}$, on a

$$\mathcal{L}\tilde{F}(z,r) = P_2(r)c_0(r)z^r + \big(P_2(r+1)c_1(r) + P_1(r)c_0(r)\big)z^{1+r}. \tag{10.2.12}$$

Montrons que $\frac{\partial}{\partial r}\mathcal{L}\tilde{F}(z,r)\Big|_{r=0} = 0$. La série $c_n(r)$ est analytique sur $\{r \in \mathbb{C} : |r| \leq 1/4\}$ et sa dérivée s'obtient en dérivant termes à termes. Lorsque $k \geq n+1$, les fonctions $h_{n,k}(r)$ sont analytiques au voisinage de 0 et ont un zéro d'ordre 2 en 0. Pour tout $k \geq n+1$, on obtient que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Gamma(1+4n+4r)}{\Gamma(1+n+r)^2\Gamma(1+2n+2r)} \left(\frac{\Gamma(1+2(n+r-k))}{\Gamma(1+n+r-k)^2} \right)^2 \right)\Bigg|_{r=0} = 0.$$

En revanche, si $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, alors on a $\Gamma'(m) = \Gamma(m)(H_{m-1} - \gamma)$, où γ est la constante d'Euler. Ainsi, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on obtient que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Gamma(1+4n+4r)}{\Gamma(1+n+r)^2\Gamma(1+2n+2r)}\left(\frac{\Gamma(1+2(n+r-k))}{\Gamma(1+n+r-k)^2}\right)^2\right)\Bigg|_{r=0}$$
$$= \frac{\Gamma(1+4n)}{\Gamma(1+n)^2\Gamma(1+2n)}\left(\frac{\Gamma(1+2(n-k))}{\Gamma(1+n-k)^2}\right)^2$$
$$\times \left(4H_{4n} - 2H_n - 2H_{2n} + 4H_{2(n-k)} - 4H_{n-k}\right).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$c_n'(0) = \frac{\Gamma(1+4n)}{\Gamma(1+n)^2\Gamma(1+2n)}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\Gamma(1+2(n-k))}{\Gamma(1+n-k)^2}\right)^2$$
$$\times \left(4H_{4n} - 2H_n - 2H_{2n} + 4H_{2(n-k)} - 4H_{n-k}\right) \quad (10.2.13)$$

En particulier, on obtient que

$$\frac{d}{dr}\left(P_2(r)c_0(r)z^r\right)\Big|_{r=0} = \frac{d}{dr}\left(r^4 c_0(r)z^r\right)\Big|_{r=0} = 0$$

et, un calcul simple *via* Maple 12 montre que

$$\frac{d}{dr}\left((P_2(r+1)c_1(r) + P_1(r)c_0(r))z^{1+r}\right)\Big|_{r=0} = 0.$$

Ainsi, on a bien $\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathcal{L}\tilde{F}(z,r)\right)\Big|_{r=0} = 0$.

Comme la suite $(c_n(r))_{n\geq 0}$ vérifie la récurrence (10.2.10), on peut appliquer la partie 16.2 de [30] et on obtient qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout $r \in \mathbb{C}$, $|r| \leq 1/4$, la série entière $\tilde{F}(z,r)$ de la variable z a un rayon de convergence au moins égal à R. De plus, si $|z| < R$, alors $F(z,r)$ est dérivable par rapport à r et

$$\frac{\partial}{\partial r}\tilde{F}(z,r)\Big|_{r=0} = \log(z)F(z)$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{(4n)!}{(n!)^2(2n)!}\sum_{k=0}^{n} 2^{2k}\binom{2(n-k)}{n-k}^2\binom{2k}{k}(4H_{4n} - 2H_n - 2H_{2n} + 4H_{2(n-k)} - 4H_{n-k}).$$

Comme les opérateurs $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\mathcal{L}$ commutent, on obtient que

$$\mathcal{L}\frac{\partial}{\partial r}\tilde{F}(z,r)\Big|_{r=0} = \frac{\partial}{\partial r}(\mathcal{L}\tilde{F}(z,r))\Big|_{r=0} = 0.$$

Ainsi, $\frac{\partial}{\partial r}\tilde{F}(z,r)\Big|_{r=0} = G_{e,f,1}(z,4z) + \log(z)F(z)$ est annulée par $\mathcal{L}$ et, par unicité de $G(z)$, on a $G(z) = G_{e,f,1}(z,4z)$. Le q-paramètre associé à l'opérateur (10.2.1) est donc

$$q(z) = z\exp\big(G_{e,f,1}(z,4z)/F_{e,f}(z,4z)\big) = q_{e,f,1}(z,4z) \in z\mathbb{Z}[[z]].$$

Dans le cas 30, le q-paramètre est donc bien une spécialisation d'une coordonnée canonique. Nous n'avons pas vérifié en détail les 143 cas cités plus haut mais il semble que la méthode présentée pour le cas 30 permette de montrer dans de nombreux cas que le q-paramètre associé à l'opérateur est une spécialisation d'une coordonnée canonique et a donc, lorsque $\Delta_{e,f} \geq 1$ sur $\mathcal{D}_{e,f}$, tous ses coefficients de Taylor entiers. Il serait intéressant d'avoir une méthode plus générale pour prouver cela.

10.3 Positivité des coefficients de Taylor des applications miroir

Soit e et f deux suites d'entiers strictement positifs disjointes. D'après le théorème 1, si $|e| = |f|$ et si $\Delta_{e,f} \geq 1$ sur $[1/M_{e,f}, 1[$, alors les coefficients de Taylor de la coordonnée canonique $q_{e,f}(z)$ sont entiers. Une question naturelle est alors de se demander si ces coefficients sont positifs. Dans [18], Krattenthaler et Rivoal montrent que si, de plus, $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0,1[$, alors les coefficients de Taylor de $q_{e,f}(z)$ sont positifs. Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant qui indique qu'il suffit que $\Delta_{e,f}$ soit positive sur $[0,1]$ pour les coefficients de Taylor de $q_{e,f}(z)$ soient positifs.

Théorème 8. *Soit e et f deux suites d'entiers strictement positifs disjointes telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une suite à termes entiers (ce qui équivaut à $\Delta_{e,f} \geq 0$ sur $[0,1]$). Alors, pour tout $L \in \mathbb{N}$, $L \geq 1$, les coefficients de Taylor de $q_{e,f}(z)$ et $q_{L,e,f}(z)$ sont strictement positifs (à l'exception du terme constant de $q_{e,f}(z)$ qui est nul).*

Pour démontrer le théorème 8, nous suivons la méthode utilisée par Krattenthaler et Rivoal dans [18].

Si $a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ avec $a_0 \neq 0$, alors $a(z)$ est inversible dans $\mathbb{C}[[z]]$ et on peut voir $\hat{a}(z) := 1 - 1/a(z)$ comme une série formelle. Nous énonçons trois lemmes permettant de démontrer le théorème 8.

Lemme 30 (Lemme 2.1 de [18])**.** *Soit $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_0 = 1$, telle que les coefficients de Taylor de $\hat{a}(z)$ soient positifs. Soit $b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n a_n z^n$ où $(h_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de réels positifs. Alors les coefficients de Taylor de $b(z)/a(z)$ sont positifs.*

Si, de plus, les coefficients de Taylor de a et $\hat{a}$ sont strictement positifs (à l'exception du terme constant de $\hat{a}$) et si la suite $(h_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante, alors les coefficients de Taylor de $b(z)/a(z)$ sont strictement positifs, à l'exception du terme constant si $h_0 = 0$.

Le lemme suivant est une version précisée d'un théorème de Kaluza [13, Satz 3]. Initialement, le Satz 3 de [13] ne traite pas le cas où $a_{n+1}a_{n-1} > a_n^2$.

Lemme 31 (Lemme 2.2 de [18]). *Soit $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_0 = 1$, telle que $a_1 > 0$ et $a_{n+1}a_{n-1} \geq a_n^2$ pour tout $n \geq 1$. Alors les coefficients de Taylor de $\hat{a}(z)$ sont positifs.*

Si, de plus, on a $a_{n+1}a_{n-1} > a_n^2$ pour tout $n \geq 1$, alors les coefficients de Taylor de $\hat{a}(z)$ sont strictement positifs (à l'exception du terme constant).

Le lemme suivant est une adaptation du lemme 2.3 de [18].

Lemme 32. *Soit e et f deux suites d'entiers strictement positifs disjointes telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une suite à termes entiers (ce qui équivaut à $\Delta_{e,f} \geq 0$ sur $[0,1]$). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a*

$$\mathcal{Q}_{e,f}(n+1)\mathcal{Q}_{e,f}(n-1) > \mathcal{Q}_{e,f}(n)^2.$$

De plus, la suite $\left(\sum_{i=1}^{q_1} e_i H_{e_i n} - \sum_{i=1}^{q_2} f_i H_{f_i n}\right)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

Démonstration du lemme 32. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des termes des suites e et f. On note $\gamma_1 < \cdots < \gamma_t = 1$ les rationnels qui vérifient $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_t\} = \bigcup_{a\in\mathcal{A}} \{\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \ldots, \frac{a-1}{a}, 1\}$ et $m_i \in \mathbb{Z}$ l'amplitude du saut de $\Delta_{e,f}$ en γ_i. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{Q}_{e,f}(n+1)}{\mathcal{Q}_{e,f}(1)\mathcal{Q}_{e,f}(n)} &= \frac{1}{\mathcal{Q}_{e,f}(1)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{q_1}\prod_{k=1}^{e_i}(e_i n + k)}{\prod_{i=1}^{q_2}\prod_{k=1}^{f_i}(f_i n + k)} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{q_1}\prod_{k=1}^{e_i}(1 + n e_i/k)}{\prod_{i=1}^{q_2}\prod_{k=1}^{f_i}(1 + n f_i/k)} \\
&= \prod_{k=1}^{t}\left(1 + \frac{n}{\gamma_k}\right)^{m_k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on obtient que

$$\frac{\mathcal{Q}_{e,f}(n+1)\mathcal{Q}_{e,f}(n-1)}{\mathcal{Q}_{e,f}(n)^2} = \prod_{k=1}^{t}\left(\frac{1 + n/\gamma_k}{1 + (n-1)/\gamma_k}\right)^{m_k} = \prod_{k=1}^{t}\left(1 + \frac{1}{\gamma_k + n - 1}\right)^{m_k} > 1,$$

où la dernière égalité est obtenue en appliquant le lemme 24 avec $n-1$ à la place de b et t à la place de i_0 car $\Delta_{e,f}$ est positive sur $[\gamma_1, \gamma_t] \subset [0,1]$.

Il nous reste à montrer que $\left(\sum_{i=1}^{q_1} e_i H_{e_i n} - \sum_{i=1}^{q_2} f_i H_{f_i n}\right)_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{q_1} e_i H_{e_i n} - \sum_{i=1}^{q_2} f_i H_{f_i n} &= \sum_{i=1}^{q_1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{e_i} \frac{e_i}{\ell e_i + k} - \sum_{i=1}^{q_2}\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{f_i} \frac{f_i}{\ell f_i + k} \\
&= \sum_{i=1}^{q_1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{e_i} \frac{1}{\ell + k/e_i} - \sum_{i=1}^{q_2}\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{f_i} \frac{1}{\ell + k/f_i} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{t} \frac{m_k}{\ell + \gamma_k}.
\end{aligned}$$

Or, en appliquant le lemme 24 avec ℓ à la place de b, on obtient que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=1}^{t} \frac{m_k}{\ell+\gamma_k} > 0$. Ceci achève la preuve du lemme 32.

□

En appliquant les lemmes 31 et 32, on obtient le corollaire suivant

Corollaire 5. *Soit e et f deux suites d'entiers strictement positifs disjointes telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une suite à termes entiers (ce qui équivaut à $\Delta_{e,f} \geq 0$ sur $[0,1]$). Alors les coefficients de Taylor de $\hat{F}_{e,f}(z)$ sont strictement positifs (à l'exception du terme constant).*

Le corollaire 5 et le lemme 32 montrent que l'on peut appliquer le lemme 30 avec $F_{e,f}(z)$ à la place de $a(z)$ et $G_{e,f}(z)$ à la place de $b(z)$. On obtient donc que les coefficients de Taylor de $G_{e,f}(z)/F_{e,f}(z)$ sont strictement positifs à l'exception du terme constant. En particulier, les coefficients de Taylor de $q_{e,f}(z) = z\exp(G_{e,f}(z)/F_{e,f}(z))$ sont strictement positifs, à l'exception du terme constant.

De plus, pour tout $L \in \mathbb{N}$, $L \geq 1$, la suite $(H_{Ln})_{n\geq 0}$ est strictement croissante. Ainsi, en appliquant le corollaire 5 et le lemme 30, on obtient bien que les coefficients de Taylor de $q_{L,e,f}(z) := \exp(G_{L,e,f}(z)/F_{e,f}(z))$ sont strictement positifs. Le théorème 8 est donc démontré.

Dans [18], Krattenthaler et Rivoal utilisent la positivité des coefficients de Taylor de $q_{e,f}(z)$ pour étudier les propriétés analytiques, telles que le rayon de convergence, des séries $q_{e,f}(z)$ et $z_{e,f}(z)$ lorsque $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0,1[$ et $|e| = |f|$. Le théorème 8 pourrait éventuellement permettre d'appliquer leur méthode à des suites e et f d'une forme plus générale.

10.4 Une généralisation possible

La fonction $\Delta_{e,f}$ permet de calculer la valuation p-adique des termes d'une suite

$$\mathcal{P}_{\alpha,\beta}(n) = C_{\alpha,\beta}^{n} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_s)_n},$$

où α et β sont deux suites R-partitionnées. On a alors

$$v_p\big(\mathcal{P}_{\alpha,\beta}(n)\big) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_{e,f}\left(\frac{n}{p^\ell}\right). \tag{10.4.1}$$

D'après le théorème 1, le graphe de la fonction $\Delta_{e,f}$ sur $[0,1]$ permet de caratériser l'intégralité des coefficients de Taylor à l'origine de la coordonnée canonique $q_{e,f}(z)$.

Dans [6], Christol introduit des fonctions δ permettant de calculer la valuation p-adique de symboles de Pocchammer $(a)_n$ où $a \in \mathbb{Z}_p \setminus (-\mathbb{N})$:

$$v_p\big((a)_n\big) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \delta(a, p^\ell, n).$$

Ainsi, les fonctions δ permettent de calculer la valuation p-adique de $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ d'une manière analogue à (10.4.1). Étant donnée une série hypergéométrique

$$ {}_rF_s\left(\begin{array}{c}\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ldots,\beta_s\end{array};Cz\right)=\sum_{n=0}^{\infty}C^n\frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n\cdots(\beta_s)_n}\frac{z^n}{n!},$$

où les suites α et β ne sont pas forcément R-partitionnées, on trouve, dans certains cas, une deuxième solution $G(z)+\log(z){}_rF_s(z)$ de l'équation différentielle minimale vérifiée par ${}_rF_s$. Il serait intéressant de savoir si l'intégralité des coefficients de Taylor à l'origine de $q(z):=z\exp(G(z)/{}_rF_s(z))$ peut être caractérisée par une propriété analytique élémentaire des fonctions δ, ce qui permettrait de prouver l'intégralité des coefficients de Taylor de nouvelles applications miroir en une variable.

Bibliographie

[1] G. Almkvist, C. van Enckevort, D. van Straten, W. Zudilin, *Tables of Calabi–Yau equations*, preprint (2010), arXiv :math/0507430v2 [math.AG].

[2] Y. André, *G-fonctions et transcendance*, J. reine angew. Math. **476** (1996), 95–125.

[3] V. V. Batyrev, D. van Straten, *Generalized Hypergeometric Functions and Rational Curves on Calabi-Yau Complete Intersections in Toric Varieties*, Commun Math. Phys. **168** (1995), 493–533.

[4] J. W. Bober, *Factorial ratios, hypergeometric series, and a family of step functions*, Journal of the London Mathematical Society (2) **79** (2009), 422–444.

[5] P. Candelas, X. C. de la Ossa, P. S. Green, L. Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nuclear Phys. B **359** (1991), no. 1, 21–74.

[6] G. Christol, *Fonctions hypergéométriques bornées*, Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome **14** (1986–1987), exp. nř8, p. 1–16.

[7] E. Delaygue, *Critère pour l'intégralité des coefficients de Taylor des applications miroir*, J. Reine Angew. Math. (à paraître), publié en ligne à l'adresse http ://dx.doi.org/10.1515/CRELLE.2011.094

[8] E. Delaygue, *Intégralité des coefficients de Taylor de racines d'applications miroir*, prépublication (2010), 14 pages, arXiv :1012.2331v1 [math.NT].

[9] E. Delaygue, *Criterion for the integrality of the Taylor coefficients of mirror maps in several variables*, preprint (2011), arXiv :1108.4352v1 [math.NT].

[10] B. Dwork, *On p-adic differential equations IV : generalized hypergeometric functions as p-adic functions in one variable*, Annales scientifiques de l'E. N. S. 4^e série, tome 6, numéro 3 (1973), p. 295-316.

[11] B. Dwork, *p-adic cycles*, Publications mathématiques de l'I. H. É. S., tome **37** (1969), p. 27–115.

[12] N. Heninger, E. M. Rains, and N. J. A. Sloane, *On the integrality of nth roots of generating functions*, J. Combin. Theory Ser. A **113** (2006), 1732–1745. MR 2269551

[13] T. Kaluza, *Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen*, Math. Z. **28** (1928), 161–170.

[14] N. Kobliz, *p-Adic Numbers, p-Adic Analysis, and Zeta-functions*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.

[15] C. Krattenthaler et T. Rivoal, *On the integrality of the Taylor coefficients of mirror maps*, Duke Math. J. **151** (2010), 175–218.

[16] C. Krattenthaler et T. Rivoal, *On the integrality of the Taylor coefficients of mirror maps, II*, Commun. Number Theory Phys. à paraître. preprint, arXiv :0907.2578v1 [math.NT]

[17] C. Krattenthaler, T. Rivoal, *Multivariate p-adic formal congruences and integrality of Taylor coefficients of mirror maps*, prépublication (2008), 27 pages, à paraître dans la collection Séminaire et Congrés de la SMF. Actes de la conférence *Théories galoisiennes et arithmétiques des équations différentielles* (CIRM, septembre 2009), arXiv :0804.3049v3 [math.NT].

[18] C. Krattenthaler, T. Rivoal, *Analytic properties of mirror maps*, preprint (2011), arXiv :1102.5375v1 [math.CA].

[19] S. Lang, *Cyclotomic Fields, I, II*, Combined 2nd edition, vol. 121, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1990.

[20] E. Landau, *Sur les conditions de divisibilité d'un produit de factorielles par un autre*, collected works, **I**, page 116. Thales-Verlag (1985).

[21] B. H. Lian, S. T. Yau, *Mirror Maps, Modular Relations and Hypergeometric Series I.* arXiv :hep-th/9507151v1. Paru sous le titre : *Integrality of certain exponential series. Algebra and geometry* (Taipei, 1995), 215–227, Lect. Algebra Geom., **2**, Int. Press, Cambridge, MA (1998). (Reviewer : Nobuo Tsuzuki).

[22] B. H. Lian, S. T. Yau, *Arithmetic properties of mirror map and quantum coupling*, Comm. Math. Phys. 176, **1** (1996), 163–191.

[23] B. H. Lian, S. T. Yau, *The nth root of the mirror map*, in : Calabi-Yau varieties and mirror symmetry, Proceedings of the Workshop on Arithmetic, Geometry and Physics around Calabi-Yau Varieties and Mirror Symmetry, Toronto, ON, 2001, N. Yui and J. D. Lewis (eds.), Fields Inst. Commun., **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, pp. 195–199.

[24] D. R. Morrison, *Mirror symmetry and rational curves on quintic threefolds : a guide for mathematicians*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 223–247.

[25] R. Pandharipande, *Rational curves on hypersurfaces (after A. Givental)*, Séminaire Bourbaki. Vol. 1997/98. Astérisque No. **252** (1998), Exp. No. 848, 5, 307–340.

[26] F. Rodriguez-Villegas, *Integral ratios of factorials and algebraic hypergeometric functions*, dans : Oberwolfach Reports, vol. **2**, issue 3, European Math. Soc., Publ. House, Zürich (2005) ; disponible sur http://www.math.utexas.edu/villegas/publications/oberwolfach-05.pdf.

[27] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge University Press (1966).

[28] J. Stienstra, *GKZ Hypergeometric Structures*, Arithmetic and geometry around hypergeometric functions, R.-P. Holzapfel, A. Muhammed Uludaćg and M. Yoshida (eds.), Progr. Math., **260**, Birkhĺauser, Basel (2007), 313–371.

[29] C. Voisin, *Mirror symmetry*, SMF/AMS Texts and Monographs, vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI; Société Mathématique de France, Paris, 1999.

[30] M. Yoshida, *Fuchsian differential equations*, Aspects of Mathematics **11**, Vieweg (1987).

[31] J. Zhou, *Integrality properties of variations of Mahler measures*, arXiv :1006.2428v1 [math.AG].

[32] V. V. Zudilin, *Integrality of power expansions related to hypergeometric series*, Mathematical Notes, vol. **71**, no. 5 (2002), 604–616.

Résumé. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que les coefficients de Taylor à l'origine de séries en plusieurs variables $q_i(\mathbf{z}) = z_i \exp(G_i(\mathbf{z})/F(\mathbf{z}))$ soient entiers, avec $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d)$ et où $F(\mathbf{z})$ et $G_i(\mathbf{z}) + \log(z_i)F(\mathbf{z})$, $i = 1, \ldots, d$, sont des solutions particulières de certains A-systèmes d'équations différentielles linéaires. Ce critère est basé sur les propriétés analytiques de l'application de Landau (classiquement associée aux suites de quotients de factorielles de formes linéaires). Pour démontrer ce critère, nous généralisons entre autres une version en plusieurs variables d'un théorème de Dwork concernant les congruences formelles entre séries formelles, démontrée par Krattenthaler et Rivoal dans « Multivariate p-adic formal congruences and integrality of Taylor coefficients of mirror maps »[arXiv :0804.3049v3, math.NT]. Ce critère en plusieurs variables implique l'intégralité des coefficients de Taylor de nouvelles applications miroir d'une seule variable dans « Tables of Calabi–Yau equations »[arXiv :math/0507430v2, math.AG] de Almkvist, van Enckevort, van Straten et Zudilin. Dans le cas particulier d'une variable, nous affinons notre critère et démontrons l'intégralité des coefficients de Taylor de racines d'applications miroir. Cela nous permet de démontrer une conjecture de Zhou énoncée dans « Integrality properties of variations of Mahler measures »[arXiv :1006.2428v1 math.AG].

Abstract. We give a necessary and sufficient condition for the integrality of the Taylor coefficients at the origin of formal power series $q_i(\mathbf{z}) = z_i \exp(G_i(\mathbf{z})/F(\mathbf{z}))$, with $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d)$ and where $F(\mathbf{z})$ and $G_i(\mathbf{z}) + \log(z_i)F(\mathbf{z})$, $i = 1, \ldots, d$ are particular solutions of certain A-systems of differential equations. This criterion is based on the analytical properties of Landau's function (which is classically associated with the sequences of factorial ratios). One of the techniques used to prove this criterion is a generalization of a version of a theorem of Dwork on the formal congruences between formal series, proved by Krattenthaler and Rivoal in « Multivariate p-adic formal congruences and integrality of Taylor coefficients of mirror maps »[arXiv :0804.3049v3, math.NT]. This criterion involves the integrality of the Taylor coefficients of new univariate mirror maps listed in « Tables of Calabi–Yau equations »[arXiv :math/0507430v2, math.AG] by Almkvist, van Enckevort, van Straten and Zudilin. In the particular case of one variable, we refine our criterion and demonstrate the integrality of the Taylor coefficients of roots of mirror maps. This allows us to prove a conjecture stated by Zhou in « Integrality properties of variations of Mahler measures »[arXiv :1006.2428v1 math.AG].