

Développements limités

Relation de prépondérance

Si I est un intervalle réel, l'ensemble des points adhérents de I , dans $\overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble \bar{I} , réunion des points de I et des points de la frontière de I . L'élément $+\infty$ (resp. $-\infty$) de $\overline{\mathbb{R}}$ appartient à I si et seulement si I n'est pas majoré (resp. pas minoré).

Définition 1 Soient f et g deux fonctions complexes définies sur une même intervalle I de \mathbb{R} et x_0 un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I . On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 , s'il existe un voisinage V de x_0 dans I et une fonction complexe ε définie sur V telle que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0, \quad \text{et} \quad \forall x \in V \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x).$$

On représente cette relation de manière abrégée, en écrivant $f = o(g)$ au voisinage de x_0 , ou encore $f(x) = o(g(x))$ lorsque x tend vers x_0 .

Notation : La notation $o(g)$ au sein d'une expression algébrique est aussi employée couramment pour représenter une fonction non explicitée, négligeable devant g . Par exemple $f + o(g)$ est la somme de f et d'une fonction négligeable devant g .

Remarque :

1. Dire que $f = o(1)$ au voisinage de x_0 c'est dire que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
2. On n'exige pas dans la définition 1 que la fonction ε soit définie sur I tout entier. Si cela était le cas, la relation $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ impliquerait que, si x est un point de I autre que x_0 tel que $g(x) = 0$ on aurait aussi $f(x) = 0$. Ce n'est pas ce que l'on désire. La relation $f = o(g)$ au voisinage de x_0 est une propriété locale en x_0 , c'est à dire que, quel soit le voisinage W de x_0 , la validité de $f = o(g)$ ne dépend pas des valeurs de f en dehors de W .

Théorème 2 Soient f et g deux fonctions complexes définies sur l'intervalle I de \mathbb{R} , et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I .

1. Si $f_1 = o(g)$, et $f_2 = o(g)$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 + g_1 = o(g)$ au voisinage de x_0 .
2. Si $f = o(g)$ au voisinage de x_0 , alors, pour toute fonction h définie sur I , $fh = o(gh)$ au voisinage de x_0 .

Définition 3 Soient f et g deux fonctions complexes définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, adhérent à I . On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 , si, au voisinage de x_0 ,

$$g = f + o(f).$$

Cette propriété est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies sur I . On écrit aussi $f \sim g$ au voisinage de x_0 .

Remarque : Si il existe un voisinage V de x_0 , tel que g ne s'annule pas sur $V \setminus \{x_0\}$, dire que $f \sim g$ au voisinage de x_0 c'est dire que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ x \in V \setminus \{x_0\}}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \text{et, de plus, dans le cas où } x_0 \in I, f(x_0) = g(x_0).$$

Théorème 4 Si, au voisinage de x_0 , $f_1 \sim f_2$, et $g_1 \sim g_2$, alors, au voisinage de x_0 .

$$f_1 g_1 \sim f_2 g_2, \quad \text{et, si } g_1 \text{ et } g_2 \text{ ne s'annulent pas, } \frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f_2}{g_2}.$$

Si f_1 et f_2 sont positives, pour tout réel α , $f_1^\alpha \sim f_2^\alpha$, au voisinage de x_0 .

Remarques :

1. L'une des fautes les plus fréquentes dans les copies est l'addition de deux relations d'équivalence. En remplaçant chaque terme d'une somme par un équivalent, on n'obtient pas nécessairement un équivalent de la somme. Pour obtenir des équivalents de sommes, on utilise en général des développements limités.

2. Ecrire $f \sim 0$ au voisinage de x_0 n'est pas mathématiquement absurde. C'est une manière perverse de dire que f est identiquement nulle sur un voisinage de x_0 . Ceci dit, chaque fois qu'on lit dans une copie $f \sim 0$, c'est toujours une assertion fausse, fruit d'une erreur grossière, en général l'addition termes à termes de deux relations de la forme $f \sim g$.
3. De même, la relation $\cos t \sim 1 - t^2/2$ au voisinage de 0 est vraie, mais elle n'est ni plus ni moins vraie que $\cos t \sim 1$ ou encore $\cos t \sim 1 + t$. Il est donc ridicule de l'écrire. D'autant plus que, très souvent, cet énoncé est suivi de l'énoncé, faux cette fois, *et donc* $\cos t - 1 \sim -t^2/2$. La conclusion est vraie mais la démonstration est fautive. Car, le même raisonnement faux, partant de l'équivalence vraie $\cos t \sim 1 + t$ conduira à *donc* $\cos t - 1 \sim t!$ Le raisonnement correct utilise un développement limité

$$\cos t = 1 - t^2/2 + o(t^2) \quad \text{donc} \quad \cos t - 1 = -t^2/2 + o(t^2) \sim -t^2/2.$$

Développement limités au voisinage de 0

Définition 5 Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0, et n un entier naturel. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que, au voisinage de 0, on ait

$$f(x) = P(x) + o(x^n).$$

$P(x)$ est appelée la partie régulière du développement limité et la quantité $f(x) - P(x)$, négligeable devant x^n , est parfois appelée le reste de ce développement.

Théorème 6 (Unicité du développement) Si $f(x) = P_1(x) + o(x^n)$ et $f(x) = P_2(x) + o(x^n)$ sont deux développements limités à l'ordre n de f au voisinage de 0, $P_1 = P_2$.

Théorème 7 Pour que f admette un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 il faut et il suffit que f soit dérivable en 0. Dans ce cas le développement limité de f est

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x).$$

Théorème 8 (Théorème de Taylor-Young) *Si f est n fois dérivable en 0 alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 , donné par la formule*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Remarque :

1. Il n'y a pas de réciproque au théorème de Taylor-Young (sauf dans le cas $n = 1$). Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 , on peut seulement en déduire que f est dérivable une fois au point 0 .
2. L'utilisation de la formule de Taylor-Young est en général la plus mauvaise façon de calculer un développement limité. Les théorèmes suivants permettent de prouver l'existence de, et d'expliciter, la plupart des développements limités.

Théorème 9 (Addition et multiplication) *Soient f_1 et g_1 deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0 ,*

$$f_1(x) = P_1(x) + o(x^n), \quad f_2(x) = P_2(x) + o(x^n).$$

Alors $f_1 + f_2$ et $f_1 f_2$ admettent des développements limités d'ordre n en 0 ,

$$(f_1 + f_2)(x) = (P_1 + P_2)(x) + o(x^n), \quad (f_1 f_2)(x) = Q(x) + o(x^n),$$

où le polynôme Q est le polynôme $P_1 P_2$ tronqué au degré n .

Théorème 10 (Composition de développements) *Soient I et J deux intervalles réels, $u : I \rightarrow J$ et $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions telles que $u(0) = 0$, et admettant des développements limités d'ordre n en 0 ,*

$$u(x) = U(x) + o(x^n), \quad f(x) = P(x) + o(x^n).$$

Alors, g admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 , dont la partie régulière est le polynôme composé $P(U)$, tronqué à l'ordre n .

Théorème 11 (Développement d'une primitive) Soit f admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 ,

$$f(x) = P(x) + o(x^n),$$

et g une primitive de f . Alors g admet un développement limité d'ordre $n + 1$ au voisinage de 0 qui est

$$g(x) = g(0) + Q(x) + o(x^{n+1}),$$

où le polynôme Q est la primitive du polynôme P sans terme constant.

Théorème 12 (Développement d'un quotient) Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0 ,

$$f(x) = P(x) + o(x^n), \quad g(x) = Q(x) + o(x^n), \quad \text{avec } g(x_0) \neq 0.$$

Alors la fonction $h(x) \rightarrow f(x)/g(x)$ est définie au voisinage de 0 , et admet un développement limité

$$h(x) = R(x) + o(x^n).$$

Le polynôme R s'obtient en faisant la division de P par Q , selon les puissances croissantes de x , jusqu'à l'ordre n .

Remarque : Il n'est pas nécessaire de connaître le théorème ci dessus, ni la division selon les puissances croissantes, pour calculer le développement limité d'un quotient. En effet si $g(0) \neq 0$, $g(x)$ s'écrit au voisinage de 0 , $g(x) = g(0)(1 + u(x))$ en posant $u(x) = g(x)/g(0) - 1$. La fonction u admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 , $u(x) = U(x) + o(x^n)$, et satisfait $u(0) = 0$. On écrit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(0)} \frac{1}{1 + u(x)}.$$

Par le théorème de composition, le développement limité de $1/(1 + u(x))$ s'obtient en remplaçant dans le développement à l'ordre n de $1/(1 + u)$ la variable u par le polynôme $U(x)$ et en tronquant au degré n toutes les puissances de U . Multipliant ce développement par celui de $f(x)/g(0)$ on obtient le développement de $f(x)/g(x)$.

Théorème 13 (Développements de base)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{i=0}^n x^i && + o(x^n). \\ \log(1+x) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i} && + o(x^n). \\ e^x &= \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} && + o(x^n). \\ \cos x &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} && + o(x^{2n}). \\ \sin x &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} && + o(x^{2n+1}). \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} x^i && + o(x^n) \quad (\alpha \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

1 Développements limités en un point de $\overline{\mathbb{R}}$

On définit ici les notions de développement limité au voisinage d'un réel a quelconque, ou de $\pm\infty$. Ces notions se ramènent immédiatement à la notion de développement limité au voisinage de 0, en posant $x = a + t$ si a est réel, et $x = 1/t$ si $a = \pm\infty$.

Définition 14 On dit que la fonction f , définie sur l'intervalle I , admet un développement limité au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$, si a est adhérent à I , et si la fonction g définie sur $I - a$ par $g(t) = f(a+t)$ admet un développement limité d'ordre n en 0. Si ce développement est

$$g(t) = P(t) + o(t^n),$$

le développement de $f(x)$ au voisinage de a à l'ordre n est

$$f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n).$$

Définition 15 On dit que la fonction f , définie sur l'intervalle I , admet un développement limité en puissances de $1/x$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si la fonction g définie, pour $t > 0$ (resp. $t < 0$) suffisamment proche

de 0 par $g(t) = f(1/t)$ admet un développement limité d'ordre n en 0. Si ce développement est

$$g(t) = P(t) + o(t^n),$$

on a donc, au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = P(1/x) + o((1/x)^n).$$

Donnons enfin la notion de développement limité généralisé en puissances entières de x au voisinage de 0.

Définition 16 Soit f définie sur I tel que 0 soit adhérent à I . On dit que f admet au voisinage de 0 un développement généralisé d'ordre n en puissances entières de x s'il existe un entier $p \geq 0$, tel que la fonction $x \mapsto x^p f(x)$ admet un développement limité d'ordre $n + p$ au voisinage de 0,

$$x^p f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n+p} x^{n+p} + o(x^{n+p}).$$

Le développement limité généralisé de f à l'ordre n est alors, par définition

$$f(x) = \frac{a_0}{x^p} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \cdots + a_{n+p} x^n + o(x^n).$$

On définit de même les notions de développements limités généralisés au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, ou au voisinage de $\pm\infty$.

Développements limités et encadrements

Les développements limités sont un outil indispensable pour le calcul de limites. Mais de la donnée d'un développement limité de f au voisinage de 0, on ne peut pas déduire la moindre majoration ou minoration de $f(x_1)$ pour $x_1 \neq 0$. Même si x_1 est très proche de 0, une fonction ε qui tend vers 0 quand x tend vers 0 n'est pas obligée de se presser et peut prendre en x_1 une valeur gigantesque.

Pour obtenir des majorations ou des minoration il faut utiliser, par exemple, la formule des accroissements finis, ou sa généralisation, la formule de Taylor-Lagrange. On peut aussi utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

Quelques exemples

Exemple 1 Développer $\arctan \sqrt{1+4x}$ à l'ordre 3, au voisinage de 0.

Quand x tend vers 0, $f(x) = \sqrt{1+4x}$ tend vers 1. $f(x)$ est de la forme $\arctan(1+u)$, où $u(x) = \sqrt{1+4x} - 1$ tend vers 0 avec x . Plus précisément, en remplaçant t par $4x$ dans le développement

$$\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o(t^3)$$

on obtient

$$u(x) = 2x - 2x^2 + 4x^3 + o(x^3).$$

Le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction composée $x \rightarrow \arctan(1+u(x))$ se déduit du développement limité à l'ordre 3 de $u \rightarrow \arctan(1+u)$, en y remplaçant u par la partie régulière du développement de $u(x)$ à l'ordre 3, c'est à dire par le polynôme $U(x) = 2x - 2x^2 + 4x^3$. Pour obtenir le développement à l'ordre 3 de $\arctan(1+u)$ calculons d'abord le développement à l'ordre 2 de sa dérivée. La dérivée de $\arctan(1+u)$ est

$$\frac{1}{1+(1+u)^2} = \frac{1}{2+2u+u^2}.$$

Pour développer cette expression à l'ordre 2, on peut effectuer la division selon les puissances croissantes, ou utiliser le développement $1/(1+v) = 1 - v + v^2 + o(v^2)$. Procédons de cette manière. On écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+2u+u^2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{1+u+\frac{u^2}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(u + \frac{u^2}{2} \right) + u^2 + o(u^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} + o(u^2) \end{aligned}$$

Par le théorème d'intégration on en déduit le développement d'ordre 3,

$$\arctan(1+u) = \frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{4} + \frac{u^3}{12} + o(u^3)$$

Remplaçant u par $2x - 2x^2 + 4x^3$, u^2 par $4x^2 - 8x^3$, et enfin u^3 par $8x^3$ on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(2x - 2x^2 + 4x^3) - \frac{1}{4}(4x^2 - 8x^3) + \frac{1}{12}8x^3 \\ &= \frac{\pi}{4} + x - 2x^2 + \frac{14}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Exemple 2 Développement généralisé à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$,
 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$.

On écrit $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{t}\sqrt{1 + 2t}$, avec $t = 1/x$, et on est ramené au développement de $\sqrt{1 + 2t}$ au voisinage de 0. Le théorème (13) donne immédiatement

$$\sqrt{1 + 2t} = 1 + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} + o(t^3).$$

Multipliant les deux termes par $1/t$ on obtient

$$f(x) = \frac{1}{t} + 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} + o(t^2) = x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Exemple 3 Développement généralisé à l'ordre 2 au voisinage de 0 de
 $f(x) = \frac{\ln(1 + \tan x)}{1 - \cos x}$.

Le numérateur $\ln(1 + \tan x)$ est équivalent à $\tan x$, et donc à x au voisinage de 0, tandis que le dénominateur $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ est un infiniment petit d'ordre 2. $f(x)$ est donc équivalent à $\frac{2}{x}$ au voisinage de 0, et le développement limité généralisé de f , à l'ordre 2 est de la forme

$$\frac{2}{x} + c_0 + c_1x + c_2x^2 + o(x^2).$$

Il contient 4 termes. Nous allons donc déterminer les développements limités à quatre termes du numérateur, et du dénominateur. Le premier terme du numérateur étant x , le dernier des quatre termes du développement sera le terme en x^4 . On développe donc $\ln(1 + \tan x)$ à l'ordre 4. Pour le dénominateur, $1 - \cos x$ dont le premier terme est en x^2 , il faudra aller jusqu'au terme en x^5 . Commençons par le numérateur, et donc par

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$$

Le développement de ce quotient peut se faire en remplaçant u par $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$ dans le développement de $1/(1-u)$, puis en multipliant le résultat par $x - \frac{x^3}{6}$, soit par la division selon les puissances croissantes

$$\begin{array}{r|l} x - \frac{x^3}{6} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ x - \frac{x^3}{2} & x + \frac{x^3}{3} \\ \hline \frac{x^3}{3} & \end{array}$$

(puisque l'on veut un développement à l'ordre 4, tous les monômes de degré ≥ 5 sont négligés) qui donne $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$. Pour calculer le développement de $\ln(1 + \tan x)$ à l'ordre 4, on remplace par $u = x + \frac{x^3}{3}$ dans le développement à l'ordre 4, $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)$. Les puissances successives de u , tronquées au degré 4 en x , sont

$$u = x + \frac{x^3}{3}, \quad u^2 = x^2 + \frac{2x^4}{3}, \quad u^3 = x^3, \quad u^4 = x^4.$$

D'où le développement du numérateur

$$\begin{aligned} \ln(1 + \tan(x)) &= \left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{2x^4}{3}\right) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Celui du dénominateur s'obtient immédiatement à partir de celui de $\cos x$

$$1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

Il en résulte

$$f(x) = \frac{x \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} - \frac{7}{12}x^3 + o(x^3)\right)}{\frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right)} = \frac{2}{x} \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} - \frac{7}{12}x^3 + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)}$$

Ici encore, on peut, ou bien effectuer la division, selon les puissances croissantes de x , de $1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} - \frac{7}{12}x^3$ par $1 - \frac{x^2}{12}$, à l'ordre 3, ou bien calculer

d'abord le développement limité à l'ordre 3 de $1/\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right)$ en remplaçant dans le développement limité $1/(1 - u) = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$, u par $x^2/12$. C'est la solution que nous adoptons ici. Puisque on calcule un développement à l'ordre 3, toutes les puissance de u sont tronquées au degré 3 en x . Le terme de plus bas degré de u étant $x^2/2$, de degré 2, les termes u^2, u^3 sont inutiles car tous leurs monômes sont de degré au moins 4. On obtient ainsi

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{12} + o(x^3).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} - \frac{7}{12}x^3 + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)} \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} - \frac{7}{12}x^3 + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{5x^3}{8} + o(x^3). \end{aligned}$$

puis, multipliant par $2/x$,

$$f(x) = \frac{2}{x} - 1 + \frac{3x}{2} - \frac{5x^2}{4} + o(x^2).$$