

SESSION DE 1985

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème. L'emploi des instruments de calcul est autorisé pour cette épreuve.

Notations et objectif du problème

On désigne par I l'intervalle $[0, +\infty[$; on note $C(I)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs complexes et $C^1(I)$ le sous-espace vectoriel de $C(I)$ constitué des fonctions continûment dérivables sur I .

On considère l'équation différentielle

$$(1) \quad y' + ay = f,$$

où a est un nombre réel non nul donné et où f est un élément de $C(I)$. On note U l'application de $C(I)$ dans lui-même qui, à tout élément f , associe l'unique solution g de l'équation (1) satisfaisant à la condition initiale $g(0) = 0$.

L'objectif de ce problème est d'étudier le comportement (global ou asymptotique) de g connaissant celui de f , ce qui revient à étudier l'opérateur U .

A titre d'information, il est indiqué que ce type de question intervient notamment dans la théorie du signal : la fonction $t \mapsto f(t)$ représente alors un signal d'entrée dans un certain appareil, la solution $x \mapsto g(x)$ représente le signal de sortie associé à f et l'application $f \mapsto g$, appelée opérateur de transfert, permet de décrire le comportement de l'appareil considéré. Le problème étudié ici est un exemple à la fois simple et fondamental de cette situation générale.

I. Propriétés élémentaires de l'opérateur U 1. Expression intégrale de U .

a. Exprimer $g = U(f)$ en fonction de f ; expliciter g lorsque $f = 1$.

b. On revient au cas général. L'expression obtenue pour g montre aussitôt que l'application U est linéaire; établir aussi ce résultat à partir du seul fait que g est l'unique solution de (1) telle que $g(0) = 0$.

2. Positivité de U .

Soient φ un élément de $C(I)$ à valeurs réelles positives et $\psi = U(\varphi)$.

a. Prouver que ψ est à valeurs réelles positives.

b. Prouver que, pour tout élément f de $C(I)$, $|U(f)| \leq U(|f|)$.

c. On suppose $a > 0$. Lorsque φ est croissante, prouver que $a\psi \leq \varphi$ et en déduire que ψ est croissante.

3. Commutation de U avec la dérivation.

a. On note D l'opérateur de dérivation qui, à tout élément de $C^1(I)$, associe sa dérivée. Soient f un élément de $C^1(I)$ et $g = U(f)$. En dérivant la relation $g' + ag = f$, comparer $D[U(f)]$ et $U[D(f)]$; à quelle condition portant sur f ces deux fonctions sont-elles égales?

b. Retrouver les résultats de la question 2.c.

II. Comportement asymptotique des solutions au voisinage de $+\infty$

On traite ici quelques cas fondamentaux, en partant d'exemples de fonctions f pour lesquelles on dispose de formules explicites pour $g = U(f)$. Sauf mention explicite du contraire, on suppose $a > 0$.

1. Cas des fonctions admettant une limite au point $+\infty$.

a. Comparer le comportement asymptotique de g à celui de f lorsque $f = 1$. Tracer sur une même figure les graphes de f et de ag . Préciser le comportement asymptotique de g lorsque $a < 0$.

b. Soient T un nombre réel strictement positif et f la fonction définie sur I par les relations $f(t) = 1$ si $0 \leq t \leq T$ et $f(t) = 0$ si $t > T$. On convient de dire qu'une fonction est solution de (1) sur I si elle est continue sur I et si elle est solution de (1) sur les intervalles $[0, T[$ et $]T, +\infty[$. Expliciter l'unique solution g de (1) sur I telle que $g(0) = 0$ et étudier son comportement asymptotique.

c. Soit φ un élément de $C(I)$ à valeurs réelles positives ayant 0 pour limite au point $+\infty$. Prouver qu'il en est de même pour $\psi = U(\varphi)$. A cet effet, on pourra d'abord établir la majoration suivante, valable pour tout nombre réel positif c et pour tout nombre réel x supérieur à c :

$$\psi(x) \leq e^{-ax} \int_0^c e^{at} \varphi(t) dt + \frac{1}{a} \sup_{t \in [c, x]} \varphi(t).$$

d. Soit f un élément de $C(I)$. Étudier le comportement asymptotique de $g = U(f)$ lorsque f admet une limite b au point $+\infty$, où b est un nombre complexe.

2. Cas des fonctions exponentielles.

a. Soient k un nombre réel et f_k la fonction $t \mapsto e^{-kt}$. Expliciter $g_k = U(f_k)$ et comparer son comportement asymptotique à celui de f_k , en discutant suivant les valeurs de k .

b. Soient ω un nombre réel strictement positif et f_ω la fonction $t \mapsto e^{i\omega t}$. Expliciter $g_\omega = U(f_\omega)$. Comparer son comportement asymptotique à celui de f_ω ; interpréter géométriquement le résultat obtenu (introduire la forme trigonométrique du nombre complexe $a + i\omega$).

3. Cas des fonctions puissances.

Pour tout nombre réel positif α , on note f_α la fonction $t \mapsto t^\alpha$ et $g_\alpha = U(f_\alpha)$, en convenant que $f_0 = 1$.

a. En partant de l'expression de g_0 et en s'appuyant sur les résultats obtenus en I.3, comparer le comportement asymptotique de g_n à celui de f_n , où n est un nombre entier naturel non nul.

b. Soient f un élément de $C(I)$ à valeurs réelles et $g = U(f)$. Prouver que si f est négligeable devant f_α au voisinage de $+\infty$, alors il en est de même pour g .

c. Comparer enfin le comportement asymptotique de g_α à celui de f_α . A cet effet, on pourra étudier $h' + ah$, où

$$h(x) = g_\alpha(x) - \frac{x^2}{a} (1 - e^{-ax}).$$

III. Comportement global des solutions. Cas stable

Dans cette partie on suppose $a > 0$.

1. Cas des fonctions bornées.

On désigne par E le sous-espace vectoriel de $C(I)$ constitué des fonctions bornées sur I et on munit E de la norme

$$f \longmapsto N_\infty(f) = \sup_{t \in I} |f(t)|.$$

a. Soit φ un élément de E à valeurs réelles positives. Prouver que $\psi = U(\varphi)$ appartient encore à E et que

$$N_\infty(\psi) \leq \frac{1}{a} N_\infty(\varphi).$$

Lorsque φ est croissante, montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente.

b. En conclure que, pour tout élément f de E , la fonction $g = U(f)$ appartient encore à E , que

$$N_\infty(g) \leq \frac{1}{a} N_\infty(f)$$

et que, dans cette inégalité, valable pour tout élément f de E , le nombre $\frac{1}{a}$ ne peut être remplacé par un nombre strictement inférieur.

2. Cas des fonctions intégrables.

On désigne par F le sous-espace vectoriel de $C(I)$ constitué des fonctions f intégrables sur I , c'est-à-dire dont l'intégrale sur I est absolument convergente, et on munit F de la norme

$$f \longmapsto N_1(f) = \int_0^{+\infty} |f(t)| dt.$$

a. Soient φ un élément de F à valeurs réelles positives et $\psi = U(\varphi)$. Intégrer la relation $\psi' + a\psi = \varphi$ sur l'intervalle $[0, c]$, où c est un nombre réel positif; en déduire que ψ appartient aussi à F , puis que ψ admet une limite λ au point $+\infty$. Prouver alors que $\lambda = 0$ et que

$$N_1(\psi) = \frac{1}{a} N_1(\varphi).$$

b. Que peut-on en conclure pour $g = U(f)$ lorsque f est un élément de F ?

3. Cas des fonctions de carré intégrable.

On désigne par G le sous-espace vectoriel de $C(I)$ constitué des fonctions de carré intégrable sur I , c'est-à-dire telles que $|f|^2$ soit intégrable sur I , et on munit G de la norme

$$f \longmapsto N_2(f) = \left(\int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

a. Soient φ un élément de G à valeurs réelles positives et $\psi = U(\varphi)$. Prouver que ψ appartient aussi à G , que $\psi\varphi$ appartient à F , que ψ admet 0 pour limite au point $+\infty$ et que

$$\int_0^{+\infty} \psi^2(t) dt = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \psi(t) \varphi(t) dt.$$

(On pourra s'inspirer de la méthode de la question 2 en partant cette fois de la relation $\psi\psi' + a\psi^2 = \psi\varphi$.)

Établir aussi que

$$N_2(\psi) \leq \frac{1}{a} N_2(\varphi)$$

et que cette inégalité ne peut être améliorée.

b. Que peut-on en conclure pour $g = U(f)$ lorsque f est un élément de G ?

4. Effet régularisant de U .

a. Montrer que, pour tout élément f de F , la fonction $g = U(f)$ appartient à E et que

$$N_\infty(g) \leq N_1(f).$$

Établir enfin que cette inégalité ne peut être améliorée. A cet effet, on pourra introduire la suite (f_n) des fonctions définies par les conditions suivantes : $f_n(t) = 0$ si $t \geq \frac{1}{n}$, $f_n(0) = 2n$ et f_n est affine sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$; on calculera $N_1(f_n)$ et $g_n\left(\frac{1}{n}\right)$, où $g_n = U(f_n)$, et on en déduira la limite de $N_\infty(g_n)$.

b. Montrer que, pour tout élément f de G , la fonction $g = U(f)$ appartient à E et établir une majoration du type

$$N_\infty(g) \leq \beta N_2(f),$$

où β est un nombre réel positif indépendant de f .

IV. Comportement global des solutions. Cas instable

Dans cette partie on suppose $a < 0$.

On désigne par L le sous-espace vectoriel de $C(I)$ constitué des fonctions f telles que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-|a|t} f(t) dt$$

soit absolument convergente.

1. Existence et unicité d'une solution à croissance modérée à l'infini.

Montrer que, pour tout élément f de L , il existe une solution h et une seule de (1) négligeable devant $x \mapsto e^{|a|x}$ au voisinage de $+\infty$, et exprimer h en fonction de f . On note V l'application linéaire de L dans $C(I)$ qui, à tout élément f de L , associe h .

2. Propriétés globales d'une telle solution.

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de L stable par V et que, pour tout élément f de E , $h = V(f)$ est l'unique solution de (1) bornée sur I . Majorer enfin $N_\infty(h)$ à l'aide de $N_\infty(f)$.

b. Effectuer une étude analogue pour les espaces vectoriels F et G .