Planche de TD numéro III

29 novembre 2009

1 Somme d'une série lentement convergente

1. Calculez une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln^2 x}$. D'abord à la main, puis à l'aide de la commande `integrate`.
2. Pour $n \geq 2$ on note $u_n = \dfrac{1}{n\ln^2 n}$, et $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} u_k$. En comparant cette somme à une intégrale, donnez un majorant de S_n. Prouvez que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ est convergente. On note $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série.
3. Soit $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=\infty} u_k$ le reste d'ordre n. Démontrez que $\dfrac{1}{\ln n+1} < R_n < \dfrac{1}{\ln n}$.
4. Montrez que si $S - S_n < 0.01$ alors $n \geq 10^{43}$.
5. Ouvrez une feuille de calcul SAGE, calculez S_{20} et un encadrement de R_{20} puis une valeur approchée de S à 3×10^{-3} près.
6. En complétant la cellule :

```
def SumPart(n) :
    return sum(...)
```

   écrivez la fonction `Sp(n)` qui rend la somme partielle d'ordre n, $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$.
7. En complétant judicieusement la troisème ligne de la cellule :

```
def GoodApprox(n) :
    Sum = SumPart(n)
    Sum = Sum + ...
    Rbound = 0.5*(1./log(n)-1./log(n+1))
    return [Sum, Rbound]
```

   écrivez la fonction `GoodApprox(n)` qui renvoie le couple `[Somme,Rbound]` où `Sum` est une valeur approchée de S avec une erreur plus petite que `Rbound`.
8. Calculez une valeur approchée à 10^{-6} près de $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

2 Evaluation approchée d'une intégrale

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. On veut calculer une valeur approchée de I. Si vous ne connaissez pas encore la commande `numerical_integral` consultez la documentation

```
numerical_integral ?
```

et lancez la commande

```
numerical_integral(sin(x)/x,0,pi)
```

qui vous donnera

$$I = 1.851937051982466 \pm 3 \times 10^{-14}.$$

Dans cet exercice on se propose d'établir une identité exprimant I comme somme d'une série, à partir de laquelle on calculera les 58 premiers chiffres de l'écriture décimale de I.

1. Démontrez que la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ se prolonge en la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

2. Prouvez soigneusement l'identité

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

3. On note

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$$

Démontrez que, pour $n \geq 0$, I_n est une valeur approchée par excès de I si n est pair, et une valeur approchée par défaut si n est impair.

4. Calculez $I_0, I_1, \ldots, I_{12}$, et déduisez en que $I = 1,8519370519824\ldots$
5. Ce qui limite la précision du calcul précédent ce n'est pas la complexité du calcul, c'est à dire le temps de calcul, mais simplement la précision des calculs réels.

   Par défaut, SAGE, comme beaucoup de langages de programmation, mémorise la valeur réelle x de la manière suivante [1] :

   (a) On écrit x sous la forme $x = \pm 2^E m$, où le nombre m, qu'on appelle la *mantisse* de x satisfait $1 \leq m < 2$.

   (b) Puisque m est compris entre 1 et 2 son écriture binaire est

$$m = 1, b_1 b_2 b_3 \ldots$$

   Le nombre x est stocké en utilisant 64 bits. Le premier bit est 0 ou 1 selon que x est positif ou négatif, les 12 bits suivants sont utilisés pour mémoirer la valeur de l'exposant E, et enfin les 52 suivants sont les 52 premiers bits de de la partie fractionnaire de m c'est à dire les bits $b_1 b_2 \ldots b_{52}$.

[1] Type réel flottant sur 64 bits de la norme IEEE754

La bibliothèque MPFR [2] développée par l'INRIA et incorporée dans SAGE permet de faire beaucoup mieux, en, utilisant des réels avec des mantisses de longueur arbitraire. La commande

```
R200 = RealField(200, rnd='RNDN') ;
```

définit un nouveau type R200 : ce sont les valeurs réelles représentées avec une mantisse de 200 bits. L'argument `rnd='RNDN'` demande au système, lorsqu'il doit choisir entre une valeur par excès et une valeur par défaut d'un nombre x, de conserver celle de ces 2 vaeurs qui est la plus proche de x. Vérifions que tout semble fonctionner en évaluant

```
R200(pi)
```

qui rend 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749 puis

```
y=log(R200(2))
```

et enfin

```
x=log(y)
```

En complétant la cellule suivante,

```
def Ilong(n,nbits) :
        Rnb =RealField(nbits, rnd='RNDN')
        ...
```

définissez la fonction `Ilong(n,nbits)` qui calcule la somme I_n avec une précision de nbits chiffres binaires. Montrez enfin que

$$I = 1.8519370519824661703610533701579913633458097289811549098\,04\ldots$$

3 Le phénomène de Gibbs

Soit f la fonction 2π-périodique impaire, définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in]0,\, \pi[\\ 0 & si\ x = k\pi \end{cases}$$

1. Explicitez la série de Fourier de f. Prouvez qu'elle converge simplement vers f. On note S_n la $(2n-1)^{eme}$ somme partielle de la série de Fourier de f, c'est à dire

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

2. Ouvrir une feuille de calcul SAGE et
   (a) Définir la fonction f en SAGE en complétant `def f(x) :`
   (b) Défininissez une fonction `SumPart(n,x)` qui renvoie $S_n(x)$.
   (c) Tracez sur une même image les graphes de $f, S_4(x), S_{20}(x)$.

[2] http ://gforge.inria.fr/projects/mpfr/

3. Démontrez que S_n est dérivable, avec, pour tout x

$$S_n'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin 2nx}{\sin x} & \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi \\ (-1)^q \dfrac{4n}{\pi} & \text{pour } x = q\pi. \end{cases}$$

Prouvez que S_n présente $(2n-1)$ extrema locaux sur l'intervalle $[0, \pi]$, que le premier d'entre eux est un maximum, qu'on notera a_n et qu'il est atteint en $x = \dfrac{\pi}{2n}$.

4. Montrez que, pour tout $x \in \,]0, \pi[$ on a $S_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ puis que

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{(2n)\sin\frac{t}{2n}}\,\mathrm{d}t$$

5. Prouvez soigneusement que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (vous serez amené à prouver la convergence uniforme d'une suite de fonctions définies sur $[0, \pi]$).

6. À l'aide de l'exercice précédent prouvez que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.17897974447216727023202884582490974146389742096436614 6834\ldots$$