Chapitre 3

Corrigés ou indications : Séries de Dirichlet

Exercice 3.1

1. Puisque la série converge lorsque $s = s_0$, la suite $\left(\dfrac{a_n}{n^{s_0}}\right)$ est bornée par une constante M. Soit alors $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1 + \mathrm{Re}(s_0)$. Pour tout $n \geq 1$,
$$\left|\frac{a_n}{n^s}\right| = \frac{|a_n|}{n^{\mathrm{Re}\, s}} = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s-s_0)}} \frac{|a_n|}{n^{\mathrm{Re}(s_0)}} \leq \frac{M}{n^{\mathrm{Re}(s-s_0)}}$$
Puisque $\mathrm{Re}(s - s_0) > 1$ la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{n^{\mathrm{Re}(s-s_0)}}$ est convergente, et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ est absolument convergente.
2. Soit s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1 + \sigma_c$. Il faut montrer que la série converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ est absolument convergente. Soit s_0 tel que
$$\sigma_c < \mathrm{Re}(s_0) < \mathrm{Re}(s) - 1.$$
La série est semi-convergente converge en s_0, et par la question précédente, elle est absolument convergente en s.

Exercice 3.2

1. (a) Par le théorème des séries alternées la série converge pour tout réel $s > 0$. Elle diverge pour $s = 0$, car son terme général ne tend pas vers 0. Donc $\sigma_c = 0$.
   (b) Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on a $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^s}\right| = \left|\dfrac{1}{n^s}\right|$ La série est donc absolument convergente si et seulement si $\mathrm{Re}(s) > 1$.
2. Puisque les a_n sont positifs, les deux abscisses de convergence sont égales. Et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2)^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2s}}$$
converge absolument si et seulement si $\mathrm{Re}(s) > 1/2$.

Exercice 3.3

On remarque que $f(n) = 1$ si et seulement si n est impair. Puisque f est multiplicative son inverse g l'est aussi. Il suffit donc d'expliciter les p^α, pour p premier et $\alpha \geq 1$, pour connaitre $g(n)$ pour tout entier n.

1. Si p est impair :

$$0 = \delta(p^\alpha) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} f(p^\beta) g(p^{\alpha-\beta}) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} g(p^{\alpha-\beta})$$

   Pour $\alpha = 1$ cela donne $g(p) = -g(1) = -1$, puis, par récurrence $g(p^\alpha) = 0$ pour $\alpha \geq 2$.

2. Pour $p = 2$:

$$0 = \delta(2^\alpha) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} f(2^\beta) g(2^{\alpha-\beta}) = g(2^\alpha) - \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} g(2^\beta).$$

   Pour $\alpha = 1$ cela donne $g(2) = -g(1) = 1$, puis, $g(4) = g(2) + g(1) = 2$, et par récurrence $g(2^\alpha) = 2^{\alpha-1}$.

En résumé si n est impair $g(n) = \mu(n)$, et si n est pair, $n = 2^\alpha(2m+1)$ on a

$$g(n) = 2^{\alpha-1}\mu(2m+1).$$

Exercice 3.5

Puisque $|\lambda(n)| = 1$ l'abscisse de convergence absolue de la série de Dirichlet de λ est 1. Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, puisque λ est complètement multiplicative le produit eulérien

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{\lambda(p^2)}{p^{2s}} + \cdots\right)$$

se simplifie en

$$\begin{aligned}\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p^s} + \left(\frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^2 + \cdots\right) &= \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{\lambda(p)}{p^s}} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 + \frac{1}{p^s}} \\ &= \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1 - \frac{1}{p^s}}{1 - \frac{1}{p^{2s}}} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}.\end{aligned}$$

Exercice 3.6

1. Cela résulte de $d(n) = \prod(v_p(n) + 1)$.
2. L'hypothèse sur p implique que $p^\delta > 2$, et donc
$$\frac{v_p(n)+1}{p^{\delta v_p(n)}} \leq \frac{v_p(n)+1}{2^{v_p(n)}} \leq 1$$
car, pour tout entier $\alpha \geq 0$, on a $2^\alpha \geq 1 + \alpha$.
3. Il résulte des 2 questions précédentes que
$$\frac{d(n)}{n^\delta} \leq \prod_{p \leq 2^{1/\delta}} \frac{v_p(n)+1}{p^{\delta v_p(n)}}.$$
Ce produit est fini. Et pour chaque nombre premier p fixé, la suite $\alpha \mapsto (\alpha+1)/p^{\delta\alpha}$ est majorée par une constante M_p (dépendant de p) parce qu'elle tend vers 0 quand $\alpha \to +\infty$. D'où
$$\frac{d(n)}{n^\delta} \leq \prod_{p \leq 2^{1/\delta}} M_p.$$

Exercice 3.7

1. Puisque $d(n) \geq 0$ les 2 abscisses de convergence sont identiques.
2. Soit $\sigma > 1$. On choisit σ_0 tel que $1 < \sigma_0 < \sigma$. Vu l'exercice précédent
$$\frac{d(n)}{n^\sigma} = \frac{1}{n^{\sigma_0}} \frac{d(n)}{n^{\sigma-\sigma_0}} \leq \frac{1}{n^{\sigma_0}}$$
pour n assez grand.
3. Pour $s = 1$ on a $d(n)/n \geq 1/n$ et la série diverge.
4. Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ on écrit
$$\zeta(s)^2 = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \sum_{d=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(kd)^s}.$$
La famille $\left(\frac{1}{(kd)^s}\right)_{k\geq 1,\ d\geq 1}$ est sommable ; on peut donc regrouper les termes de manière arbitraire sans changer la somme. Regrouponds les selon la valeur n du produit kd : le nombre d'occurences du terme $1/n^s$ est égal au nombre de manières d'écrire $n = kd$ c'est à dire au nombre $d(n)$ des diviseurs de n. On obtient donc
$$\zeta(s)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s}$$

Exercice 3.8

1. On a évidemment, en notant $\mathbf{1}$ la fonction constante $n \mapsto 1$,
$$d(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d|n} \mathbf{1}(d)\mathbf{1}(n/d)$$
et donc $d = \mathbf{1} \star \mathbf{1}$.
2. La série de Dirichlet associée à la fonction $\mathbf{1}$ est la série $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^s$ qui converge absolument vers $\zeta(s)$ pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. Pour tout s avec $\mathrm{Re}(s) > 1$ la série de Dirichlet de $\sum_{n=1}^{+\infty} d(n)/n^s$ est donc absolument convergente, et sa somme est le produit $\zeta(s)\zeta(s) = \zeta^2(s)$.

Exercice 3.9

1. La défintion de σ,
$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \mathrm{id}(d)\mathbf{1}(d)$$
montre que σ est le produit de convolution $\sigma = \mathrm{id} \star \mathbf{1}$. La fonction identité a pour série de Dirichlet la fonction $\zeta(s-1)$ avec pour abscisse de convergence 2, et la fonction constante 1 a pour série de Dirichlet la fonction $\zeta(s)$ avec pour abscisse de convergence 1. Il en résulte que, pour $\mathrm{Re}\, s > 2$, la série de Dirichlet de σ converge, avec de plus
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1).$$
2. Pour $s = 2$ on a
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$
L'abscisse de convergence est donc minorée par 2. Vu la question 1 elle est égale à 2.

Exercice 3.10

1. Soit $s = \sigma + it$, avec $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 2$. Montrons que la famille $\left(\dfrac{\varphi(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\right)_{\alpha \geq 1, p \in \mathcal{P}}$ est sommable. Pour chaque p fixé, la suite
$$\left(\left|\frac{\varphi(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\right|\right)_{\alpha \geq 1}$$
est une suite géométrique de raison $\left|\dfrac{1}{p^{s-1}}\right| = \dfrac{1}{p^{\sigma-1}} \leq \dfrac{1}{p}$, et de premier terme $\dfrac{p-1}{p^\sigma}$. Elle est donc convergente, de somme
$$\frac{p-1}{p^\sigma} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{\sigma-1}}} = \frac{p-1}{p} \frac{1}{p^{\sigma-1} - 1} \leq \frac{2}{p^{\sigma-1}},$$

où la dernière inégalité provient de $\sigma > 2$ et $p \geq 2$.
Puisque $\sigma > 2$, la série de terme général $\dfrac{2}{p^{\sigma-1}}$ est convergente.
On peut donc appliquer le théorème du produit eulérien à la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)/n^s$. Il en résulte que cette série est absolument convergente et que sa somme est

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)/n^s &= \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \frac{\varphi(p)}{p^s} + \frac{\varphi(p^2)}{p^{2s}} + \frac{\varphi(p^3)}{p^{3s}} + \cdots\right) \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \frac{p-1}{p^s} + \frac{(p-1)p}{p^{2s}} + \frac{(p-1)p^2}{p^{3s}} + \cdots\right) \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \frac{p-1}{p^s}\frac{1}{1-p^{1-s}}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \frac{p-1}{p^s-p}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{p^s-1}{p^s-p} \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1-p^{-s}}{1-p^{-(s-1)}} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.
\end{aligned}$$

Remarque : On sait que si f est multiplicative et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ absolument convergente, alors la famille $(f(p^\alpha)_{p\in\mathcal{P},\alpha\geq 1}$ est sommable. On pouvait sur cet exemple démontrer directement, et plus rapidement, que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)/n^s$ est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 2$ en utilisant $1 \leq \varphi(n) \leq n$.

2. L'identité de l'énoncé s'écrit
$$\mathrm{id} = \mathbf{1} \star \varphi,$$
et, puisque l'inverse de la fonction $\mathbf{1}$ pour la convolution est la fonction μ de Möbius, on en déduit
$$\varphi = \mu \star \mathrm{id}\,.$$
Puisque $|\mu(n)| \leq 1$ la série de Dirichlet de μ,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$
converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ vers $1/\zeta(s)$, car $\mu \star \mathbf{1} = \delta$. La série de Dirichlet de id, $\sum_{n=1}^{+\infty} n/n^s = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/(n^{s-1})$ est convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 2$ et sa somme est alors $\zeta(s-1)$. Les deux séries convergent absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 2$. Le théorème relatif à la série de Dirichlet d'un produit de convolution donnent la convergence absolue pour $\mathrm{Re}(s) > 2$ de $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)/n^s$ et l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)/n^s = \zeta(s-1)/\zeta(s)$.
3. Pour $s = 2$, la minoration $\varphi(n) \geq kn\log n$ donne
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^2} \geq k\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\log n} = +\infty.$$
L'abscisse de convergence est donc supérieure ou égale à 2.

Exercice 3.12

On écrit :

$$\sum_{n\leq x}\frac{\sigma(n)}{n}=\sum_{n\leq x}\sum_{d|n}\frac{d}{n}=\sum_{n\leq x}\sum_{d|n}\frac{1}{d}=\sum_{d\leq x}\frac{1}{d}\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor=\sum_{d\leq x}\frac{x}{d^2}-\sum_{d\leq x}\frac{1}{d}\left\{\frac{x}{d}\right\}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\frac{\sigma(n)}{n}=\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^2}-\frac{1}{x}\sum_{d\leq x}\frac{1}{d}\left\{\frac{x}{d}\right\}=\frac{\pi^2}{6}+o(1)$$

puisque $\displaystyle\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^2}\to\frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\frac{1}{x}\left|\sum_{d\leq x}\frac{1}{d}\right|\leq\frac{1+\log x}{x}=o(1)$. Plus précisément la comparaison avec une intégrale donne

$$\sum_{d>x}\frac{1}{d^2}\leq\frac{1}{x-1}=O\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc

$$\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^2}=\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{1}{d^2}-\sum_{d>x}^{+\infty}\frac{1}{d^2}=\frac{\pi^2}{6}+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Avec $\displaystyle\sum_{d\leq x}\frac{1}{d}\leq\frac{1+\log x}{x}=O\left(\frac{\log x}{x}\right)$ on obtient l'estimation de l'énoncé.

Exercice 3.13

On écrit

$$\sum_{n\leq x}d(n)=\sum_{n\leq x}\sum_{d|n}1=\sum_{d\leq x}\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor=\sum_{d\leq x}\frac{x}{d}-\sum_{d\leq x}\left\{\frac{x}{d}\right\}.$$

Avec $\sum_{d\leq x}\frac{1}{d}=\log x+O(1)$ cela donne

$$\sum_{n\leq x}d(n)=x\log x+O(x).$$

Exercice 3

1. On écrit
$$\sum_{n\leq x}d(n)=\sum_{n\leq x}\sum_{d|n}1=\sum_{d\leq x}\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor$$
et on remarque que $\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor$ est le nombre des points $(u,v)\in(\mathbb{N}^\star)^2$ situés sous l'hyperbole d'équation $uv=x$ dont l'abscisse est d.
2. La figure ci-contre donne immédiatement
$$\sum_{n\leq x}d(n)=2\sum_{n\leq\sqrt{x}}\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor-\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor^2.$$

3. Par la question précédente
$$\sum_{n\le x} d(n) = 2\sum_{n\le\sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{d}\right\rfloor - \left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor^2 = 2\sum_{n\le\sqrt{x}} \frac{x}{d} - 2\sum_{n\le\sqrt{x}} \left\{\frac{x}{d}\right\} - \left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor^2.$$
La formule d'Euler donne
$$2\sum_{d\le\sqrt{x}} \frac{x}{d} = 2x\log\sqrt{x} + 2\gamma x + O\big(\sqrt{x}\big)$$
Avec $\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor^2 = \big(\sqrt{x} - \{\sqrt{x}\})^2\big) = x + O(\sqrt{x})$ on en déduit
$$\sum_{n\le x} d(n) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O\big(\sqrt{x}\big),$$
et l'estimation de l'énoncé.

Exercice 3.15

Utilisant l'indication de l'énoncé on écrit
$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x}\sigma(n) &= \sum_{n\le x}\sum_{d|n} d = \sum_{n\le x}\sum_{d|n}\frac{n}{d} = \sum_{d\le x}\sum_{kd\le x}\frac{kd}{d} \\
&= \sum_{d\le x}\sum_{k\le\frac{x}{d}} k = \sum_{d=1}^{x}\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor + 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{d=1}^{x}\left(\frac{x}{d} + O(1)\right)\left(\frac{x}{d} + O(1)\right) \\
&= \frac{1}{2}x^2\sum_{d=1}^{x}\frac{1}{d^2} + O\left(x\sum_{d=1}^{x}\frac{1}{d}\right) + O(x).
\end{aligned}$$
Avec $\displaystyle\sum_{d=1}^{x}\frac{1}{d^2} = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{1}{x}\right)$ cela donne $\displaystyle\sum_{n\le x}\sigma(n) = \frac{1}{12}\pi^2x^2 + O(x\log x)$.

Exercice 3.16

1. $\mu^2(n) = 1$ si n est sans facteurs carrés et 0 sinon.
2. Il suffit de majorer par
$$\left|\frac{\mu^2(n)}{n^s}\right| \le \left|\frac{1}{n^s}\right|.$$
Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, la convergence absolue de la série et la multiplicativité de μ permettent d'applique le théorème du produit eulérien qui donne
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mu^2(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1 + \frac{1}{p^s}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1 - \dfrac{1}{p^{2s}}}{1 - \dfrac{1}{p^s}} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

3. Puisque μ est l'inverse pour la convolution de la fonction constante $\mathbf{1}$, l'égalité $g \star \mathbf{1} = \mu^2$ est équivalente à $g = \mu^2 \star \mu$. De plus g produit de convolution de deux fonctions multipmlicatives est multiplicative. Il en résulte que

$$g(1) = 1, \qquad g(p) = 0, \qquad g(p^2) = -1, \qquad g(p^\alpha) = 0 \text{ pour } \alpha \geq 3.$$

Par multiplicativité de g si la décomposition de n en facteurs premiers est $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ la valeur $g(n)$ est non nulle si et seulement si n tous les α_i sont égaux à 2. Dans ce cas $n = m^2$ avec $m = p_1 p_2 \cdots p_k$ et $g(n) = (-1)^k = \mu(m)$.

4. Par la question précédente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{(m^2)^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^{2s}} = \frac{1}{\zeta(2s)},$$

en utilisant le fait que la série de Dirichlet de μ a pour somme la fonction $1/\zeta$.

5. Puisque $\mu^2 = g \star \mathbf{1}$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \mu(n)^2 &= \sum_{n \leq x} \sum_{d \mid n} g(d) = \sum_{d \leq x} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor g(d) \\
&= x \sum_{d \leq x} \frac{g(d)}{d} - \sum_{d \leq x} \left\{ \frac{x}{d} \right\} g(d) \\
&= x \sum_{m^2 \leq x} \frac{\mu(m)}{m^2} - \sum_{m^2 \leq x} \left\{ \frac{x}{m^2} \right\} \mu(m) \\
&= x \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mu(m)}{m^2} - R_1(x) - R_2(x)
\end{aligned}$$

avec

$$R_1(x) = x \sum_{m > \sqrt{x}}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^2} \quad \text{et} \quad R_2(x) = \sum_{m^2 \leq x} \left\{ \frac{x}{m^2} \right\} \mu(m)$$

On a évidemment $R_2(x) = O(\sqrt{x})$ et on a aussi

$$|R_1(x)| \leq x \sum_{m > \sqrt{x}} \frac{1}{m^2} = x O\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) = O(\sqrt{x}) .$$

Exercice 3.18

1. L'égalité $n = m^3 u^2$ est équivalente à

$$v_p(n) = 3 v_p(m) + 2 v_p(u). \tag{3.1}$$

Si de plus m est sans facteurs carrés $v_p(m) \in \{0, 1\}$. Il en résulte que $v_p(m) = 1$ si et seulement si $v_p(n)$ est impair. Ceci prouve que si une factorisation $n = m^3 u^2$ avec m sans facteur carré existe elle est unique et que m est l'unique entier défini par $v_p(m) = 1$ si $v_p(n)$ est impair, et 0 sinon. Réciproquement, soit m ainsi défini. Cet entier m est sans facteur carré, et $v_p(n) - v_p(m)$ est pair. Si on définit u par $v_p(u) = (v_p(m) - v_p(n))/2$ pour tout p, l'équation (3.1) est satisfaite.

2. Pour compter les entiers de S_x il suffit donc de compter pour chaque m sans facteur carré le nombre de valeurs de u, et cela donne immmédiatement la formule.

$$S_x = \sum_{m \le \sqrt[3]{x}} \mu(m)^2 \left\lfloor \sqrt{\frac{x}{m^3}} \right\rfloor = \sqrt{x} \sum_{m \le \sqrt[3]{x}} \frac{\mu(m)^2}{m^{3/2}} + O\left(x^{1/3}\right).$$

On écrit ensuite

$$\sqrt{x} \sum_{m \le \sqrt[3]{x}}^{\infty} \frac{\mu(m)^2}{m^{3/2}} = \sqrt{x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)^2}{m^{3/2}} - \sqrt{x} \sum_{m > \sqrt[3]{x}} \frac{\mu(m)^2}{m^{3/2}},$$

et en comparant à une intégrale on obtient

$$0 \le \sqrt{x} \sum_{m > \sqrt[3]{x}} \frac{\mu(m)^2}{m^{3/2}} \le \sqrt{x} \int_{\sqrt[3]{x}-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} = \sqrt{x}\, O\Big(x^{1/6}\Big) = O\Big(x^{1/3}\Big).$$

3. Puisque la série est absolument convergente on peut lui appliquer le théorème du produit eulérien ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu^2(m)}{m^{3/2}} &= \prod_p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^2(p^k)}{p^{3k/2}}\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{3/2}}\right) = \prod_p \frac{1 - \frac{1}{p^3}}{1 - \frac{1}{p^{3/2}}} = \frac{\zeta(3/2)}{\zeta 3}. \end{aligned}$$

Exercice 3.19

1. Soit $F\ [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ et $G(x) = \sum_{n \le x} F\left(\frac{x}{n}\right)$. La deuxième formule d'inversion de Möbius donne

$$F(x) = \sum_{n \le x} \mu(n) G\left(\frac{x}{n}\right)$$

Choisissons $F = \mathbf{1}$ ce qui donne $G(x) = [x]$. La formule ci–dessus devient

$$1 = \sum_{n \le x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor.$$

2. Par le 1. on a

$$1 = \sum_{n \le x} \mu(n) \frac{x}{n} - \sum_{n \le x} \mu(n) \left\{\frac{x}{n}\right\}$$

soit

$$x \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} = 1 + \sum_{n \le x} \mu(n) \left\{\frac{x}{n}\right\} = 1 + \{x\} + \sum_{2 \le n \le x} \frac{\mu(n)}{n}.$$

D'où

$$x \left| \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \le 1 + \{x\} + \lfloor x \rfloor - 1 = x.$$

Exercice 3.22

Utilisons la notation $p^a \| n$ pour exprimer que la plus grande puissance de p qui divise n est p^a. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(n)}{n} &= \prod_{p^a \| n} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^a}\right) \\ &\leq \prod_{p|n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{15}{8} < 2 \end{aligned}$$

si n a deux facteurs premiers impairs. Si $n = p$ est premier on a $\frac{\sigma(n)}{n} = 1 - \frac{1}{p} < 1$.

Exercice 3.25

Considérons la décomposition en facteurs premiers de $3n - 1 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$. Puisque les p_i sont congrus à ± 1 modulo 3, il existe un i tel que $p_i \equiv -1 \pmod 3$ avec a_i impair. On a alors

$$\sigma(p_i^{a_i}) \equiv (1 - 1) \cdots + (1 - 1) = 0 \pmod 3$$

et donc $\sigma(3n - 1) = \prod_{i=1}^{k} \sigma(p_i^{a_i}) \equiv 0 \pmod 3$.

Exercice 3.28

1. La somme à estimer est
$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p \log p} = \sum_{p \leq x} f(p)$$
avec $f(t) = \dfrac{1}{t \log t}$ et $f'(t) = -\dfrac{1 + \log t}{t^2 \log^2 t}$. La formule du cours
$$\sum_{p \leq x} f(p) = \pi(x) f(x) - \int_2^x \pi(t) f'(t) \, \mathrm{d}t$$
donne
$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p \log p} = \frac{\pi(x)}{x \log x} + \int_2^x \frac{\pi(t)(1 + \log t)}{t^2 \log^2 t} \, \mathrm{d}t. \tag{3.2}$$
Puisque $\pi(t) = O\left(\dfrac{t}{\log t}\right)$ on a
$$\frac{\pi(t)(1 + \log t)}{t^2 \log^2 t} = O\left(\frac{t \log t}{t^2 \log^3 t}\right) = O\left(\frac{1}{t \log^2 t}\right)$$
et puisque ces fonctions sont positives l'intégrale au second membre de (3.2) a une limite lorsque x tend vers l'infini. On fait donc tendre x vers l'infini dans (3.2) et, avec $\lim_{x \to +\infty} \pi(x)/(x \log x) = 0$ on obtient
$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p \log p} = \int_2^\infty \frac{\pi(t)(1 + \log t)}{t^2 \log^2 t} \, \mathrm{d}t.$$

2. Soit $x < y$. On a

$$\sum_{x<p\leq y} \frac{1}{p\log p} = \sum_{p\leq y} \frac{1}{p\log p} - \sum_{p\leq x} \frac{1}{p\log p}.$$

En remplaçant x par y dans (3.2) et en soustrayant (3.2) de l'égalité ainsi obtenue on obtient

$$\sum_{x<p\leq y} \frac{1}{p\log p} = \frac{\pi(y)}{y\log y} - \frac{\pi(x)}{\log(x)} + \int_x^y \frac{\pi(t)(1+\log t)}{t^2\log^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

On fait tendre y vers $+\infty$ dans cette égalité et il vient

$$R_x = \sum_{p>x} \frac{1}{p\log p} = \int_x^\infty \frac{\pi(t)(1+\log t)}{t^2\log^2 t}dt - \frac{\pi(x)}{x\log x}\cdot \tag{3.3}$$

Dans l'intégrale ci-dessus, la fonction à intégrer est positive et, par le théorème des nombres premiers, équivalente à $\dfrac{1}{t\log^2 t}$ quand t tend vers l'infini. Le théorème des équivalents pour les restes d'intégrales impropres de fonctions positives équivalentes donne

$$\int_x^\infty \frac{\pi(t)(1+\log t)}{t^2\log^2 t}dt \sim \int_x^\infty \frac{1}{t\log^2 t}dt = \frac{1}{\log x}\cdot$$

Avec (3.3) on en déduit

$$R_x = \frac{1}{\log x}\left(1 + o(1) - \frac{\pi(x)}{x}\right) \sim \frac{1}{\log x}\cdot$$

Exercice 3.29

Par le théorème des nombres premiers on a

$$n = \pi(p_n) \sim \frac{p_n}{\log p_n}\cdot$$

Il reste à montrer que $\log n \sim \log p_n$. On rappelle qu'en général $u_n \sim v_n$ n'implique pas $\log u_n \sim \log v_n$. Cependant cette implication est vraie si $u_n \to +\infty$, car

$$\log u_n = \log v_n + \log\frac{u_n}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{\log v_n}\log\frac{u_n}{v_n}\right)\log v_n$$

et la parenthèse tend vers 1 quand $n \to +\infty$. Avec $u_n = n$ et $v_n = n/\log p_n$ on obtient

$$\log n \sim \log\frac{p_n}{\log p_n} = \log p_n - \log\log p_n \sim \log p_n.$$

Exercice 3.31

Par le théorème des accroisements finis appliqué à la fonction $f : t \mapsto \log(1-t)$ sur l'intervalle $[0, x]$ il existe θ avec $0 < \theta < 1$ tel que

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2}\frac{x^2}{(1-\theta x)^2}.$$

Pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ on a $1 - \theta x > \frac{1}{2}$ et donc $0 \leq \frac{1}{2}\frac{x^2}{(1-\theta x)^2} \leq \frac{1}{2}\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \leq 2x^2$. En particulier pour tout nombre premier p on a

$$\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{p} - r_p \quad \text{avec} \quad 0 \leq r_p \leq \frac{2}{p^2}.$$

On en déduit que

$$\log \prod_{p \leq x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = -\sum_{p \leq x}\frac{1}{p} - \sum_{p \leq x} r_p$$

où la série $\sum_{p \leq x} r_p$ est convergente, c'est à dire

$$\log \prod_{p \leq x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = -\sum_{p \leq x}\frac{1}{p} - \sum_{p \in \mathcal{P}} r_p + o(1).$$

Avec l'estimation

$$\sum_{p \leq x}\frac{1}{p} = \log\log x + b + o\left(\frac{1}{\log\log x}\right)$$

cela donne

$$\log \prod_{p \leq x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = -\log\log x + c + o(1), \quad \text{avec} \quad c = b - \sum_{p \in \mathcal{P}} r_p.$$

Appliquant la fonction exponentielle aux deux membres il vient, en notant $C = \exp(c)$,

$$\prod_{p \leq x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{C}{\log x}\exp(o(1)) \sim \frac{C}{\log x}.$$

Exercice 3.33

Appliquons la méthode de sommation d'Abel. Allégeons les écritures en notant $k = \lfloor x \rfloor$, et, pour i entier $A_i = A(i)$ Alors

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq n \leq x} a_n f(n) &= A_1 f(1) + (A_2 - A_1) f(2) + \cdots + (A_k - A_{k-1}) f(k) \\ &= A_1(f(1) - f(2)) + A_2(f(2) - f(3)) + \cdots + A_{k-1}(f(k-1) - f(k)) + A_k f(k).\end{aligned}$$

On remarque que

$$A_i(f(i) - f(i+1)) = -\int_i^{i+1} A_t f'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq k-1,$$

que

$$A_k f(k) = A(x) f(x) - \int_k^x A(t) f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

et on ajoute membre à membre toutes ces égalités.
