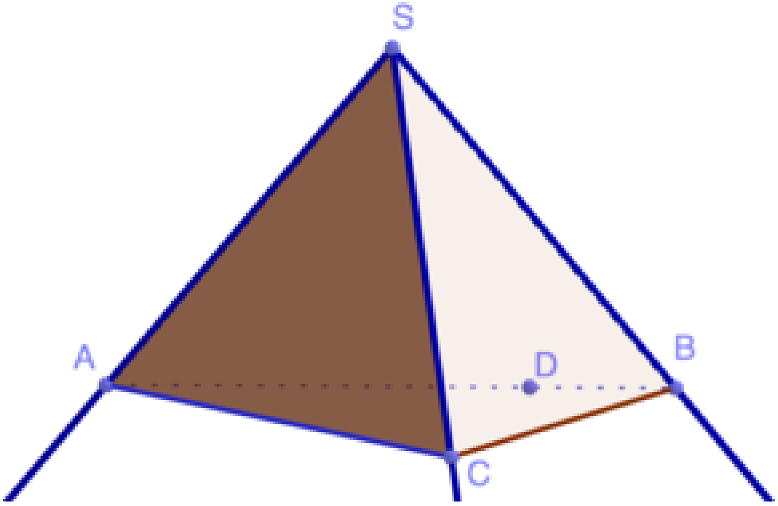
1 Inégalité triangulaire au sommet d'un tétraèdre

Proposition 1 *Chacun des trois angles issus d'un même sommet d'un tétraèdre est plus petit que la somme des deux autres.*

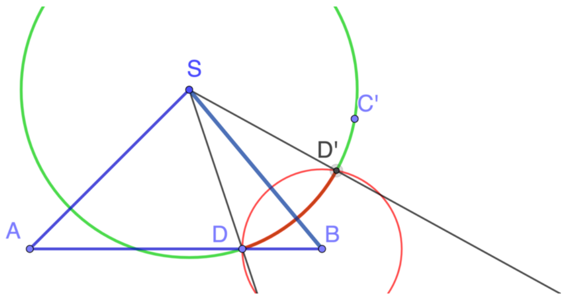


Preuve : Supposons que $\widehat{\mathrm{ASB}}$ soit le plus grand des trois angles issus de S. Alors $\widehat{\mathrm{ASC}} \leq \widehat{\mathrm{ASB}}$ et le point D sur la demi-droite AB tel que $\widehat{\mathrm{ASC}} = \widehat{\mathrm{ASD}}$ appartient au segment AB. En faisant glisser le point C sur la droite SC on ne change aucun des trois angles au sommet S. On peut donc supposer que SC = SD.

1. Les triangles ASC et ASD sont égaux car ils partagent un même côté AS, SC = SD et, par définition de D, $\widehat{\mathrm{ASD}} = \widehat{\mathrm{ASC}}$. Avec l'inégalité triangulaire on en déduit

   $$\mathrm{AD} + \mathrm{DB} = \mathrm{AB} < \mathrm{AC} + \mathrm{CB} = \mathrm{AD} + \mathrm{CB}$$

   et donc DB < CB.
2. Montrons maintenant que $\widehat{\mathrm{BSD}} < \widehat{\mathrm{BSC}}$. Pour comparer ces deux angles, réalisons une copie du triangle BCS en le faisant pivoter autour de la droite BS pour l'amener sur le triangle BC′S du plan ASB.



On a $\mathrm{SC}' = \mathrm{SC}$, et, puisque $\mathrm{SC} = \mathrm{SD}$, $\mathrm{SC}' = \mathrm{SD}$. Ainsi C' est sur le cercle (en vert) de centre S est de rayon SD. L'image de BC est BC'. Vu le point 1 cela donne $\mathrm{BC}' = \mathrm{BC} > \mathrm{BD}$. Ainsi C' est à l'extérieur du cercle (rouge) de centre B et de rayon BD et se trouve sur l'arc de cercle de couleur verte joignant D à D'. On a donc $\widehat{\mathrm{BSC}'} > \widehat{\mathrm{BSD}}$, et enfin $\widehat{\mathrm{BSC}} > \widehat{\mathrm{BSD}}$ puisque $\widehat{\mathrm{BSC}'} = \widehat{\mathrm{BSC}}$

3. Puisque $\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{D}, \mathrm{B}$ sont tous le même plan on a $\widehat{\mathrm{ASB}} = \widehat{\mathrm{ASD}} + \widehat{\mathrm{DSB}}$. Et puisque $\widehat{\mathrm{DSB}} < \widehat{\mathrm{CSB}}$.

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{ASB}} &= \widehat{\mathrm{ASD}} + \widehat{\mathrm{DSB}} = \widehat{\mathrm{ASC}} + \widehat{\mathrm{DSB}} \\ &< \widehat{\mathrm{ASC}} + \widehat{\mathrm{CSB}}\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la Proposition 1 $\square$