

SOUTENANCE
en vue d'obtenir

L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

délivrée par l'Ecole Normale Supérieure de Lyon

présentée et soutenue publiquement le 1er avril 2010

par **Monsieur DRUET Olivier**

Titre :

Stabilité et instabilité pour des EDP elliptiques issues de la géométrie

Après avis de :

Monsieur COLDING Tobias, rapporteur.

Monsieur GHOUSSOUB Nassif, membre / rapporteur.

Monsieur STRUWE Michael, membre / rapporteur.

Devant la Commission d'examen formée de :

Monsieur EKELAND Ivar, membre.

Monsieur GHOUSSOUB Nassif, membre / rapporteur.

Monsieur GHYS Étienne, membre.

Monsieur HEBEY Emmanuel, membre.

Monsieur STRUWE Michael, membre / rapporteur.

Monsieur VILLANI Cédric, membre.

N. d'ordre : 018.

**Stabilité et instabilité
pour des EDP elliptiques
issues de la géométrie**

Olivier DRUET

A la mémoire de mon père,

Remerciements

Tobias Colding, Nassif Ghoussoub et Michael Struwe ont accepté d'être rapporteurs de cette habilitation. Je leur exprime ici toute ma gratitude. Mes sincères remerciements vont également aux membres du jury, Ivar Ekeland, Nassif Ghoussoub, Étienne Ghys, Emmanuel Hebey, Michael Struwe et Cédric Villani.

Ces dernières années, j'ai passé la plus grande partie de mon temps à l'UMPA, lieu agréable s'il en est pour travailler. Je tiens à remercier tous les membres de ce laboratoire, passés et présents, pour avoir su créer cette atmosphère propice au travail sans exclure pour autant les moments de détente. Bien entendu, je pense à tous mes collègues mathématiciens avec qui j'ai pu avoir des discussions fort stimulantes mais aussi à Magalie, Virginia et Gérard sans qui le laboratoire ne serait sûrement pas ce qu'il est.

Je tiens également à remercier le Pacific Institute for Mathematical Sciences et tous ses membres d'alors pour m'avoir accueilli pendant une année à Vancouver, ville magnifique, année qui restera gravée dans ma mémoire pour longtemps.

Enfin, je remercie de tout mon cœur Stéphanie pour son soutien fidèle et sans failles au cours de toutes ces années.

Table des matières

Introduction	11
Chapitre 1. Inégalités de Sobolev et isopérimétriques optimales	15
1. Inégalités de Sobolev	15
1.1. Le programme AB	16
1.2. Inégalité de Poincaré-Sobolev	22
1.3. Inégalités de Trudinger-Moser	23
2. Inégalités isopérimétriques	25
Chapitre 2. Analyse asymptotique et quantification des niveaux d'explosion	29
1. Théorie asymptotique ponctuelle	31
1.1. Comment trouver les points de concentration ?	36
1.2. Un premier contrôle ponctuel de la suite	46
1.3. Hiérarchie des points de concentration et contrôle optimal	51
1.4. Asymptotique précise	52
1.5. Conclusion	52
2. Equations d'ordre 4	53
3. Quantification en dimension 2	58
3.1. Le premier point de concentration	61
3.2. Comment trouver d'autres points de concentration ?	63
3.3. Toute l'énergie a-t-elle été trouvée ?	66
3.4. Et après ?	67
4. Conclusion	67
Chapitre 3. Stabilité, instabilité et compacité	69
1. Compacité pour l'équation de Yamabe	69
1.1. Résolution du problème de Yamabe et questions de multiplicité	70
1.2. Compacité de l'ensemble des solutions	73
2. Stabilité et instabilité des équations de type Yamabe	74
2.1. Un résultat de stabilité forte	76
2.2. Lieux de M cause d'instabilité	81
2.3. Solutions cause d'instabilité	83
2.4. Borne sur l'énergie ou pas ?	83
2.5. Et si l'opérateur a un noyau ?	84

3. Les équations de contrainte en relativité générale	85
3.1. Les contraintes dans la théorie d'Einstein avec champ scalaire	85
3.2. Stabilité et instabilité de l'équation d'Einstein-Lichnerowicz	90
4. Les systèmes d'EDP elliptiques	91
Chapitre 4. Quelques problèmes d'EDP elliptiques euclidiennes	95
1. Le phénomène des petites dimensions	95
2. La conjecture de Lazer-McKenna	102
Liste des travaux effectués	107
Liste des travaux présents dans la thèse	107
Liste des travaux effectués depuis la thèse	108
Liste des travaux en cours de rédaction	109
Bibliographie	111

Introduction

Ce mémoire est consacré à la présentation de mes travaux de recherche, essentiellement ceux effectués depuis la fin de ma thèse. Il est toujours délicat de découper un ensemble de travaux nécessairement entremêlés en morceaux bien définis. J'ai néanmoins tenté de le faire, tout en sachant ce que cela présente d'artificiel. J'ai donc pris le parti de les séparer en quatre grands thèmes que je vais brièvement décrire dans cette introduction. Chaque chapitre comporte une introduction spécifique qui remet en perspective les travaux qui y sont présentés. Une liste des travaux effectués se trouve page 107. Ils sont référencés entre parenthèses dans ce mémoire tandis que les références entre crochets renvoient à la bibliographie globale présente à la fin de ce mémoire¹.

Le chapitre 1 traite essentiellement d'inégalités de Sobolev et d'inégalités isopérimétriques sur les variétés. Y sont également étudiées en détail des inégalités de type Sobolev, comme celles de Nash, de Poincaré-Sobolev, de Trudinger-Moser. Presque tous les travaux contenus dans ce chapitre ont été effectués durant ma thèse ou juste après et ne feront donc l'objet que d'un rapide survol. Y est prégnante l'étude de l'influence de la géométrie sur les inégalités de Sobolev optimales². Mais, en retour, l'étude des inégalités de Sobolev optimales peut donner des résultats de nature géométrique, en particulier en ce qui concerne les problèmes isopérimétriques. A ce titre, le théorème 1.6, page 26, est intéressant : il stipule qu'un domaine de petit diamètre dans une variété riemannienne (M, g) a un bord de volume plus grand que ne l'aurait la boule de même volume dans l'espace-modèle M_K simplement connexe de courbure constante K dès lors que la courbure scalaire de (M, g) est strictement inférieure à celle de M_K . En particulier, ce théorème donne un développement asymptotique au deuxième ordre du profil isopérimétrique d'une variété riemannienne compacte (voir page 27). Il donne également une version locale de la célèbre conjecture qui stipule qu'une variété complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle

1. Ainsi, (X) renvoie au travail référencé (X) dans la liste de mes travaux tandis que la référence [X] renvoie à la bibliographie générale.

2. cf. en particulier la figure 1, page 20, pour un résumé de ce phénomène sur les inégalités de Sobolev. Le théorème 1.3, page 22, qui concerne lui les inégalités de Poincaré-Sobolev, constitue également une illustration concise et frappante de l'influence de la géométrie et de la dimension sur des inégalités de type Sobolev optimales.

(dite variété de Cartan-Hadamard) devrait vérifier l'inégalité isopérimétrique euclidienne³. La preuve de ce résultat isopérimétrique local, qui améliore notablement des résultats antérieurs de Johnson et Morgan [95], repose sur une étude fine d'inégalités de Sobolev optimales associées à des espaces fonctionnels variables.

Les trois chapitres suivants portent, eux, sur des travaux plus récents.

Le chapitre 2 est consacré à une description générale mais précise des phénomènes de concentration qu'une suite de solutions d'équations aux dérivées partielles (E.D.P.) elliptiques peut développer. Les E.D.P. géométriques héritent des invariances géométriques des problèmes dont elles sont issues. Ces invariances rendent l'étude de ces E.D.P. délicate⁴ parce qu'elles induisent la plupart du temps des défauts de compacité. Malgré tout et en quelque sorte en retour, la signification géométrique sous-jacente de ces défauts de compacité permet de les classer, ou d'espérer pouvoir le faire. La première partie de ce chapitre est consacrée à une étude fine et précise de ces défauts de compacité sur un modèle simple - l'équation de type courbure scalaire prescrite. Les parties suivantes illustrent sur des exemples plus compliqués la méthode développée sur ce premier modèle.

Après avoir rappelé à propos de l'équation de type courbure scalaire prescrite les résultats classiques de quantification des niveaux d'énergie d'explosion et la description des défauts de compacité dans les espaces d'énergie adéquats, nous montrerons comment les décrire dans des espaces ponctuels. Si la théorie dans les espaces d'énergie remontent aux années 1980, dans notre cas précis aux travaux de Struwe [160], la théorie ponctuelle des défauts de compacité a été développée en collaboration avec E. Hebey et F. Robert en 2004 dans (18). Le résultat principal de ce chapitre est le théorème 2.1, page 34, qui décrit l'ensemble des solutions d'une famille d'équations de type courbure scalaire prescrite, y compris lorsque cet ensemble n'est pas pré-compact. Toute suite de solutions dans un tel ensemble est alors décrite comme somme de sa limite faible (qui appartient également à l'ensemble) et d'une somme de bulles standard (causes des défauts de compacité éventuels) à un reste près, négligeable dans C^0 . La preuve de ce théorème qui figure dans (18) étant longue et technique, nous avons tenté dans ce chapitre d'en donner les idées principales en omettant presque tous les "détails" techniques. Nous avons également clarifié le schéma de preuve initial, travail déjà entamé dans (27) et poursuivi dans ce mémoire.

Enfin, le reste de ce chapitre montrera que cette théorie ponctuelle s'applique à beaucoup d'autres équations, voire à des systèmes d'E.D.P. elliptiques (cf. (27)), même si nous nous sommes contentés de la mettre en place en détails seulement dans quelques cas. Nous expliquerons aussi pourquoi cette théorie ponctuelle, ou

3. Cette conjecture a été démontrée en dimension 2 par Weil [166], en dimension 3 par Kleiner [101] et en dimension 4 par Croke [49] par des méthodes à chaque fois spécifiques à la dimension considérée. Elle reste complètement ouverte en dimensions plus grandes.

4. Ces E.D.P. constituent souvent des cas limites d'équations classiques et simples à traiter.

plus exactement des idées issues de celle-ci, permettent d'obtenir des résultats de quantification pour des E.D.P. elliptiques avec des non-linéarités sauvages (comme des non-linéarités sur-exponentielles en dimension 2) ou d'ordre supérieur alors que les méthodes d'énergie étaient inopérantes.

Le chapitre 3 est central puisque c'est autour de lui que s'articulent les autres, le chapitre 2 en tant qu'outil et le chapitre 4 pour des exemples d'applications des notions qui y sont développées. Ce chapitre est consacré aux notions de stabilité et de compacité pour des E.D.P. elliptiques. Y sont décrits plusieurs résultats de stabilité et / ou d'instabilité et de compacité pour des E.D.P. elliptiques de type Yamabe, pour des systèmes d'E.D.P. elliptiques, pour les équations de contrainte de la relativité générale.

Pour une équation d'évolution, la stabilité est mesurée par rapport à des perturbations des données initiales ou de l'équation. L'équation - ou la solution - est dite stable lorsqu'une perturbation n'induit pas un grand changement de la solution. Il y a diverses manières de mesurer un tel changement et cela mène à diverses notions de stabilité⁵. Pour une E.D.P. elliptique, la stabilité est mesurée par rapport aux seules perturbations de l'équation. Une E.D.P. elliptique est dite stable si une légère perturbation de l'équation ne crée pas de solutions éloignées de toute solution de l'équation originale⁶. Cette notion, parente de celle de compacité, en est cependant différente. En particulier, l'ensemble des solutions d'une équation donnée peut être compact alors que l'équation est instable. C'est le cas par exemple de l'équation de Yamabe sur de nombreuses variétés riemanniennes compactes. Dans l'autre sens, rien n'est clair : "une équation peut-elle être stable tout en n'étant pas compacte ?" est une des nombreuses questions dont le chapitre 3 est émaillé. La notion de stabilité est particulièrement adaptée au suivi de l'ensemble des solutions le long d'une famille d'équations et est à ce titre extrêmement utile pour compter le nombre de solutions d'une équation (cf. par exemple le corollaire du théorème 3.3, page 90, dont l'énoncé se trouve à la suite du théorème).

Dans ce chapitre, nous étudions en détail ces questions de stabilité pour les équations de type Yamabe sur des variétés riemanniennes compactes (cf. théorème 3.1, page 76, et plus généralement la section 2). Nous passerons un certain temps à expliquer les diverses notions de stabilité car cette problématique nous semble en partie nouvelle en ce qui concerne les E.D.P. elliptiques. Nous verrons ainsi que l'équation géométrique, celle de Yamabe, est critique à bien des égards. Lorsqu'une telle équation est instable, nous analysons également avec précision les causes de cette instabilité. Nous décrivons également des résultats de stabilité pour des systèmes d'E.D.P. elliptiques (cf. théorème 3.4, page 93) et pour les équations de contrainte issues de la théorie d'Einstein avec champ scalaire (cf. théorème 3.3, page 90). Le cas des systèmes est intéressant car il nécessite de comprendre

5. La stabilité est une notion plurielle ; ce terme désigne plutôt un groupe de notions qu'une seule notion bien définie.

6. Nous renvoyons au chapitre 3 pour des définitions précises de diverses notions de stabilité.

précisément les interactions entre les lignes du système, qui présentent déjà à titre individuel des causes potentielles d'instabilité. Celui des équations de contrainte est intéressant car cette équation couple une non-linéarité critique du point de vue des injections de Sobolev - déjà présente dans les cas précédents - avec une non-linéarité en puissance négative. A chaque fois, des résultats relativement complets de stabilité et d'instabilité sont obtenus. Nous y verrons apparaître en particulier des phénomènes dimensionnels étudiés plus en détail dans le chapitre suivant.

Quant au chapitre 4, plus court, il réunit un certain nombre de résultats de non-existence de solutions à des EDP elliptiques euclidiennes. Si une équation ne possède pas de solutions et si elle est stable, alors aucune équation "proche" de celle-ci ne peut admettre de solutions. C'est cette idée qui se cache derrière l'ensemble des résultats de ce chapitre. Partant d'une équation qui ne possède pas de solutions pour des raisons évidentes, montrant qu'elle est stable, nous arrivons à démontrer des résultats de non-existence pour des équations proches ; résultats qui, eux, sont loin d'être évidents et qui sont très sensibles à la dimension de l'espace.

Ainsi, dans un travail en commun avec P. Laurain **(28)**, nous sommes revenus sur le maintenant classique phénomène dimensionnel en E.D.P. elliptiques. Nous jetons une nouvelle lumière sur celui-ci en démontrant que la célèbre obstruction de Pohožaev est stable en dimension 3 alors qu'elle ne l'est pas en dimensions plus grandes (cf. théorème 4.1, page 101).

Nous montrerons également que la conjecture de Lazer-McKenna dans le cas critique, si elle a été résolue affirmativement en grandes dimensions, est beaucoup plus subtile, voire fausse, en petites dimensions. La conjecture de Lazer-McKenna, très générale, stipule qu'une E.D.P. elliptique devrait posséder d'autant plus de solutions que sa partie non-linéaire interagit plus avec le spectre de l'opérateur (ici le laplacien). Nous en étudions un cas particulier qui a beaucoup attiré l'attention ces dernières années.

CHAPITRE 1

Inégalités de Sobolev et isopérimétriques optimales

Ce chapitre consiste en un bref résumé de quelques résultats contenus dans les travaux **(1)**-**(4)**, **(6)**-**(10)**, **(12)**, **(13)**, **(15)**, **(17)** et **(29)**. L'essentiel de ces travaux se trouvant dans ma thèse¹, le survol sera ici rapide. Ce chapitre introduit cependant certaines notions qui seront utilisées dans les parties suivantes de ce mémoire. Nous y traiterons d'inégalités de Sobolev optimales sur les variétés riemanniennes, d'existence de fonctions extrémales pour celles-ci et d'inégalités isopérimétriques locales. La référence **(9)** est un petit livre récapitulatif sur ce qu'Emmanuel Hebey a appelé le programme AB pour les inégalités de Sobolev riemanniennes.

1. Inégalités de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont un outil important d'analyse. Tant que ne sont concernées que des propriétés basiques de ceux-ci², passer de l'espace euclidien à une variété riemannienne ne pose pas de grosses difficultés, à condition de faire quelques hypothèses de géométrie bornée à l'infini. Pour ce qui est de propriétés plus fines telles que les inégalités optimales, elles aussi très utiles en analyse, les effets de la géométrie sont beaucoup plus importants. En première approximation, tout se passe au mieux en courbure négative tandis que la situation est plus compliquée en courbure positive.

Considérons (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 2$. Pour $p \geq 1$ un réel, l'espace $H_1^p(M)$ est la complétion de $C^\infty(M)$ pour la norme

$$\|u\|_{H_1^p} = \left(\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_M (|u|^p + |\nabla u|_g^p) dv_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cet espace est également l'espace des fonctions dans $L^p(M)$ dont le gradient (au sens des distributions) est dans $L^p(M)$, cf. [**129**]. Muni de la norme ci-dessus, c'est un espace de Banach. Les injections de Sobolev de premier type stipulent que $H_1^p(M) \subset L^{\frac{np}{n-p}}(M)$ dès que $1 \leq p < n$. Les injections de Sobolev de deuxième type concernent les espaces H_1^p pour $p > n$ qui s'injectent dans des espaces de fonctions continues et höldériennes. Dès que la variété riemannienne considérée est compacte, toutes ces injections sont valides, comme dans le cas euclidien. Sur

1. Seuls **(17)** et **(29)** n'y figurent pas, **(29)** étant de l'ordre de la remarque.

2. Complétude, existence d'injections, compacité de celles-ci, ...

les variétés complètes, quelques hypothèses de type "géométrie bornée à l'infini" sont nécessaires³. Ces injections sont en fait continues et sont donc accompagnées d'inégalités de Sobolev.

1.1. Le programme AB. Pour simplifier la discussion, nous ne considérerons que le cas des variétés compactes dorénavant. Ainsi $H_1^p(M) \subset L^{\frac{np}{n-p}}(M)$ et la continuité de cette injection fournit l'existence d'une constante C telle que

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leq C \|u\|_{H_1^p}$$

pour toute fonction $u \in H_1^p(M)$. Il est extrêmement intéressant de séparer la norme H_1^p en deux et de découpler la constante C dans l'inégalité ci-dessus en écrivant qu'il existe deux constantes A et B telles que

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leq A \|\nabla u\|_p + B \|u\|_p$$

pour toute fonction $u \in H_1^p(M)$. En effet, les deux constantes A et B jouent des rôles très différents. Munis de cette inégalité, nous pouvons nous intéresser aux meilleures constantes possibles dans celle-ci en posant

$$\alpha_p(M, g) = \inf \{A \text{ t.q. } \exists B \text{ t.q. l'inégalité ci-dessus soit valide}\}$$

et

$$\beta_p(M, g) = \inf \{B \text{ t.q. } \exists A \text{ t.q. l'inégalité ci-dessus soit valide}\} .$$

Par inégalité valide avec les constantes A et B , il faut entendre que l'inégalité a lieu avec ces deux constantes pour toute fonction $u \in H_1^p(M)$. Ces deux définitions ont la signification suivante. Pour la première, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B_\varepsilon > 0$ telle que

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leq (\alpha_p(M, g) + \varepsilon) \|\nabla u\|_p + B_\varepsilon \|u\|_p$$

pour toute fonction $u \in H_1^p(M)$ tandis que, pour toute constante $A < \alpha_p(M, g)$ et toute constante B , il existe une fonction u dans $H_1^p(M)$ telle que

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} > A \|\nabla u\|_p + B \|u\|_p .$$

Et de même, symétriquement, si priorité est donnée à la constante B . Les valeurs de ces deux constantes sont connues. La seconde est liée au volume de la variété riemannienne (M, g) . Elle vaut

$$\beta_p(M, g) = \text{Vol}_g(M)^{-\frac{1}{n}} .$$

La première ne dépend en fait pas de la variété considérée et vaut

$$\alpha_p(M, g) = K(n, p)$$

3. Pour tout ce qui concerne les propriétés basiques des espaces de Sobolev et leur passage, ou non, à des variétés riemanniennes complètes, nous renvoyons au détaillé [76] ou au plus court [82].

où

$$K(n, p)^{-p} = \inf_{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|_\xi^p dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{np}{n-p}} dx \right)^{\frac{n-p}{n}}}.$$

Ce résultat est dû à Aubin [10]. La valeur exacte de $K(n, p)$ a été trouvée par Aubin [10] et Talenti [162] - voir également le travail antérieur de Rosen [145] pour le cas $n = 3$ et $p = 2$ - en s'appuyant sur l'inégalité isopérimétrique et des travaux de Bliss [19]⁴. Ainsi

$$K(n, p) = \frac{1}{n} \left(\frac{n(p-1)}{n-p} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \Gamma\left(n+1-\frac{n}{p}\right) \omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

pour $p > 1$ où Γ est la fonction d'Euler et ω_{n-1} le volume de la sphère unité dans \mathbb{R}^n et

$$K(n, 1) = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{p \rightarrow 1} K(n, p).$$

De plus, l'infimum est atteint par les fonctions

$$\lambda \left(\mu + |x - x_0|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{1-\frac{n}{p}}$$

pour $p > 1$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et par les fonctions caractéristiques des boules⁵ pour $p = 1$.

Revenons à nos inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes. Vu les définitions des meilleures constantes, une question vient à l'esprit : dans ces définitions, l'infimum est-il atteint ? En d'autres termes, étant donné $1 \leq p < n$, existe-t-il une constante $B > 0$ telle que

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leq K(n, p) \|\nabla u\|_p + B \|u\|_p$$

pour toute fonction $u \in H_1^p(M)$? Existe-t-il une constante $A > 0$ telle que

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leq A \|\nabla u\|_p + Vol_g(M)^{-\frac{1}{n}} \|u\|_p$$

pour toute fonction $u \in H_1^p(M)$?

Une inégalité sans doute plus intéressante du point de vue des EDPs est celle qui donne l'existence de deux constantes A' et B' telles que

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}}^p \leq A' \|\nabla u\|_p^p + B' \|u\|_p^p$$

4. La preuve d'Aubin et Talenti s'appuie sur un processus de symétrisation qui permet, grâce à l'inégalité isopérimétrique, de se ramener au cas des fonctions radiales, qui avait été traité par Bliss dans les années 1930. Une preuve alternative basée sur le transport optimal a été proposée récemment par Cordero-Erausquin, Nazaret et Villani [45].

5. Il faut noter que l'inégalité de Sobolev pour $p = 1$ est en fait équivalente à l'inégalité isopérimétrique. Voir Federer-Fleming [65] et Fleming-Rishel [68] pour ce cas $p = 1$.

pour toute fonction $u \in H_1^p(M)$. Il n'est pas difficile de voir que les meilleures constantes dans cette inégalité sont $\alpha_p(M, g)^p$ et $\beta_p(M, g)^p$. Ainsi les questions juste posées s'étendent naturellement : étant donnés $1 \leq p < n$ et $\theta \geq 1$, existe-t-il une constante $B > 0$ telle que

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}}^\theta \leq K(n, p)^\theta \|\nabla u\|_p^\theta + B \|u\|_p^\theta \quad (I_p^\theta)$$

pour toute fonction $u \in H_1^p(M)$? Existe-t-il une constante $A > 0$ telle que

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}}^\theta \leq A \|\nabla u\|_p^\theta + Vol_g(M)^{-\frac{\theta}{n}} \|u\|_p^\theta \quad (J_p^\theta)$$

pour toute fonction $u \in H_1^p(M)$? Si c'est le cas, nous dirons respectivement que l'inégalité (I_p^θ) est valide - lorsque priorité est donnée à la première constante - et que l'inégalité (J_p^θ) est valide - lorsque priorité est donnée à la seconde constante.

Ces deux inégalités optimales sont tout-à-fait différentes et leur intérêt dépend du problème considéré. La première est particulièrement intéressante pour traiter des problèmes de défaut de compacité⁶, la seconde est particulièrement intéressante lorsque l'intérêt est porté sur les fonctions qui sont proches de constantes⁷.

Commençons par l'inégalité (J_p^θ) . Celle-ci est valide dès lors que $\theta = p$ et $1 \leq p \leq 2$ ou $\theta = 2$ et $2 \leq p < n$ mais ne l'est plus dès que $\theta > 2$ et $2 \leq p < n$, et ce pour toute variété de dimension n . Ce résultat simple se trouve dans **(9)**, théorèmes 8.11 et 8.12, pp. 90-94⁸. L'idée principale est de neutraliser les constantes pour prouver la validité en utilisant l'inégalité de Sobolev-Poincaré et au contraire de regarder ce qui se passe au voisinage des fonctions constantes pour invalider l'inégalité.

En ce qui concerne l'inégalité (I_p^θ) , de manière surprenante, tout dépend de la géométrie de la variété. Le résultat suivant résume un certain nombre de travaux :

THÉORÈME 1.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 2$. Alors*

(1) *Si $1 \leq p \leq 2$, l'inégalité (I_p^p) est valide. Si $2 < p < n$, l'inégalité (I_p^2) est valide.*

(2) *Si $2 < p < n$ et si la courbure scalaire de (M, g) est strictement positive quelque part, l'inégalité (I_p^θ) est fautive dès lors que $n > 3p - 2$ et $\theta > 2$.*

(3) *L'inégalité (I_p^p) est valide pour tout $2 < p < n$ dès lors que la courbure scalaire de la variété est strictement négative.*

6. En particulier parce que ces défauts de compacité sont de nature purement locale.

7. Il convient de remarquer que le cas d'égalité dans (J_p^θ) est nécessairement atteint pour les fonctions constantes, fonctions qui sont dans $H_1^p(M)$ lorsque la variété est compacte, ce qui n'est pas sans poser quelques problèmes en analyse. Par exemple, contrôler une fonction dans $H_1^p(M)$ demande de contrôler non seulement la norme L^p de son gradient mais également sa moyenne (comparer avec le cas des fonctions définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n avec conditions de Dirichlet au bord).

8. Dans le cas $p = 2$ et $\theta = 2$, la première preuve fut donnée par Bakry [13].

La question de la validité de l'inégalité (I_p^θ) remonte aux travaux d'Aubin [10]. Dans ce papier, Aubin démontre que l'inégalité (I_p^p) pour $1 \leq p \leq 2$ et $(I_p^{\frac{p}{p-1}})$ pour $2 < p < n$ est vraie sur la sphère standard. Il conjecture alors que cela devrait être vrai sur toute variété riemannienne compacte. En 1995, Hebey et Vaugon [83], [84], démontrèrent cette conjecture dans le cas $p = 2$, $\theta = 2$. On s'attendait alors à ce qu'en fait, l'inégalité (I_p^p) soit valide sur toute variété riemannienne compacte et pour tout $1 \leq p < n$. Mais la situation s'est révélée plus intéressante. En particulier, dans (1), nous avons montré que cette inégalité n'était pas valide dès lors que la courbure scalaire de la variété était strictement positive quelque part moyennant quelques restrictions dimensionnelles (cf. point (2) du théorème⁹). Ensuite la conjecture d'Aubin fut démontrée et même améliorée par Aubin-Li [11] et moi-même (3) dans des travaux indépendants (cf. point (1) du théorème). Enfin, le point (3) est une conséquence d'un lemme de localisation¹⁰ que j'avais montré dans (1) (cf. (9) ou [77] pour un énoncé précis de celui-ci) et du résultat de nature isopérimétrique démontré dans (12) (cf. section 2).

Ce groupe de résultats amène quelques commentaires : d'abord, il y a visiblement une rupture dans l'échelle des inégalités optimales. L'exposant 2 joue un rôle particulier. Pour $p > 2$, l'inégalité (I_p^2) est toujours valide et la géométrie n'intervient pas¹¹. Ensuite, il y a une différence entre courbure négative et courbure positive, sachant que c'est la courbure scalaire qui a la part belle dans cette affaire. En courbure scalaire négative, toute l'échelle des inégalités (tant que $\theta \leq p$) est valide. Dès que la courbure scalaire est strictement positive quelque part¹², les inégalités ne sont pas valides (même localement) pour $\theta > 2$. Ce dernier résultat est à nuancer puisque des restrictions dimensionnelles apparaissent. C'est la dernière rupture dont il faut parler : la rupture dimensionnelle. Même si cela n'est pas flagrant sur ce groupe précis de résultats (sauf sur le point (2)), la dimension joue un rôle non négligeable dans l'histoire et les phénomènes ont tendance à être différents (de nature moins locale) en petites dimensions¹³. Nous verrons des exemples plus frappants de cette rupture dimensionnelle un peu plus bas. Un bon résumé du théorème se trouve dans le dessin ci-dessous (fig. 1) :

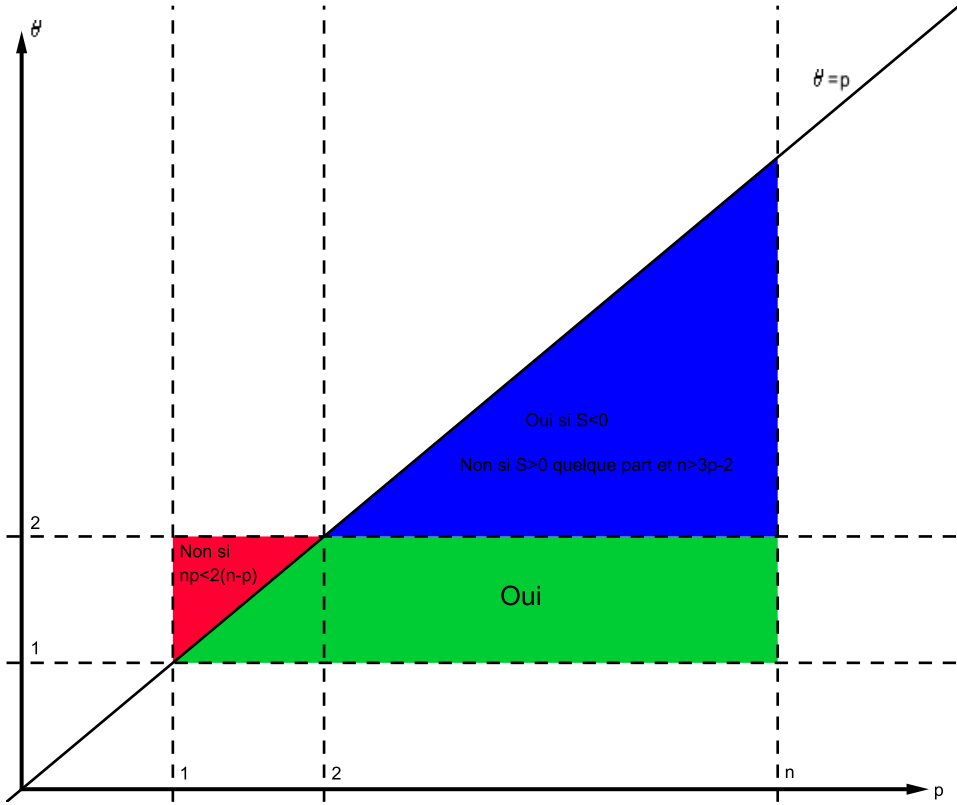
9. La restriction dimensionnelle était $n > p^2$ dans (1) mais la preuve s'étend facilement à $n > 3p - 2$.

10. qui stipule que l'inégalité (I_p^p) est valide si et seulement si elle est valide pour des fonctions à support compact dans des petites boules autour de chaque point de la variété.

11. Toujours pour $\theta = 2$ mais pour $p < 2$, Yaxin Peng a démontré dans sa thèse [136] que l'inégalité (I_p^2) était toujours valide localement, moyennant quelques restrictions dimensionnelles peu importantes mais que, par contre, le passage du local au global n'a plus lieu (en fait pour $\theta > p$) et l'inégalité n'est pas valide globalement dès lors que $\frac{np}{n-p} < 2$.

12. Pour des résultats lorsque la courbure scalaire est nulle, cf. le survol (9).

13. "Petites" dépendant de p .

Fig. 1 : Validité de (I_p^θ)

Pour en finir avec ces inégalités de Sobolev optimales, décrivons brièvement les résultats connus en ce qui concerne l'existence de fonctions extrémales. Pour discuter cette question, nous ne considérerons que le cas $p = 2$, $\theta = 2$, et renvoyons à (9) pour des résultats plus généraux. L'inégalité optimale (I_2^2) étant valide, nous pouvons fixer la première constante égale à $K(n, 2)^2$ et prendre pour deuxième constante la plus petite possible une fois la première fixée, constante que nous appellerons $B_0(g)$. Nous arrivons alors à l'inégalité totalement optimale suivante :

$$\|u\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leq K(n, 2)^2 \|\nabla u\|_2^2 + B_0(g) \|u\|_2^2 \quad (I_{OPT})$$

pour toute fonction $u \in H_1^2(M)$. Si la dépendance en la métrique est explicitée dans la notation $B_0(g)$, c'est que cette constante va dépendre de la géométrie de la variété. En particulier, $B_0(g) \geq Vol_g(M)^{-\frac{2}{n}}$, ce qui s'obtient en prenant $u \equiv 1$ dans l'inégalité. Mais également, des calculs de fonctions-tests à la Aubin et à la Schoen permettent de montrer que

$$B_0(g) \geq \frac{n-2}{4(n-1)} K(n, 2)^2 \max_M S_g$$

dès que $n \geq 4$ et que

$$\max_{x \in M} M_{B_0(g)}(x) \leq 0$$

quand $n = 3$ où M_B est la masse de la fonction de Green¹⁴ de l'opérateur $\Delta_g + B$. En dimensions $n \geq 4$, ce résultat est dû à Hebey [76] mais repose sur des calculs à la Aubin [9]. En dimension $n = 3$, c'est démontré dans (13) en s'appuyant sur des calculs faits par Schoen [153]. Une fois devant cette inégalité totalement optimale, nous pouvons nous poser la question suivante : le cas d'égalité est-il atteint ? En d'autres termes, existe-t-il des fonctions extrémales pour l'inégalité optimale (I_{OPT}) ? Le cas $n = 4$ du théorème suivant a été démontré dans (7) tandis que le cas $n = 3$ a été traité dans (13) :

THÉORÈME 1.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Alors, si l'inégalité (I_{OPT}) n'admet pas de fonctions extrémales,*

$$B_0(g) = \frac{n-2}{4(n-1)} K(n, 2)^2 \max_M S_g$$

si $n \geq 4$ et $B_0(g)$ est tel que

$$\max_{x \in M} M_{B_0(g)}(x) = 0$$

si $n = 3$, ce qui le caractérise de manière unique.

Le théorème est de nature locale en dimensions $n \geq 4$ (perturber la métrique en un endroit où la courbure scalaire n'est pas maximale ne change rien à l'affaire) et de nature globale en dimension 3. Voici une illustration de la rupture dimensionnelle citée plus haut. Ce résultat a été étendu à la notion de fonction critique, qui remplace $B_0(g)$, en dimensions $n \geq 4$ par [85] (cf. aussi [43, 94]). Dans le cas $n = 3$, cette extension se trouve dans (13).

A titre de remarque, et en utilisant les travaux de Aubin [9] et de Schoen [153], un corollaire de ce résultat est qu'il existe des fonctions extrémales pour (I_{OPT}) dès que la courbure scalaire de la variété est constante. Comme, dans toute classe conforme, il existe une métrique à courbure scalaire constante¹⁵, il existe dans toute classe conforme une métrique g pour laquelle (I_{OPT}) admet au moins une fonction extrémale u (strictement positive). La métrique $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ est alors telle que $B_0(\tilde{g}) = Vol_{\tilde{g}}(M)^{-\frac{2}{n}}$. Il est assez surprenant de voir que, dans toute classe conforme, il existe une métrique pour laquelle l'inégalité de Sobolev est valable avec ses deux meilleures constantes α_2^2 et β_2^2 . C'est d'autant plus étrange qu'il était plutôt attendu que ce soit une caractéristique de la sphère standard¹⁶.

14. En dimension 3, la fonction de Green de $\Delta_g + B$ peut s'écrire $\frac{1}{\omega_2 d_g(x,y)} + \beta(x, y)$ avec $\beta \in C^0(M \times M)$. La masse de la fonction de Green au point x est $M_B(x) = \beta(x, x)$.

15. C'est la résolution du problème de Yamabe qui le donne (cf. section 1 du chapitre 3).

16. Peut-être que c'est une caractéristique de la sphère standard dans le monde des variétés à courbure de Ricci (strictement) positive mais rien n'est moins sûr. Toujours est-il que le résultat ci-dessus ne donne aucun contrôle sur la courbure des métriques qui ont cette propriété.

Remarque : cette métrique pour laquelle cette inégalité a lieu vérifie que la première valeur propre de son laplacien est supérieure ou égale à celle de la sphère standard (après normalisation

De nombreux travaux ont ensuite repris les idées de ce programme AB et mis en évidence les phénomènes dimensionnel et de courbure (i.e. courbure négative vs courbure positive et rôle de la dimension) sur d'autres inégalités optimales : inégalité de Nash (cf. (4) mais aussi [90, 91, 92, 93, 147]), inégalité de Gagliardo-Nirenberg (cf. [29, 35, 167, 168]), inégalité de Poincaré-Sobolev (cf. (6), (15) mais aussi [78, 175, 176]), inégalité de Hardy-Sobolev (cf. [70]), inégalité de Sobolev en dimension 2 et inégalité de Trudinger-Moser (cf. (17) mais aussi [63, 64, 111, 112, 170, 171, 172, 173, 174]), inégalité de Sobolev à trace (cf. [66, 67, 146]), inégalité de Sobolev d'ordre supérieur (cf. [18, 48, 79]), inégalité de Sobolev en présence de symétries (cf. [60, 61, 62]), inégalité de Sobolev tordue ou sur des produits (cf. [34, 44]), inégalité de Sobolev vectorielle (cf. [80]). La liste ci-dessus n'est sans doute pas exhaustive mais reflète les connaissances de l'auteur à l'heure actuelle.

1.2. Inégalité de Poincaré-Sobolev. Cette courte sous-section est consacrée à l'inégalité de Poincaré-Sobolev optimale que nous avons étudiée avec E. Hebey et M. Vaugon dans (6). Sur cette inégalité, et en se contentant de questions de validité, apparaissent clairement les phénomènes dimensionnel et de courbure. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Il existe A et B deux constantes telles que

$$\|u\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leq A \|\nabla u\|_2^2 + B \|u\|_1^2$$

pour toute fonction $u \in H_1^2(M)$. C'est une inégalité du type Poincaré-Sobolev : elle permet un contrôle de la norme $L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$ par la norme L^2 de son gradient et sa norme L^1 (ce qui est juste un petit peu plus fort que sa moyenne). La meilleure première constante dans cette inégalité est bien entendu $K(n, 2)^2$. Existe-t-il une constante $B > 0$ telle que

$$\|u\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leq K(n, 2)^2 \|\nabla u\|_2^2 + B \|u\|_1^2$$

pour toute fonction $u \in H_1^2(M)$? Si c'est le cas, nous dirons que l'inégalité de Poincaré-Sobolev optimale est valide. Le résultat suivant est tiré de (6), aidé de l'inégalité isopérimétrique locale de (12) pour le deuxième point :

THÉORÈME 1.3. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Alors :*

- (i) *L'inégalité de Poincaré-Sobolev optimale est valide si $n = 3$.*
- (ii) *L'inégalité de Poincaré-Sobolev optimale est valide si $n \geq 4$ et $S_g < 0$ sur M .*
- (iii) *L'inégalité de Poincaré-Sobolev optimale n'est pas valide dès que $n \geq 4$ et $S_g > 0$ quelque part sur M .*

de volume). Il suffit de rentrer la fonction $1 + \varepsilon u$ avec u de moyenne nulle dans l'inégalité et de faire un développement limité quand $\varepsilon \rightarrow 0$ pour le voir.

Nous voyons dans ce résultat apparaître très clairement un phénomène dimensionnel (la validité est vraie en dimension 3 sans hypothèses supplémentaires) et un phénomène de courbure (validité en courbure scalaire négative / non-validité en courbure scalaire positive). Lorsque $n \geq 4$ et $\max_M S_g > 0$, la meilleure inégalité possible pour A proche de $K(n, 2)^2$ a été trouvée dans **(15)**. Notons B_ε la plus petite constante possible pour que l'inégalité

$$\|u\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leq (K(n, 2)^2 + \varepsilon) \|\nabla u\|_2^2 + B_\varepsilon \|u\|_1^2$$

ait lieu pour toute fonction $u \in H_1^2(M)$. Si $n \geq 4$ et $\max_M S_g > 0$, elle se doit de tendre vers $+\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. L'estimée

$$B_\varepsilon = \begin{cases} \left(\frac{K(4, 2)^2}{2304\omega_3} \left(\max_M S_g \right)^3 + o(1) \right) |\ln \varepsilon|^3 & \text{si } n = 4 \\ \left(C(n) \left(\max_M S_g \right)^{\frac{n+2}{2}} + o(1) \right) \varepsilon^{-\frac{(n-4)(n+2)}{2(n-2)}} & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

avec

$$C(n) = \frac{2n(n+2)\omega_n^{\frac{2(n+2)}{n}} K(n, 2)^{\frac{n^2-12}{n-2}}}{(4^{n-3}n(n-2)(n-4))^{\frac{n+2}{n-2}} \omega_{n-1}^{\frac{2n}{n-2}}}$$

pour $n \geq 5$ a été dérivée d'une analyse asymptotique très fine dans **(15)**.

1.3. Inégalités de Trudinger-Moser. Le travail **(17)**, écrit en collaboration avec Adimurthi, étant le seul de cette section à avoir été rédigé après la thèse, nous allons le décrire maintenant. Le cadre en est euclidien et 2-dimensionnel. Considérons Ω un ouvert lisse et borné de \mathbb{R}^2 . L'espace $H_0^1(\Omega)$ des fonctions nulles sur le bord dont le gradient est dans $L^2(\Omega)$ s'injecte en dimension 2 dans tous les espaces $L^p(\Omega)$ de manière compacte. Mais en fait, un contrôle de la norme L^2 du gradient de u donne beaucoup plus qu'un contrôle des normes L^p de u . En effet, toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie que e^{u^2} est dans tous les $L^p(\Omega)$. Mais les normes L^p de e^{u^2} ne sont pas toutes uniformément contrôlées par la norme L^2 du gradient de u . L'inégalité de Trudinger-Moser stipule que

$$C(\Omega) = \sup_{u \in H_0^1(\Omega)} \int_{\Omega} e^{4\pi \frac{u^2}{\|\nabla u\|_2^2}} dx < +\infty.$$

Cette inégalité est due à Trudinger [163] et Moser [130]. Trudinger en avait démontré une forme non optimale. C'est Moser qui a démontré que la constante 4π dans l'exponentielle était optimale. Le supremum n'est en particulier plus fini si cette constante 4π est remplacée par une constante plus grande.

Etant donnée une suite (u_i) de fonctions non-nulles dans $H_0^1(\Omega)$ normalisées par $\|\nabla u_i\|_2 = 1$, Lions [121] a démontré que

$$\limsup_{i \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} e^{4\pi u_i^2} dx < +\infty$$

pour tout $p < \frac{1}{1 - \|\nabla u_0\|_2^2}$ si $u_i \rightharpoonup u_0$ faiblement dans $H_1^0(\Omega)$ quand $i \rightarrow +\infty$. Ce résultat donne plus d'informations que l'inégalité de Trudinger-Moser lorsque la suite (u_i) converge faiblement vers une limite u_0 non-nulle. Dans (17), nous avons cherché des extensions de l'inégalité de Trudinger-Moser qui donne des informations même lorsque la suite (u_i) converge faiblement vers 0. Nous avons étudié la constante

$$C_\alpha(\Omega) = \sup_{u \in H_1^0(\Omega)} \int_{\Omega} e^{4\pi \left(1 + \alpha \frac{\|u\|_2^2}{\|\nabla u\|_2^2}\right) \frac{u^2}{\|\nabla u\|_2^2}} dx$$

pour $\alpha > 0$. Le résultat obtenu dans (17) est le suivant :

THÉORÈME 1.4. *Soit Ω un ouvert borné lisse de \mathbb{R}^2 . Alors $C_\alpha(\Omega) < +\infty$ si et seulement si $\alpha < \lambda_1(\Omega)$ où $\lambda_1(\Omega)$ est la première valeur propre du laplacien sur Ω avec condition de Dirichlet au bord.*

Ce résultat est d'une nature différente mais assez complémentaire de celui de Lions [121]. En effet, lorsque la suite (u_i) converge faiblement vers une limite faible non-nulle, notre résultat est une conséquence de celui de Lions. Par contre, dès que la suite (u_i) converge faiblement vers 0, notre résultat est plus précis que l'inégalité de Trudinger-Moser, le résultat de Lions ne fournissant aucune information supplémentaire par rapport à celle-ci dans ce cas.

Le fait que $C_\alpha(\Omega) = +\infty$ pour tout $\alpha \geq \lambda_1(\Omega)$ est obtenu par un calcul de fonctions-tests inspiré de Moser [130]. Par invariance d'échelle de l'inégalité et à translation près, il n'est pas difficile de se ramener au cas où la boule unité centrée en 0 est contenue dans Ω . Quelques calculs donnent alors que

$$\int_{\Omega} e^{4\pi \left(1 + \lambda_1(\Omega) \frac{\|u_\varepsilon\|_2^2}{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2}\right) \frac{u_\varepsilon^2}{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2}} dx \rightarrow +\infty \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

où

$$u_\varepsilon = \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{3}} u_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}} & \text{pour } 0 \leq |x| \leq \varepsilon \\ \frac{\ln \frac{1}{|x|}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} & \text{pour } \varepsilon \leq |x| \leq 1 \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 1 \end{cases}$$

avec u_0 la fonction propre strictement positive normalisée par $\|u_0\|_2 = 1$ associée à $\lambda_1(\Omega)$.

Le fait que $C_\alpha(\Omega)$ est fini pour tout $\alpha < \lambda_1(\Omega)$ découle, par l'intermédiaire d'un raisonnement par l'absurde, d'une analyse asymptotique fine et particulièrement délicate de suites de solutions d'EDP avec une non-linéarité en e^{u^2} . Nous renvoyons

à la section 3 du chapitre 2 pour quelques détails et précisions concernant cette analyse asymptotique.

2. Inégalités isopérimétriques

Le cas limite $p = 1$ des inégalités de Sobolev est en fait équivalent à une inégalité isopérimétrique. Une inégalité de Sobolev qui stipule que

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leq A \|\nabla u\|_1 + B \|u\|_1$$

pour toute fonction u régulière entraîne une inégalité isopérimétrique qui stipule que

$$Vol_g(\Omega)^{\frac{n-1}{n}} \leq AVol_g(\partial\Omega) + BVol_g(\Omega)$$

pour tout domaine Ω lisse (ou même de périmètre fini). Il suffit de remarquer que la fonction caractéristique d'un tel domaine peut-être approchée par des fonctions lisses, d'appliquer à ces fonctions lisses l'inégalité de Sobolev et de passer à la limite dans celle-ci. La réciproque est également vraie, même si plus subtile : l'inégalité isopérimétrique entraîne l'inégalité de Sobolev correspondant au plongement de H_1^1 dans $L^{\frac{n}{n-1}}$. C'est une conséquence de la formule de la co-aire (cf. Chavel [37] par exemple).

Remarquons tout d'abord que, sur n'importe quelle variété riemannienne complète de dimension $n \geq 2$, l'existence d'une inégalité de Sobolev H_1^1 (ou, de manière équivalente, d'un plongement continu de $H_1^1(M)$ dans $L^{\frac{n}{n-1}}(M)$), i.e. d'une inégalité isopérimétrique du type de celle ci-dessus, entraîne l'existence d'une inégalité de Sobolev H_1^p (ou, de manière équivalente, d'un plongement continu de $H_1^p(M)$ dans $L^{\frac{np}{n-p}}(M)$) pour tout $1 \leq p < n$. Grâce à la formule de la co-aire, ceci est encore vrai pour les inégalités optimales. Une inégalité isopérimétrique optimale entraîne des inégalités de Sobolev optimales (en un sens à préciser). Mais l'inverse est vrai : des inégalités de Sobolev optimales pour tout $p > 1$ entraîne une inégalité isopérimétrique optimale par passage à la limite $p \rightarrow 1$ (ce passage à la limite devant être justifié). C'est l'idée principale qui est derrière cette section. Reste à la mettre en œuvre. Par exemple, cela permet d'obtenir le résultat suivant, démontré dans (10) :

THÉORÈME 1.5. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 2$. Il existe une constante $B(g) > 0$ telle que*

$$Vol_g(\Omega)^{\frac{n-1}{n}} \leq K(n, 1) Vol_g(\partial\Omega) + B(g) Vol_g(\Omega)$$

pour tout domaine régulier de M . De plus, il existe un domaine extrémal (réalisant le cas d'égalité dans l'inégalité ci-dessus), i.e. un domaine Ω de M connexe qui, s'il n'est pas M tout entier, a un bord lisse en-dehors d'un sous-ensemble de dimension de Hausdorff au plus $n - 8$ et de courbure moyenne

$$H = \left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{\frac{1}{n}} Vol_g(\Omega)^{-\frac{1}{n}} - \frac{B(g)}{n-1}$$

en ses points réguliers.

Il faut ici rappeler que $K(n, 1)$ est la constante apparaissant dans l'inégalité isopérimétrique euclidienne

$$\text{Vol}_\xi(\Omega)^{\frac{n-1}{n}} \leq K(n, 1) \text{Vol}_\xi(\partial\Omega) .$$

Ainsi, le cas d'égalité étant atteint pour les boules de l'espace euclidien,

$$K(n, 1) = \frac{\text{Vol}_\xi(B)^{\frac{n-1}{n}}}{\text{Vol}_\xi(\partial B)} = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n}} .$$

Une preuve de l'inégalité isopérimétrique se basant sur l'équivalence entre celle-ci et une inégalité H_1^1 , a été donnée par Gromov [72] (voir [37]). Pour un historique sur les inégalités isopérimétriques, le lecteur pourra consulter l'excellent survol d'Osserman [132] et, pour une liste de preuves de celles-ci en dimension 2, Burago-Zalgaller [30].

Comme pour les inégalités de Sobolev, l'inégalité isopérimétrique est censée mieux se comporter en courbure négative qu'en courbure positive. En particulier, une célèbre conjecture¹⁷ stipule que l'inégalité isopérimétrique euclidienne devrait être vraie sur toute variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle (dite variété de Cartan-Hadamard). Cette conjecture a été démontrée par trois méthodes tout-à-fait différentes les unes des autres en dimension 2 par Weil [166], en dimension 3 par Kleiner [101] et en dimension 4 par Croke [49]. Elle reste ouverte en dimensions supérieures.

Néanmoins, une version locale de cette conjecture a été démontrée dans (12). Nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 1.6. *Soit (M, g) une variété riemannienne complète. Soit $x \in M$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que*

$$\text{Vol}_g(\partial\Omega) \geq \text{Vol}_{g_{K+\varepsilon}}(\partial B)$$

pour tout domaine lisse Ω contenu dans la boule de centre x et de rayon δ_ε où (M_K, g_K) est la variété complète simplement connexe de courbure sectionnelle K et B est une boule de cet espace de volume le volume de Ω dans (M, g) et où $K = \frac{S_g(x)}{n(n-1)}$.

En particulier, si $S_g(x) < 0$, alors les domaines contenus dans une boule de rayon suffisamment petit vérifie l'inégalité isopérimétrique euclidienne. Comme corollaire de ce théorème, nous avons dans le cadre compact le résultat suivant :

17. Difficile de dire à qui elle remonte exactement. Elle se trouve en tout cas explicitement dans [10].

COROLLAIRE 1.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de courbure scalaire $S_g < n(n-1)K$. Il existe $V > 0$ tel que tout domaine lisse Ω de M de volume inférieur ou égal à V vérifie*

$$Vol_g(\partial\Omega) \geq Vol_{g_K}(\partial B)$$

où B est une boule de l'espace-modèle (M_k, g_K) telle que $Vol_{g_K}(B) = Vol_g(\Omega)$.

Ce corollaire avait été démontré par des techniques totalement différentes¹⁸ sous une hypothèse beaucoup plus forte par Johnson et Morgan [95]. Dans ce papier, ils démontreraient le même résultat sous l'hypothèse $K_g < K$. En fait, à un niveau local, ce n'est pas la courbure sectionnelle qui joue un rôle mais la courbure scalaire. Par contre, si la condition $S_g < n(n-1)K$ est remplacée par $S_g \leq n(n-1)K$, le résultat devient faux. En fait, il devient même faux sous l'hypothèse $Ric_g \leq (n-1)K$. Si l'hypothèse faite sur la courbure est large, il est nécessaire de faire une hypothèse sur la courbure sectionnelle. De même, un résultat de nature plus globale demandera certainement une hypothèse sur la courbure sectionnelle.

Le théorème ci-dessus est démontré en passant par des inégalités de Sobolev H_1^p locales optimales pour p tendant vers 1, illustrant la remarque faite plus haut. L'utilisation d'outils d'analyse asymptotique permet d'être plus fin - et d'aller chercher la courbure scalaire - qu'avec les outils de théorie de la mesure géométrique de [95].

A titre de remarque, ce résultat donne un développement limité au deuxième ordre du profil isopérimétrique de toute variété riemannienne compacte. Le profil isopérimétrique est défini par

$$I_g(V) = \inf_{\Omega \subset M, Vol_g(\Omega)=V} Vol_g(\partial\Omega)$$

et il vérifie donc pour V petit

$$I_g(V) = K(n, 1)^{-1} V^{\frac{n-1}{n}} \left(1 - \frac{n}{2(n+2)} K(n, 1)^2 \left(\max_M S_g \right) V^{\frac{2}{n}} + o\left(V^{\frac{2}{n}}\right) \right)$$

sur toute variété riemannienne compacte. Jusqu'au deuxième ordre, le profil isopérimétrique de (M, g) est celui de la variété modèle de courbure sectionnelle constante $\frac{1}{n(n-1)} \max_M S_g$.

Enfin, grâce au lien bien connu entre profil de Faber-Krahn et profil isopérimétrique, il est simple d'en déduire un développement limité du profil de Faber-Krahn d'une variété riemannienne compacte (voir (29)). Le profil de Faber-Krahn d'une variété riemannienne compacte (M, g) est défini par

$$FK_g(V) = \inf_{\Omega \subset M, Vol_g(\Omega)=V} \lambda_1(\Omega)$$

18. Techniques de théorie de la mesure géométrique qui ne leur permettaient pas, entre autres, de traiter le cas des domaines de petit diamètre du théorème précédent.

où $\lambda_1(\Omega)$ est la première valeur propre du laplacien avec condition de Dirichlet au bord dans Ω . Ce profil vérifie

$$FK_g(V) = \mu_1 \left(\frac{n}{\omega_{n-1}} V \right)^{-\frac{2}{n}} - \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu_1}{3n(n+2)} \right) \max_M S_g + o(1)$$

où μ_1 est la première valeur propre du laplacien euclidien sur la boule unité avec condition de Dirichlet au bord. Ce profil est donc, jusqu'au deuxième ordre, celui de la variété modèle de courbure sectionnelle $\frac{1}{n(n-1)} \max_M S_g$. Il faut remarquer ici que l'existence de domaines atteignant l'infimum dans la définition du profil de Faber-Krahn est une question ouverte (à la connaissance de l'auteur) alors qu'il en existe pour le profil isopérimétrique (cf. Almgren [6]). Des domaines extrémaux, c'est-à-dire critiques pour la fonctionnelle $\lambda_1(\Omega)$ pour des variations préservant le volume, ont été construits dans Pacard-Sicbaldi [133]. Ces auteurs obtiennent des domaines extrémaux qui ressemblent à des petites boules autour de tout point critique non-dégénéré de la courbure scalaire. Les domaines minimisant pour le profil de Faber-Krahn de petit volume, s'ils existent, devraient donc se concentrer autour d'un point de maximum de la courbure scalaire, vu le résultat ci-dessus, et être en fait ceux construits dans [133].

CHAPITRE 2

Analyse asymptotique et quantification des niveaux d'explosion

Ce chapitre concerne les travaux **(18)**, **(22)** et **(23)**. Ces trois papiers traitent de défaut de compacité dans des EDP elliptiques avec non-linéarité critique et classifient les singularités pouvant apparaître de manière précise. Cela conduit à des résultats de quantification de niveaux d'explosion et à une description fine du comportement asymptotique de suites de solutions de telles EDP qui explosent. Dans la section 1, nous décrivons le schéma de preuve du long **(18)** où une asymptotique ponctuelle précise de suites de solutions d'EDP elliptiques de type Yamabe est obtenue. Le résultat principal en est le théorème 2.1, page 34. Cette analyse asymptotique est menée sur une variété riemannienne compacte, ce qui brise toutes les symétries de l'espace euclidien et interdit donc d'utiliser un certain nombre d'outils ("moving-planes", transformée de Kelvin, ...) qui reposent sur ces symétries. La preuve du théorème 2.1 n'utilise donc que des outils relativement souples, réutilisables dans de nombreuses situations. Nous tenterons de montrer quels sont ses ingrédients essentiels puis nous passerons en revue les différentes difficultés qui peuvent surgir pour généraliser ce résultat sur deux exemples dans les sections 2 et 3. Dans la section 2, nous décrivons un résultat de quantification pour des EDP elliptiques d'ordre 4 obtenu dans **(22)**, cf. théorème 2.2, page 54. Dans la section 3, nous décrivons un résultat de quantification pour des EDP avec non-linéarité sur-exponentielle¹ en dimension 2 obtenu dans **(23)**, cf. théorème 2.3, page 59. Dans le chapitre 3, nous verrons d'autres exemples auxquels elle s'applique. Mais avant d'entrer dans le vif du sujet, nous allons faire un petit rappel historique sur cette quantification des niveaux d'explosion dans des EDP elliptiques avec défaut de compacité.

Une équation aux dérivées partielles issue d'un problème de géométrie est très souvent critique du point de vue de l'analyse. Cette criticalité signifie par exemple qu'il n'est pas possible, en toute généralité, de contrôler l'ensemble des solutions de l'équation. Pour illustrer cette idée de criticalité, prenons un exemple simple. Considérons l'équation

$$\Delta u = u^{q-1}$$

1. critique d'après l'inégalité de Trudinger-Moser de la section 1.3 du chap. 1.

sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n avec condition de Dirichlet au bord. Tant que $q < \frac{2n}{n-2}$, l'équation est sous-critique : la non-linéarité est compacte². Cela signifie en particulier qu'il est possible d'obtenir une borne C^2 a priori sur l'ensemble des solutions de l'équation. Si $q = \frac{2n}{n-2}$, l'équation devient critique et un tel contrôle de l'ensemble des solutions devient au mieux (ou au pire) difficile à obtenir, au pire (ou au mieux) faux. L'équation devient critique pour cet exposant précisément car l'équation devient alors invariante par les changements d'échelle $u \mapsto \lambda^{\frac{n-2}{2}} u(\lambda \cdot)$, i.e. par un groupe de transformations non compact. L'éventuel défaut de compacité de l'ensemble des solutions de l'équation vient directement de la non-compacité de ce groupe de transformations qui laisse invariante l'équation.

Etant donnée une équation aux dérivées partielles elliptique critique, sachant qu'il est sans espoir de contrôler l'ensemble des solutions de manière brutale, est-il au minimum possible de décrire les défauts de compacité de cet ensemble ? D'en décrire une compactification ?

Les premiers résultats frappants dans cette direction sont ceux d'Aubin [9] dans son attaque du problème de Yamabe et plus encore de Sacks-Uhlenbeck [151] dans leur recherche d'applications harmoniques. A chaque fois, il est montré qu'un défaut de compacité pour des suites de solutions d'un problème approchant le problème critique ne peut se produire qu'à condition que suffisamment d'énergie soit présente. Dans [151] se trouve déjà une description de ce défaut de compacité en termes de développement de bulles³. Pour ce qui est des applications harmoniques, le travail pionnier de Sacks-Uhlenbeck a été largement étendu et transformé en résultats de quantification pour des suites de Palais-Smale⁴ pour la fonctionnelle énergie associée⁵ dans [56, 96, 134, 143]. En particulier, dans [134], à la suite d'un article de Parker et Wolfson [135] qui traite de la même question pour les courbes pseudo-holomorphes, est introduite la notion d'arbre de bulles⁶. Mais cette notion n'était pas complètement nouvelle puisque s'étaient développés, parallèlement à ces papiers sur les applications harmoniques, deux travaux importants de quantification pour des problèmes analogues. Les premiers résultats précis

2. Dès lors que la norme L^2 du gradient de u (énergie associée au terme de gauche de l'équation) est contrôlée, la norme $L^{\frac{2n}{n-2}}$ de u , plus forte que la norme L^q associée à la non-linéarité du terme de droite, est contrôlée grâce aux injections de Sobolev. Il n'y a donc pas compétition entre le terme de gauche et le terme de droite : c'est le terme de gauche qui l'emporte. Si $q = \frac{2n}{n-2}$, les deux termes sont de force équivalente, aucun contrôle n'est a priori possible.

3. Pour les équations de Yamabe, nous continuerons à nommer ces modèles de défaut de compacité des bulles même si elles ressemblent plus à des pics qu'à des bulles. La raison en est historique.

4. Pour la notion de suite de Palais-Smale, cf. section 1, page 33.

5. dont les points critiques sont des applications harmoniques.

6. c'est-à-dire la notion de bulles sur des bulles, tout le problème étant de les détecter et ensuite de démontrer qu'aucune énergie n'est perdue dans la jonction entre ces bulles.

de quantification ont été obtenus indépendamment par Struwe [160] dans le cas des équations de type Yamabe et par Brezis-Coron [25] dans le cas de l'équation des H -bulles. Nous reviendrons sur le résultat de Struwe dans la section 1. Dans [25], les auteurs s'intéressent à des suites de surfaces dans \mathbb{R}^3 à courbure moyenne constante 1 s'accrochant sur un contour qui s'écrase sur un point⁷. Ils démontrent alors que cette suite ressemble, dans les espaces d'énergie, à un chapelet de sphères (ou à un arbre de bulles)⁸.

Dans les années 80, à la suite du travail de Sacks-Uhlenbeck [151], ont donc été trouvés parallèlement des résultats de quantification pour diverses équations présentant des défauts de compacité (tous dus à une invariance conforme sous-jacente des équations). Tous ces résultats donnent une description en termes de bulles standard d'une suite de solutions - exactes ou approchées - de l'équation considérée dans l'espace d'énergie approprié, i.e. celui où est naturellement définie la fonctionnelle dont les points critiques sont solutions de l'équation en question. Un survol rapide sur ces questions de quantification se trouve dans [59]. Dans la section 1, nous reviendrons sur cette description dans le cas des équations de type Yamabe. Nous décrirons également notre travail (18) où nous avons réussi à décrire les défauts de compacité dans des espaces ponctuels. Bien entendu, la porte est ouverte pour un travail similaire sur toutes les équations classiques mentionnées ci-dessus.

1. Théorie asymptotique ponctuelle

Dans (18), nous nous sommes attachés à décrire les défauts de compacité pour des équations de type Yamabe dans des espaces ponctuels, ce qui constitue un saut qualitatif au-delà des espaces d'énergie. Si cette théorie a été développée en toute généralité pour des équations modelées sur l'équation de Yamabe, les idées et le schéma général de preuve ont déjà été appliqués à des équations différentes (cf. par exemple les travaux décrits dans ce chapitre) et sont sûrement voués à servir dans beaucoup de problèmes.

Considérons une variété riemannienne compacte (M, g) de dimension $n \geq 3$ et considérons l'équation

$$\Delta_g u + hu = u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

où h est une fonction de M dans \mathbb{R} régulière⁹ et Δ_g est le laplacien¹⁰. La non-linéarité $u^{\frac{n+2}{n-2}}$ est critique¹¹ et nous n'avons a priori aucune chance de contrôler un

7. Un problème équivalent consiste à fixer le contour et à regarder une suite de surfaces à courbure moyenne constante tendant vers 0 s'accrochant sur ce contour.

8. En fait, ils le démontrent pour des suites de Palais-Smale pour la fonctionnelle énergie associée au problème. Encore une fois, le terme de bulles est ici plus approprié que pour les équations de type Yamabe.

9. Nous précisons ultérieurement quelle régularité est requise en fonction des résultats.

10. Le laplacien est dans ce mémoire un opérateur positif défini par $\Delta_g = -\operatorname{div}_g(\nabla \cdot)$.

11. Elle est critique car l'injection de $H_1^2(M)$ dans $L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$ n'est pas compacte, cf. chap. 1.

tant soit peu l'ensemble des solutions de cette équation. Celle-ci est modélisée sur l'équation de Yamabe. En rajoutant un paramètre h , nous nous permettons essentiellement de ne pas parler dans le vide ultérieurement lorsque nous considérerons des suites de solutions de l'équation. De plus, nous verrons dans le chapitre 3 que cet ajout de paramètres permet d'introduire la notion, nouvelle et intéressante, de stabilité d'une telle équation.

Etant donnée une suite de solutions positives (u_α) d'équations

$$\Delta_g u_\alpha + h_\alpha u_\alpha = u_\alpha^{\frac{n+2}{n-2}},$$

l'objectif est de décrire les comportements possibles de cette suite. Dans l'espace d'énergie associé à l'équation, i.e. $H_1^2(M)$, cela a été fait par Struwe [160] (cf. le chap. 4 de (18) pour une preuve détaillée dans le cas riemannien). Supposons que la suite (h_α) converge dans $L^2(M)$. Supposons également que la suite (u_α) soit d'énergie bornée, c'est-à-dire qu'il existe Λ tel que $\int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g \leq \Lambda$ pour tout α . Alors, à extraction d'une sous-suite près, la suite (u_α) peut s'écrire sous la forme

$$u_\alpha = u_0 + \sum_{i=1}^N B_{i,\alpha} + R_\alpha \quad (2.1)$$

où u_0 est une solution (éventuellement nulle) de l'équation limite

$$\Delta_g u_0 + h_0 u_0 = u_0^{\frac{n+2}{n-2}},$$

les $B_{i,\alpha}$ sont des "bulles standard" et R_α est un reste qui tend vers 0 dans $H_1^2(M)$. Les bulles standard sont de la forme

$$B_{i,\alpha} = \mu_{i,\alpha}^{\frac{n-2}{2}} \left(\mu_{i,\alpha}^2 + \frac{d_g(x_{i,\alpha}, x)^2}{n(n-2)} \right)^{1-\frac{n}{2}} \quad (2.2)$$

où $(x_{i,\alpha})$ est une suite de points de M , appelés centre de la bulle, et $(\mu_{i,\alpha})$ est une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, appelés poids de la bulle. Ces bulles sont modélées sur les fonctions extrémales de l'inégalité de Sobolev euclidienne (cf. chap. 1, page 17, de ce mémoire). En particulier, si la variété considérée était l'espace euclidien, nous aurions exactement $\Delta_\xi B_{i,\alpha} = B_{i,\alpha}^{\frac{n+2}{n-2}}$. Ici, nous avons

$$\Delta_g B_{i,\alpha} = B_{i,\alpha}^{\frac{n+2}{n-2}} + R_{i,\alpha}$$

où $R_{i,\alpha}$ est un terme d'erreur qui tend vers 0 dans $H_1^2(M)$. L'apparition de ces bulles est la trace du défaut de compacité inhérent à l'équation. En effet, si $N = 0$, on peut alors montrer, quitte à supposer une convergence de la suite (h_α) dans des espaces plus réguliers, que la suite (u_α) est uniformément bornée dans $C^2(M)$. Par contre, dès que $N \geq 1$, il est clair que la suite (u_α) ne peut plus être uniformément

bornée ponctuellement ; elle perd même de l'énergie à la limite. L'énergie d'une bulle tend vers une constante universelle lorsque α tend vers $+\infty$:

$$\int_M |\nabla B_{i,\alpha}|_g^2 dv_g = K(n, 2)^{-n} + o(1) = E_n + o(1)$$

où $K(n, 2)$ est la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev euclidienne, cf. chap. 1, page 17. De plus, dans la décomposition (2.1) de u_α , les bulles n'interagissent pas au niveau H_1^2 . En d'autres termes,

$$\int_M (\nabla B_{i,\alpha}, \nabla B_{j,\alpha})_g dv_g \rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty$$

dès que $i \neq j$. Ceci se traduit par des relations entre les poids des bulles et la distance entre leurs centres respectifs :

$$\frac{d_g(x_{i,\alpha}, x_{j,\alpha})^2}{\mu_{i,\alpha}\mu_{j,\alpha}} + \frac{\mu_{i,\alpha}}{\mu_{j,\alpha}} + \frac{\mu_{j,\alpha}}{\mu_{i,\alpha}} \rightarrow +\infty \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty \quad (2.3)$$

pour tous $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$. La perte d'énergie par passage à la limite est donc quantifiée puisque

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g = \int_M |\nabla u_0|_g^2 dv_g + NE_n. \quad (2.4)$$

Le cas $N = 0$ correspond à une convergence forte de (u_α) vers sa limite u_0 tandis que, dès que $N \geq 1$, la suite (u_α) converge faiblement mais pas fortement vers u_0 .

En fait, la décomposition (2.1) a lieu dans un cadre beaucoup plus général puisqu'il suffit que la suite (u_α) soit une suite de Palais-Smale pour les fonctionnelles

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2} \int_M (|\nabla u_\alpha|_g^2 + h_\alpha u_\alpha^2) dv_g - \frac{n-2}{2n} \int_M |u_\alpha|^{\frac{2n}{n-2}} dv_g.$$

En d'autres termes, il suffit que la suite (u_α) soit une suite de fonctions positives ou nulles dans $H_1^2(M)$ vérifiant

$$\int_M (\nabla u_\alpha, \nabla \varphi_\alpha)_g dv_g + \int_M h_\alpha u_\alpha \varphi_\alpha dv_g = \int_M u_\alpha^{\frac{n+2}{n-2}} \varphi_\alpha dv_g + o(1)$$

pour toute suite de fonctions (φ_α) de $H_1^2(M)$ telles que $\|\varphi_\alpha\|_{H_1^2(M)} = 1$.

Si une bulle apparaît dans la décomposition (2.1), nous dirons que la suite (u_α) développe un phénomène de concentration. Nous appellerons les suites $(x_{i,\alpha})$ des points de concentration et les suites $(\mu_{i,\alpha})$ leur poids (ou vitesse de concentration) respectif. Ainsi, en un sens H_1^2 , la suite (u_α) ressemble à la somme de sa limite faible et d'un certain nombre de bulles (cf. fig. 2, page 35).

La question qui se pose naturellement et à laquelle nous allons répondre dans cette partie est alors : est-il possible d'obtenir une description similaire dans des

espaces ponctuels ? Passer d'une description dans l'espace d'énergie H_1^2 à une description ponctuelle dans l'espace C^0 représente un saut qualitatif énorme. La difficulté essentielle pour passer d'une description à l'autre est que les bulles, si elles n'interagissent pas dans les espaces d'énergie, peuvent très bien interagir au niveau ponctuel. Il n'est par exemple certainement pas vrai que

$$(B_{i,\alpha} + B_{j,\alpha})^{\frac{2n}{n-2}} - B_{i,\alpha}^{\frac{2n}{n-2}} - B_{j,\alpha}^{\frac{2n}{n-2}} \rightarrow 0 \text{ dans } C^0(M) \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty$$

alors que cette convergence a lieu dans $L^1(M)$, ce qui correspond à l'espace d'énergie. Ceci peut être illustré par la figure 3, page 35. Les bulles peuvent même se superposer les unes aux autres sans interagir au niveau H_1^2 : elles peuvent avoir même centre sans violer la relation (2.3) ; il suffit que l'une d'elles soit beaucoup plus concentrée que l'autre (cf. figure 4, ci-dessous).

Dans un grand nombre d'applications (cf. chap. 3 et 4), il est particulièrement intéressant de comprendre ces mécanismes d'interaction. En particulier, si interaction ponctuelle il y a, celle-ci obéit à un certain nombre de contraintes. La machinerie nécessaire pour décrire ces phénomènes de concentration a été élaborée sur le cas des équations de type Yamabe dans le livre (18). Elle s'adapte parfaitement bien à un certain nombre de problèmes présentant des défauts de compacité classifiables (cf. (22), (23), (27), [161], ...). Le résultat démontré dans (18) est le suivant :

THÉORÈME 2.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soit (h_α) une suite de fonctions dans $C^{0,\eta}(M)$ pour un certain $0 < \eta < 1$ qui converge vers une fonction limite h_0 dans $C^{0,\eta}(M)$ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$. Considérons une suite de solutions strictement positives (u_α) de*

$$\Delta_g u_\alpha + h_\alpha u_\alpha = u_\alpha^{\frac{n+2}{n-2}}$$

sur M d'énergie a priori bornée $\int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g \leq \Lambda$. Supposons également que l'opérateur $\Delta_g + h_0$ a un noyau trivial.

Alors il existe $u_0 \in C^2(M)$ solution (éventuellement nulle) de l'équation limite $\Delta_g u_0 + h_0 u_0 = u_0^{\frac{n+2}{n-2}}$ et N bulles $B_{i,\alpha}$ de la forme (2.2) telles que, après extraction d'une sous-suite,

$$u_\alpha(x_\alpha) = (1 + o(1))u_0(x_\alpha) + \sum_{i=1}^N (1 + o(1))B_{i,\alpha}(x_\alpha) + O\left(\left(\max_{i=1,\dots,N} \mu_{i,\alpha}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right)$$

pour toute suite de points (x_α) .

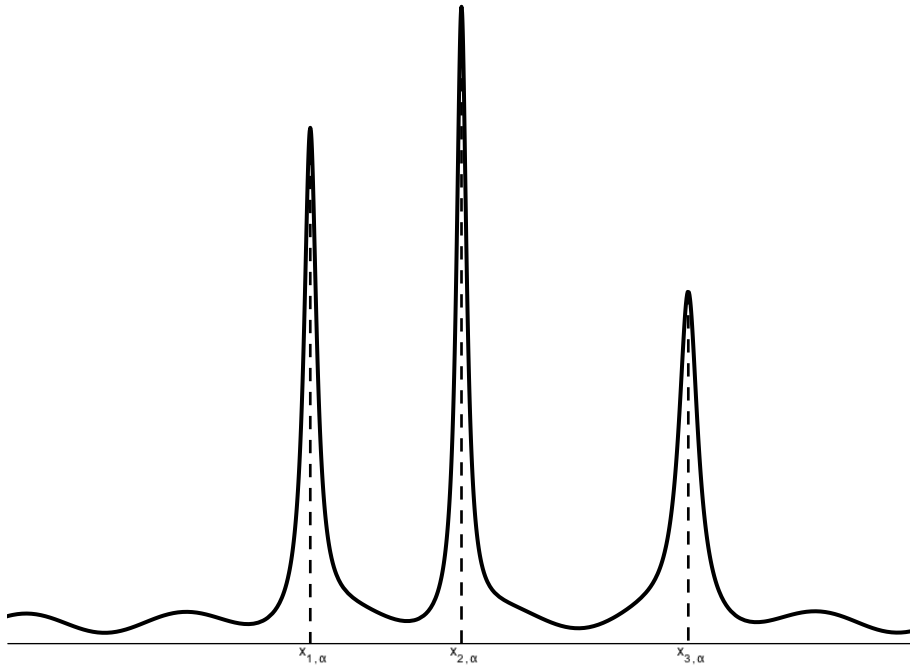


Fig. 2 : $u_0 + B_{1,\alpha} + B_{2,\alpha} + B_{3,\alpha}$

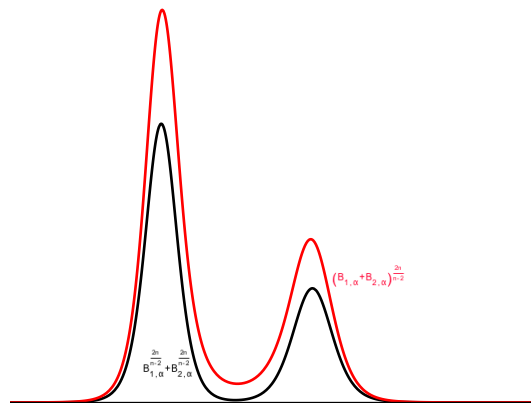


Fig. 3 : Interaction ponctuelle de bulles.

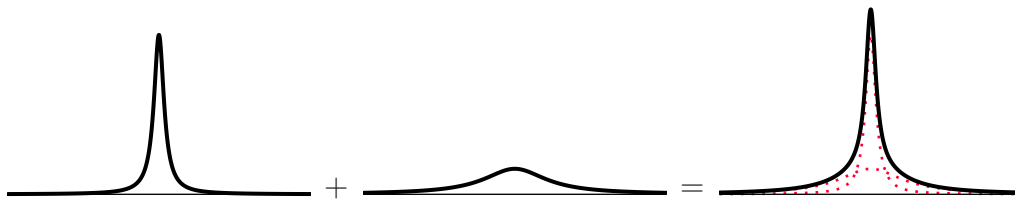


Fig. 4 : une bulle + une bulle = une bulle sur une bulle (même centre).

Ce théorème répond parfaitement à la question de la description ponctuelle de la suite posée ci-dessus. Une fois la description dans l'espace C^0 obtenue, les effets de régularisation des EDP elliptiques donnent des descriptions aussi précises dans les espaces C^k (k dépendant du degré de régularité dans la convergence de la suite (h_α)). Ainsi la figure 5, page 36, est parfaitement justifiée. La suite (u_α) ressemble réellement à la somme d'une solution régulière de l'équation limite et d'un certain nombre de bulles.

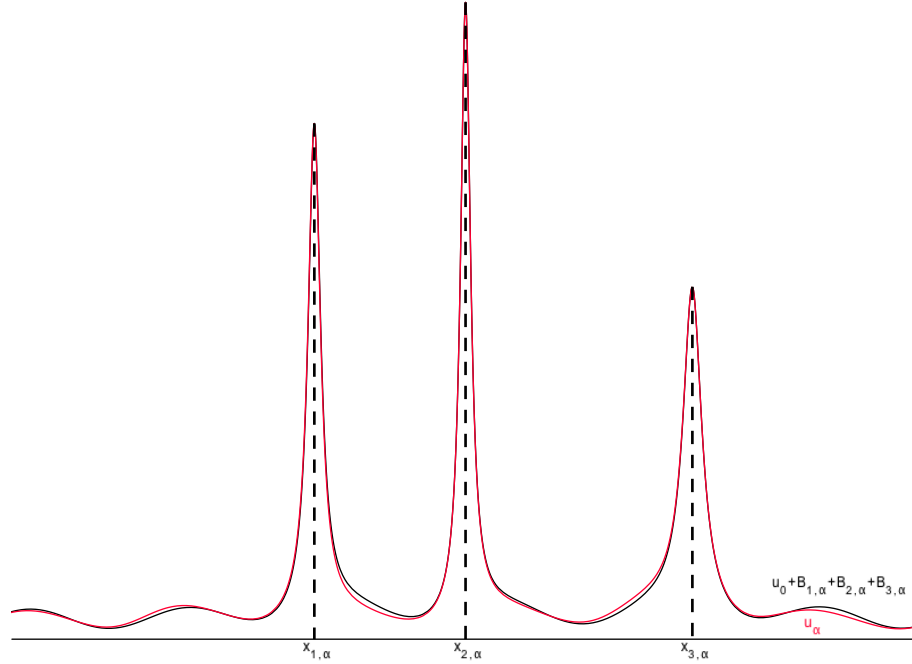


Fig. 5 : théorie ponctuelle sur les (u_α)

Nous verrons dans le chapitre 3, section 2.1, comment obtenir des informations précises sur les configurations de bulles possibles dans un tel processus. Si des bulles peuvent se former sur des bulles, ceci ne peut être fait de manière complètement arbitraire.

Le reste de cette partie est consacré à l'exposition des idées essentielles de la preuve du théorème 2.1¹².

1.1. Comment trouver les points de concentration ? Même si les techniques de type "énergie", basée sur la fonction de concentration de Lévy (cf. [160]), permettent de détecter toutes les bulles qui peuvent se développer dans notre cas précis¹³, nous allons décrire comment détecter les points de concentration par une

12. Il est tout-à-fait exclu de la présenter exhaustivement puisqu'elle court sur 120 pages et ce n'est pas l'objet de ce texte. Nous renvoyons à (18).

13. C'est d'ailleurs ainsi que la décomposition H_1^2 ci-dessus est obtenue.

méthode ponctuelle qui nous mènera au résultat principal de cette sous-section, la proposition 2.1, page 45. L'énorme avantage de cette méthode est, outre sa souplesse qui lui permet de s'adapter à des équations où la méthode d'énergie est inopérante, qu'elle fournit automatiquement des estimées ponctuelles sur la suite (u_α) dépendant de la distance à laquelle se trouve l'ensemble des points de concentration. Son (léger) inconvénient est évidemment qu'elle demande un peu plus de régularité sur la suite (h_α) . Cette méthode de détection repose fondamentalement sur l'invariance des termes dominants de l'équation, i.e. $\Delta_g u_\alpha$ et $u_\alpha^{\frac{n+2}{n-2}}$, par le changement d'échelle $u \mapsto \lambda^{\frac{n-2}{2}} u(\lambda x)$. Bien entendu, ce changement d'échelle n'a aucun sens global sur une variété mais, comme les phénomènes de concentration se déroulent à des échelles microscopiques et comme une variété riemannienne n'est infinitésimalement qu'un espace euclidien, il est possible de donner un sens à ce changement d'échelle sur les domaines qui vont nous intéresser. La méthode décrite ci-dessous se compose de deux étapes : premièrement, il faut trouver le changement d'échelle qui permette de voir quelque chose au voisinage d'un point de concentration ; deuxièmement, il faut trouver une estimée ponctuelle ayant les mêmes invariances que l'équation - ou tout du moins que ces composantes non compactes - qui fournira, si elle est violée, un nouveau point de concentration. La première étape est également utilisée dans les méthodes d'énergie. Elle consiste à regarder à la loupe la solution (u_α) au voisinage d'un point où elle se concentre - que ce soit l'énergie, i.e. la norme H_1^2 ici, qui se concentre, ou que ce soit une concentration ponctuelle, i.e. en norme L^∞ - et à écraser celle-ci afin qu'elle ne se concentre plus. Il faut alors montrer que la suite, vue sous cet angle, converge vers un profil standard (ce qui demande un résultat de classification des solutions de l'équation-modèle associée). La deuxième étape est l'idée essentielle de la méthode ponctuelle. Ces deux étapes s'adaptent à beaucoup d'équations présentant des défauts de compacité dus à l'invariance de celles-ci par un certain changement d'échelle. Trouver l'estimée ponctuelle invariante qui permet de faire fonctionner la deuxième étape est souvent le point délicat. Nous reviendrons sur ces diverses difficultés (classification des solutions de l'équation-modèle associée, recherche du changement d'échelle adapté et de l'estimée ponctuelle adéquate) dans les sections 2 et 3 de ce chapitre.

1.1.1. *Détection du premier point de concentration.* Le candidat le plus naturel pour être point de concentration est le - ou un - point où la fonction u_α est maximale. Remarquons tout d'abord que, si la suite (u_α) était uniformément bornée dans $L^\infty(M)$, les résultats de théorie elliptique standard donneraient alors gratuitement le résultat du théorème avec $N = 0$. En d'autres termes, nous aurions, à extraction d'une sous-suite près, convergence dans l'espace $C^2(M)$ de la suite (u_α) vers une limite u_0 solution de l'équation-limite. Dans ce cas d'ailleurs, il est certain que cette limite est non-nulle (cf. (18) pour la preuve, simple, de cette assertion).

A partir de maintenant, nous supposons donc que

$$\sup_M u_\alpha \rightarrow +\infty \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty .$$

Soit alors (x_α) une suite de points de M telle que

$$u_\alpha(x_\alpha) = \sup_M u_\alpha .$$

Regardons cette suite (u_α) au microscope au voisinage de x_α et écrasons-là afin d'y voir plus clair. Pour ce faire, on pose, pour $x \in B_0\left(\delta u_\alpha(x_\alpha)^{\frac{2}{n-2}}\right) \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \delta < \frac{1}{2}i_g(M)$, $i_g(M)$ étant le rayon d'injectivité de M ,

$$\begin{aligned} v_\alpha(x) &= u_\alpha(x_\alpha)^{-1} u_\alpha\left(\exp_{x_\alpha}\left(u_\alpha(x_\alpha)^{-\frac{2}{n-2}} x\right)\right) \text{ et} \\ g_\alpha(x) &= \exp_{x_\alpha}^* g\left(u_\alpha(x_\alpha)^{-\frac{2}{n-2}} x\right) . \end{aligned}$$

Passer dans la carte exponentielle permet de donner un sens au changement d'échelle effectué. Celui-ci est lié aux invariances de l'équation (cf. la discussion ci-dessus). En effet, la suite (v_α) vérifie l'équation

$$\Delta_{g_\alpha} v_\alpha + u_\alpha(x_\alpha)^{-\frac{4}{n-2}} h_\alpha\left(\exp_{x_\alpha}\left(u_\alpha(x_\alpha)^{-\frac{2}{n-2}} \cdot\right)\right) v_\alpha = v_\alpha^{\frac{n+2}{n-2}}$$

dans $B_0\left(\delta u_\alpha(x_\alpha)^{\frac{2}{n-2}}\right)$. Ce changement d'échelle laisse bien invariant les deux termes non-compacts de l'équation et rend négligeable le terme linéaire qui, lui, est compact. De plus, grâce à notre choix de x_α , $0 \leq v_\alpha \leq v_\alpha(0) = 1$ dans $B_0\left(\delta u_\alpha(x_\alpha)^{\frac{2}{n-2}}\right)$. Comme $u_\alpha(x_\alpha) \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$, $g_\alpha \rightarrow \xi$ dans $C_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ où ξ est la métrique euclidienne. Par théorie elliptique standard, moyennant une borne L^∞ sur (h_α) par exemple, il existe une sous-suite de (v_α) qui converge dans $C_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ vers une solution U (régulière) de l'équation-modèle

$$\Delta_\xi U = U^{\frac{n+2}{n-2}}$$

dans \mathbb{R}^n . De plus, par passage à la limite, $0 \leq U \leq U(0) = 1$. C'est à ce moment-là qu'est absolument nécessaire une classification de l'ensemble des solutions de l'équation-modèle. Ici, cette classification est particulièrement simple puisque toutes les solutions positives de l'équation ci-dessus sont de la forme

$$U(x) = \lambda^{\frac{n-2}{2}} \left(1 + \frac{\lambda^2 |x - x_0|^2}{n(n-2)}\right)^{1-\frac{n}{2}}$$

pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et un certain $\lambda > 0$. Cette classification est due à Caffarelli-Gidas-Spruck [32]. Dans notre cas, c'est-à-dire lorsque les solutions sont a priori dans $L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)$, elle est en fait due à Obata [131]. La preuve d'Obata est purement géométrique puisqu'il est possible lorsque l'énergie est finie (ce qui

correspond moralement à une décroissance des solutions à l'infini¹⁴) de remonter les solutions sur la sphère et se ramener au problème de la classification des métriques dans la classe conforme de la sphère standard qui sont à courbure scalaire constante (ce qui revient à caractériser le groupe des difféomorphismes conformes de la sphère standard). Il convient de noter que c'est la non-compactité de ce groupe de difféomorphismes conformes de la sphère standard qui est cause des phénomènes de perte de compacité dans des équations de type Yamabe mais que c'est grâce au fait que cette perte de compacité vienne de ce problème géométrique qu'on peut classifier les profils d'explosion (i.e. les solutions de l'équation-modèle). Une preuve du résultat d'Obata utilisant la technique des "moving-planes" due à Alexandrov [5] a ensuite été trouvée par Gidas-Ni-Nirenberg [71]. La classification générale de [32] est basée sur une adaptation de la méthode des "moving-planes" lorsque la fonction n'a a priori pas de décroissance à l'infini - l'étape cruciale de la preuve étant alors de démontrer qu'il y a suffisamment de directions avec décroissance pour pouvoir démarrer la méthode des "moving-planes". Une preuve plus simple - plus géométrique et plus élégante - de cette classification, basée sur une méthode des "moving-spheres" (qui n'utilise que le caractère conformement invariant de l'équation et un principe du maximum) a été donnée plus récemment par Li-Zhang [114]. Muni de cette classification, puisque U admet son maximum de valeur 1 en 0, il est clair que

$$U(x) = \left(1 + \frac{|x|^2}{n(n-2)}\right)^{1-\frac{n}{2}}.$$

Nous avons donc bien obtenu un profil de u_α au voisinage de x_α . En effet, en remontant ce résultat sur la variété, nous avons

$$u_\alpha = (1 + o(1))B_{1,\alpha}$$

dans toute boule $B_{x_{1,\alpha}}(R\mu_{1,\alpha})$ où $x_{1,\alpha} = x_\alpha$, $\mu_{1,\alpha} = u_\alpha(x_\alpha)^{-\frac{2}{n-2}}$ et $B_{1,\alpha}$ est la bulle-standard de centre $x_{1,\alpha}$ et de poids $\mu_{1,\alpha}$ comme définie en (2.2).

Nous avons donc trouvé notre premier point de concentration. Ce procédé classique de changement d'échelle remonte à Struwe [160]. Mais la technique ponctuelle directe développée ici remonte plutôt à Schoen [155].

1.1.2. *Détection des bulles "hautes"*. Dans cette sous-section, nous allons expliquer comment détecter un premier paquet de bulles, dites bulles "hautes". La terminologie s'éclaircira dans la sous-section suivante quand nous aurons un deuxième paquet de bulles à comparer à ce premier. L'idée essentielle est de concocter une estimée ponctuelle invariante par le changement d'échelle utilisé dans la sous-section précédente pour obtenir un profil asymptotique autour d'un point de concentration. Une telle estimée ponctuelle donnera souvent, si ce n'est toujours, un moyen de détecter d'autres points de concentration. Pour illustrer cette méthode, voyons

14. Ceci peut d'ailleurs être rigoureusement démontré, cf. par exemple (27).

comment elle permet de construire le deuxième point de concentration, les autres points de ce premier paquet s'obtenant de manière similaire. Posons

$$\Phi_\alpha(x) = d_g(x_{1,\alpha}, x)^{\frac{n-2}{2}} u_\alpha(x).$$

Cette quantité est invariante par le changement d'échelle de la sous-section précédente. En effet,

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha\left(\exp_{x_{1,\alpha}}(\mu_{1,\alpha}x)\right) &= \mu_{1,\alpha}^{\frac{n-2}{2}} |x|^{\frac{n-2}{2}} u_\alpha\left(\exp_{x_{1,\alpha}}(\mu_{1,\alpha}x)\right) \\ &= |x|^{\frac{n-2}{2}} v_\alpha(x), \end{aligned}$$

ce qui n'est rien d'autre que la quantité ci-dessus construite cette fois à partir de la fonction v_α .

Cette quantité permet de détecter un deuxième point de concentration de la façon suivante : supposons que $\sup \Phi_\alpha \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$. Alors, en prenant y_α un point de maximum de Φ_α , il est possible de répéter l'étape de la sous-section précédente en remplaçant x_α par y_α . En effet, ce choix de y_α assure que la suite de fonctions renormalisées est localement uniformément bornée, ce qui permet une nouvelle fois de passer à la limite dans l'équation et d'obtenir la convergence vers un profil standard. Le point essentiel ici est que l'hypothèse $\Phi_\alpha(y_\alpha) \rightarrow +\infty$ assure que, après le changement d'échelle approprié autour de y_α , le premier point de concentration est bien envoyé à l'infini, ce qui se traduit par les relations suivantes :

$$\frac{d_g(x_{1,\alpha}, y_\alpha)}{u_\alpha(x_{1,\alpha})^{-\frac{2}{n-2}} + u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n-2}}} \rightarrow +\infty \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty.$$

En un sens, cette étape permet de détecter des bulles qui sont relativement éloignées les unes des autres (leur distance respective étant mesurée par rapport à leur poids).

Pour continuer le processus, il suffit de remplacer la quantité Φ_α par

$$\left(\min_{i=1,\dots,k} d_g(x_{i,\alpha}, x) \right)^{\frac{n-2}{2}} u_\alpha(x)$$

une fois les k premiers points de concentration construits. Tant que cette quantité n'est pas uniformément bornée, son maximum donne un nouveau point de concentration. Le processus s'arrête nécessairement grâce à la borne a priori sur l'énergie que nous avons faite. En effet, un argument simple (déjà présent dans [160]) permet de montrer que les bulles ainsi construites n'interagissent pas au niveau H_1^2 et que leur propre énergie est quantifiée. Chaque bulle apporte un quantum d'énergie E_n et k bulles ainsi construites en apportent kE_n . La borne sur l'énergie borne donc a priori le nombre de points de concentration que ce processus peut produire. Pour une discussion des difficultés soulevées par l'absence de borne sur l'énergie, nous renvoyons à la section 2.4 du chapitre 3.

Une fois que le processus s'arrête, nous avons non seulement un certain nombre de points de concentration $(x_{1,\alpha}, \dots, x_{k,\alpha})$ avec des poids associés $(\mu_{1,\alpha}, \dots, \mu_{k,\alpha})$ et un profil asymptotique de u_α au voisinage de ces points, i.e.

$$u_\alpha = (1 + o(1))B_{i,\alpha}$$

dans la boule $B_{x_{i,\alpha}}(R\mu_{i,\alpha})$, mais également une estimée ponctuelle sur u_α , i.e.

$$\left(\min_{i=1,\dots,k} d_g(x_{i,\alpha}, x) \right)^{\frac{n-2}{2}} u_\alpha(x) \leq C$$

sur M avec C indépendant de α .

Les bulles trouvées dans cette étape vérifient toutes

$$\frac{d_g(x_{i,\alpha}, x_{j,\alpha})}{\mu_{i,\alpha}} \rightarrow +\infty \quad (2.5)$$

pour tous $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$.

L'estimée ponctuelle ci-dessus a déjà été utilisée de nombreuses fois dans le cas d'un point de concentration isolé. Elle remonte à Schoen-Zhang [159].

1.1.3. *Détection des bulles "basses" et "cachées"*. Nous n'avons malheureusement pas trouvé toutes les bulles avec le mode de détection de la sous-section précédente. En particulier, nous n'avons pas trouvé de bulles sur des bulles, c'est-à-dire des couples de bulles ne vérifiant pas la relation (2.5). En fait, il nous manque dans ces couples les plus basses (et donc les plus étalées), celles dont le maximum est caché par celui de la bulle-compagnon, cf. figure 6 ci-dessous, page 42.

Comment faire pour détecter ces bulles ? Il faut raffiner la méthode précédente en regardant cette fois la quantité

$$\Psi_\alpha(x) = \left(\min_{i=1,\dots,k} (d_g(x_{i,\alpha}, x) + \mu_{i,\alpha}) \right)^{\frac{n-2}{2}} \left| u_\alpha(x) - u_0(x) - \sum_{i=1}^k B_{i,\alpha}(x) \right|.$$

Tant que cette quantité ne tend pas uniformément vers 0, il est possible de trouver un nouveau point de concentration¹⁵. Montrons-le sur le cas le plus simple. Supposons donc que les k points de concentration trouvés sont ceux de l'étape précédente. Remarquons tout d'abord que Ψ_α tend uniformément vers 0 sur $\bigcup_{i=1}^k B_{x_{i,\alpha}}(R\mu_{i,\alpha})$ mais également sur $M \setminus \bigcup_{i=1}^k B_{x_{i,\alpha}}(\frac{1}{R})$ pour tout $R > 0$. Ceci est une conséquence de la sous-section précédente. Pour le deuxième point, nous avons juste besoin de remarquer que la suite (u_α) est uniformément bornée sur cet ensemble grâce à l'estimée faible obtenue lors de la première étape et d'utiliser des résultats de théorie elliptique standard pour en déduire une convergence ponctuelle vers u_0 sur cet ensemble. Il nous reste donc à comprendre ce qui se passe dans la zone intermédiaire.

¹⁵. Remarque : cette quantité est toujours uniformément bornée une fois l'étape précédente achevée.

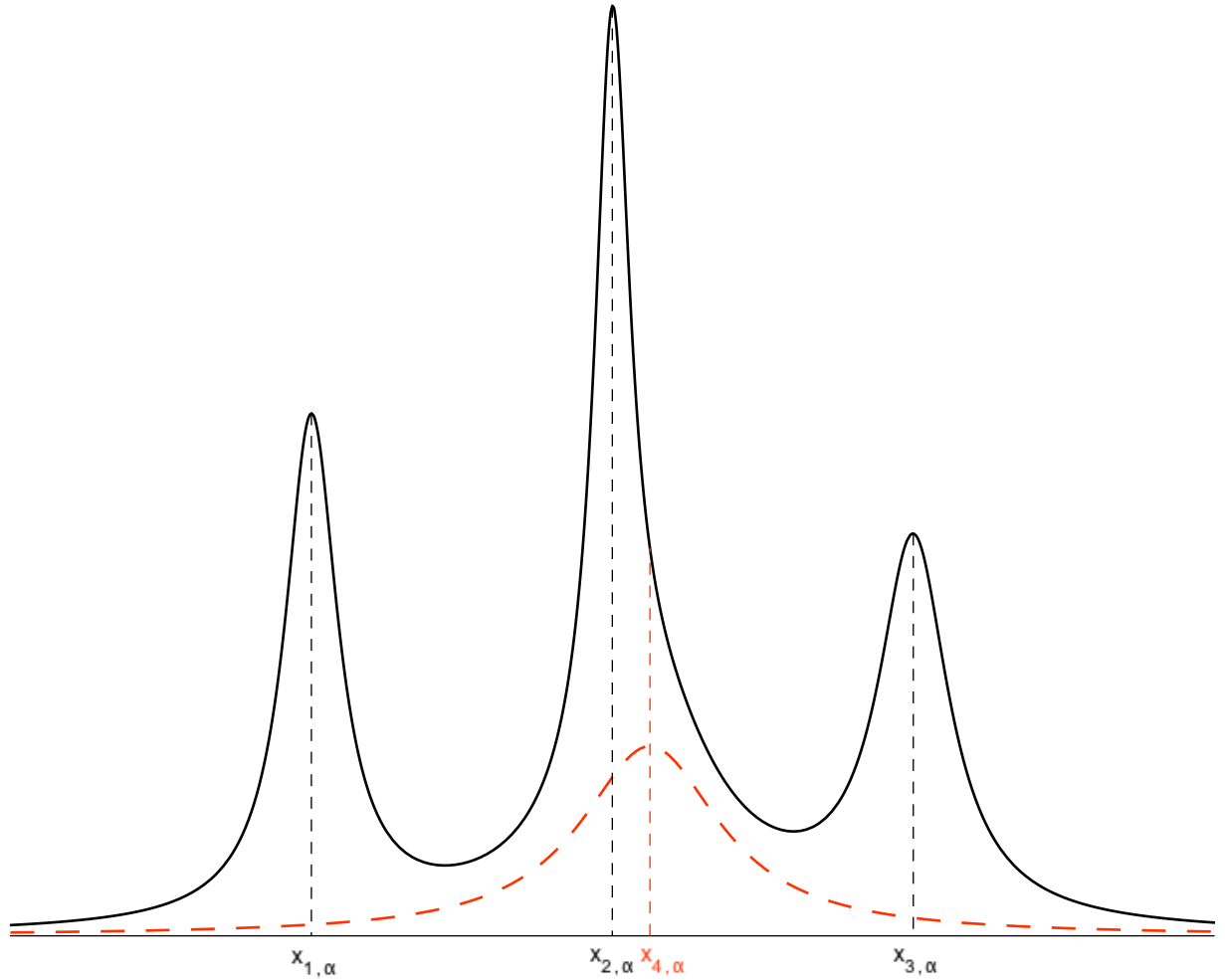


Fig. 6 : une bulle "basse" et "cachée" qu'il faut détecter.

Supposons que

$$\Psi_\alpha(x_\alpha) = \sup_M \Psi_\alpha \geq \varepsilon_0$$

pour un certain $\varepsilon_0 > 0$ indépendant de α . Vu ce qui vient d'être remarqué, il est clair que

$$\min_{i=1,\dots,k} d_g(x_{i,\alpha}, x_\alpha) \rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty \quad (2.6)$$

et que

$$\frac{d_g(x_{i,\alpha}, x_\alpha)}{\mu_{i,\alpha}} \rightarrow +\infty \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty \quad (2.7)$$

pour tout $1 \leq i \leq k$. Il est également clair que $u_\alpha(x_\alpha) \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$. Posons

$$\begin{aligned} v_\alpha(x) &= u_\alpha(x_\alpha)^{-1} u_\alpha \left(\exp_{x_\alpha} \left(u_\alpha(x_\alpha)^{-\frac{2}{n-2}} x \right) \right) \text{ et} \\ g_\alpha(x) &= \exp_{x_\alpha}^* g \left(u_\alpha(x_\alpha)^{-\frac{2}{n-2}} x \right) . \end{aligned}$$

Pour tout $1 \leq i \leq k$, notons $\hat{x}_{i,\alpha}$ l'image du point de concentration $x_{i,\alpha}$ par ce changement d'échelle, i.e.

$$\hat{x}_{i,\alpha} = u_\alpha(x_\alpha)^{\frac{2}{n-2}} \exp_{x_\alpha}^{-1}(x_{i,\alpha})$$

pour les points pour lesquels cela a un sens, c'est-à-dire pour ceux qui vérifient $d_g(x_{i,\alpha}, x_\alpha) < i_g(M)$. Mais peu importe car ceux qui nous intéressent sont ceux pour lesquels

$$d_g(x_{i,\alpha}, x_\alpha)^{\frac{n-2}{2}} u_\alpha(x_\alpha) = O(1)$$

qui vont donner, quitte à extraire une sous-suite, une trace dans \mathbb{R}^n , c'est-à-dire une limite de $\hat{x}_{i,\alpha}$ que nous noterons \hat{x}_i . Nous noterons également $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, k\}$ l'ensemble des i pour lesquels cette limite existe et est finie. Il convient de remarquer que $\mathcal{I} \neq \emptyset$ grâce à l'estimée obtenue à la fin de la première étape d'exhaustion des points de concentration. Ceci illustre le fait que la nouvelle bulle que nous sommes en train de construire est "sous" celles correspondant aux points de concentration qui laissent une trace \hat{x}_i après le changement d'échelle.

En utilisant l'estimée de la première étape, i.e.

$$\left(\min_{i=1, \dots, k} d_g(x_{i,\alpha}, x) \right)^{\frac{n-2}{2}} u_\alpha(x) \leq C ,$$

et puisque cette estimée est invariante par le changement d'échelle effectué, il est clair que

$$\limsup_{\alpha \rightarrow +\infty} v_\alpha(z_\alpha) \leq C \left(\min_{i \in \mathcal{I}} |z - \hat{x}_i| \right)^{1 - \frac{n}{2}}$$

pour toute suite de points (z_α) convergeant vers $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{\hat{x}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$. En particulier, la suite (v_α) est uniformément bornée sur tout compact de $\mathbb{R}^n \setminus \{\hat{x}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ et, par théorie elliptique standard, après extraction d'une sous-suite, $v_\alpha \rightarrow V$ dans $C_{loc}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{\hat{x}_i\}_{i \in \mathcal{I}})$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ où V vérifie

$$\Delta_\xi V = V^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ dans } \mathbb{R}^n \setminus \{\hat{x}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$$

et

$$0 \leq V \leq C \left(\min_{i \in \mathcal{I}} |z - \hat{x}_i| \right)^{1 - \frac{n}{2}} .$$

Grâce à cette estimée ponctuelle, les singularités de V en \hat{x}_i sont effaçables et $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifie l'équation-limite sur tout l'espace¹⁶. Il reste à montrer que V n'est pas identiquement nulle pour obtenir encore une fois un profil standard. Mais ceci est dû au fait que $\Psi_\alpha(x_\alpha) \geq \varepsilon_0 > 0$. En remarquant grâce à (2.6) et (2.7) que

$$(d_g(x_{i,\alpha}, x_\alpha) + \mu_{i,\alpha})^{\frac{n-2}{2}} B_{i,\alpha}(x_\alpha) \rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty$$

et que

$$\left(\min_{i=1,\dots,k} (d_g(x_{i,\alpha}, x_\alpha) + \mu_{i,\alpha}) \right)^{\frac{n-2}{2}} u_0(x_\alpha) \rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty,$$

nous obtenons directement $|\hat{x}_i| \geq \varepsilon_0^{\frac{2}{n-2}}$ pour tout $i \in \mathcal{I}$. La convergence de v_α vers V ayant ainsi lieu dans C^1 dans un petit voisinage de 0 et $v_\alpha(0)$ étant égal à 1, il est clair que $V(0) = 1$. Le résultat de classification de [32] nous donne alors l'existence de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et de $\lambda > 0$ tels que

$$V(x) = \lambda^{\frac{n-2}{2}} \left(\lambda^2 + \frac{|x - x_0|^2}{n(n-2)} \right)^{1-\frac{n}{2}}.$$

En posant $x_{k+1,\alpha} = \exp_{x_\alpha} \left(u_\alpha(x_\alpha)^{-\frac{2}{n-2}} x_0 \right)$ et $\mu_{k+1,\alpha} = (\lambda u_\alpha(x_\alpha))^{-\frac{2}{n-2}}$, nous sommes arrivés à

$$\mu_{k+1,\alpha}^{\frac{n-2}{2}} u_\alpha \left(\exp_{x_{k+1,\alpha}}(\mu_{k+1,\alpha} x) \right) \rightarrow U(x) = \left(1 + \frac{|x|^2}{n(n-2)} \right)^{1-\frac{n}{2}}$$

dans $C_{loc}^2(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}_{k+1})$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ où

$$\mathcal{S}_{k+1} = \left\{ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu_{k+1,\alpha}} \exp_{x_{k+1,\alpha}}^{-1}(x_{i,\alpha}), 1 \leq i \leq k \text{ t.q. } d_g(x_{i,\alpha}, x_{k+1,\alpha}) = O(\mu_{k+1,\alpha}) \right\}.$$

Il est clair que la bulle ainsi trouvée correspond bien à celle de la figure 6, page 42. En particulier, il existe nécessairement au moins une bulle qui a son centre dans la boule de centre $x_{k+1,\alpha}$ et de rayon $R\mu_{k+1,\alpha}$ pour R assez grand, c'est-à-dire une bulle qui est vraiment sur elle.

De même que dans l'étape précédente, toute nouvelle bulle ainsi construite n'interagit pas, au niveau H_1^2 , avec les précédentes, et apporte avec elle un quantum d'énergie. Quitte à répéter le processus¹⁷, processus qui s'arrêtera nécessairement

16. Ceci est également un point crucial. La classification des solutions de l'équation-limite avec singularités éventuelles peut poser un problème, même avec l'estimée ponctuelle correspondant à l'hypothèse d'énergie bornée. Voir par exemple section 3. Si des solutions singulières pouvaient exister, cela signifierait qu'une bulle haute pourrait "tordre" une bulle basse et éventuellement lui faire perdre de l'énergie.

17. Le cas général, i.e. lorsqu'on a déjà des bulles de second type, est techniquement plus compliqué mais fondamentalement similaire à celui que nous venons de traiter.

grâce à la borne a priori sur l'énergie des solutions, nous arrivons au résultat suivant :

PROPOSITION 2.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soit (u_α) une suite de solutions C^2 positives de l'équation*

$$\Delta_g u_\alpha + h_\alpha u_\alpha = u_\alpha^{\frac{n+2}{n-2}}$$

avec $h_\alpha \rightarrow h_0$ dans $C^{0,\eta}(M)$ pour un certain $\eta > 0$. Alors il existe $u_0 \in C^2(M)$ solution de

$$\Delta_g u_0 + h_0 u_0 = u_0^{\frac{n+2}{n-2}}$$

qui est soit identiquement nulle, soit strictement positive, $N \in \mathbb{N}$ et N suites $(x_{i,\alpha}, \mu_{i,\alpha})_{i=1,\dots,N}$ où $x_{i,\alpha} \in M$ et $\mu_{i,\alpha} > 0$ vérifie $\mu_{i,\alpha} \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ telles que les propriétés suivantes aient lieu après extraction d'une sous-suite :

- (a) $u_\alpha \rightarrow u_0$ dans $C_{loc}^2(M \setminus \mathcal{S})$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ où $\mathcal{S} = \{\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} x_{i,\alpha}\}_{i=1,\dots,N}$.
 (b) Pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\mu_{i,\alpha}^{\frac{n-2}{2}} u_\alpha \left(\exp_{x_{i,\alpha}}(\mu_{i,\alpha} x) \right) \rightarrow \left(1 + \frac{|x|^2}{n(n-2)} \right)^{1-\frac{n}{2}}$$

dans $C_{loc}^2(M \setminus \mathcal{S}_i)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ où

$$\mathcal{S}_i = \left\{ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu_{i,\alpha}} \exp_{x_{i,\alpha}}(x_{j,\alpha}), j \neq i \text{ t.q. } d_g(x_{i,\alpha}, x_{j,\alpha}) = O(\mu_{i,\alpha}) \right\}.$$

- (c) Pour tous $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$,

$$\frac{d_g(x_{i,\alpha}, x_{j,\alpha})^2}{\mu_{i,\alpha} \mu_{j,\alpha}} + \frac{\mu_{i,\alpha}}{\mu_{j,\alpha}} + \frac{\mu_{j,\alpha}}{\mu_{i,\alpha}} \rightarrow +\infty \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty.$$

- (d) La quantité

$$\left(\min_{i=1,\dots,N} (d_g(x_{i,\alpha}, x) + \mu_{i,\alpha}) \right)^{\frac{n-2}{2}} \left| u_\alpha(x) - u_0(x) - \sum_{i=1}^N B_{i,\alpha}(x) \right|$$

tend vers 0 dans $L^\infty(M)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ où

$$B_{i,\alpha}(x) = \mu_{i,\alpha}^{\frac{n-2}{2}} \left(\mu_{i,\alpha}^2 + \frac{d_g(x_{i,\alpha}, x)^2}{n(n-2)} \right)^{1-\frac{n}{2}}.$$

En fait, les points (a) et (b) sont des conséquences de (c) et (d) avec un peu de théorie elliptique standard. Le point (c) est bien connu et n'est que l'indépendance des bulles dans l'espace d'énergie H_1^2 . Enfin, une dernière remarque : si $N = 0$,

alors u_0 ne peut être identiquement nulle si l'opérateur $\Delta_g + h_0$ a un noyau trivial¹⁸ (cf. **(18)** pour une preuve). Nous verrons plus loin, cf. section 2.1 du chapitre 3, que la réciproque est vraie en petites dimensions.

Une fois que ces deux étapes ont été menées à bien et que nous avons démontré la proposition 2.1, nous avons en fait trouvé tous les points de concentration. Ceci n'est pas encore démontré et l'estimée (d) de la proposition 2.1 ne suffit pas pour l'obtenir. Elle est en effet critique pour les espaces d'énergie¹⁹ et ne permet donc pas de montrer qu'il n'y a pas d'énergie perdue entre les bulles et pas d'autres points de concentration. Mais cette estimée ponctuelle (faible) peut être améliorée en une estimée ponctuelle optimale. Il va nous falloir plusieurs étapes pour y arriver. C'est l'objet des sous-sections suivantes.

1.2. Un premier contrôle ponctuel de la suite. L'objectif est d'obtenir un contrôle par au-dessus de la suite (u_α) par la somme des bulles et de u_0 , ce qui sera achevé dans la sous-section suivante. Pour l'instant, nous nous proposons d'esquisser la preuve du résultat suivant :

PROPOSITION 2.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soit (u_α) une suite de solutions C^2 positives de l'équation*

$$\Delta_g u_\alpha + h_\alpha u_\alpha = u_\alpha^{\frac{n+2}{n-2}}$$

avec $h_\alpha \rightarrow h_0$ dans $C^{0,\eta}(M)$ pour un certain $\eta > 0$. Alors il existe $C > 0$ telle que, après extraction d'une sous-suite,

$$|u_\alpha(x) - u_0(x)| \leq C \mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}} \left(\min_{i=1,\dots,N} (d_g(x_{i,\alpha}, x) + \mu_{i,\alpha}) \right)^{2-n} + \varepsilon_\alpha \|u_0\|_\infty$$

pour tout $x \in M$ où les suites $(x_{i,\alpha})_{i=1,\dots,N}$ et $(\mu_{i,\alpha})_{i=1,\dots,N}$ et la fonction u_0 sont données par la proposition 2.1, $\mu_\alpha = \max_{i=1,\dots,N} \mu_{i,\alpha}$, et où (ε_α) est une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

Nous allons nous contenter d'esquisser la preuve de cette proposition dans le cas, beaucoup plus simple techniquement, où $u_0 \equiv 0$ et nous renvoyons à **(18)** pour le cas général. La preuve se décompose en deux étapes, la première donnant une

18. Nous savons déjà que cet opérateur n'a pas de valeurs propres strictement négatives tout simplement car l'existence d'une solution strictement positive de l'équation $\Delta_g u_\alpha + h_\alpha u_\alpha = u_\alpha^{\frac{n+2}{n-2}}$ entraîne que l'opérateur $\Delta_g + h_\alpha$ est coercif, i.e. a une première valeur propre strictement positive. Ce fait simple, obtenu en testant l'équation sur une fonction propre associée à la valeur propre la plus petite de cet opérateur, a été remarqué dans **[16]** par exemple.

19. L'estimée de décroissance en distance aux points de concentration à la puissance $1 - \frac{n}{2}$ ne permet tout juste pas d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour contrôler la norme $L^{\frac{2n}{n-2}}$. Il est tout-à-fait normal que l'estimée ponctuelle invariante par le changement d'échelle qui laisse invariant l'équation soit également l'estimée ponctuelle qui constitue la limite pour un théorème de convergence dominée dans l'intégrale d'énergie.

estimée intermédiaire entre celle de la proposition 2.1 (point (d)) et celle voulue ici.

Etape 1 (estimée intermédiaire) - Pour tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, il existe $R_\varepsilon > 0$ et $C_\varepsilon > 0$ tels que

$$u_\alpha(x) \leq C_\varepsilon \mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}(1-2\varepsilon)} r_\alpha(x)^{(2-n)(1-\varepsilon)}$$

pour tout $x \in M \setminus \bigcup_{i=1}^N B_{x_{i,\alpha}}(R_\varepsilon \mu_{i,\alpha})$ où

$$r_\alpha(x) = \min_{i=1,\dots,N} d_g(x_{i,\alpha}, x) .$$

La preuve de cette estimée repose sur deux ingrédients, l'estimée ponctuelle de la proposition 2.1 et le principe du maximum, combinés avec un bon choix de fonctions-tests. Il suffit en fait de montrer cette estimée pour des ε suffisamment petits puisqu'elle s'améliore quand ε décroît. L'opérateur $\Delta_g + h_0$ étant supposé sans noyau, il est coercif (cf. note de la page 46). Ainsi il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que l'opérateur $\Delta_g + h_0 - \varepsilon_0$ soit également coercif. Soit G la fonction de Green de cet opérateur, i.e. la fonction symétrique $G : M \times M \setminus \{(x, x), x \in M\} \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant

$$\Delta_{g,y} G(x, y) + (h_0(y) - \varepsilon_0) G(x, y) = \delta_x$$

au sens des distributions pour tout $x \in M$. Cette fonction de Green est strictement positive et, cf. (18), il existe $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ et $C_3 > 0$ telles que

$$\frac{1}{C_1} \leq d_g(x, y)^{n-2} G(x, y) \leq C_1 \quad (2.8)$$

et

$$\frac{|\nabla G(x, y)|^2}{G(x, y)^2} \geq C_2 d_g(x, y)^{-2} - C_3 \quad (2.9)$$

pour tous $(x, y) \in M^2$, $x \neq y$. Posons

$$\Phi_{\alpha,\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^N G(x_{i,\alpha}, x)^{1-\varepsilon}$$

pour $x \in M \setminus \{x_{i,\alpha}\}_{i=1,\dots,N}$. Soit maintenant un point $x_\alpha \in M$ maximum local de $\frac{u_\alpha}{\Phi_{\alpha,\varepsilon}}$. Comme $\nabla \left(\frac{u_\alpha}{\Phi_{\alpha,\varepsilon}} \right) (x_\alpha) = 0$ et $\Delta_g \left(\frac{u_\alpha}{\Phi_{\alpha,\varepsilon}} \right) (x_\alpha) \geq 0$,

$$\frac{\Delta_g u_\alpha(x_\alpha)}{u_\alpha(x_\alpha)} \geq \frac{\Delta_g \Phi_{\alpha,\varepsilon}(x_\alpha)}{\Phi_{\alpha,\varepsilon}(x_\alpha)} .$$

Ceci donne

$$\frac{\Delta_g \Phi_{\alpha,\varepsilon}(x_\alpha)}{\Phi_{\alpha,\varepsilon}(x_\alpha)} \leq u_\alpha(x_\alpha)^{\frac{4}{n-2}} - h_\alpha(x_\alpha) .$$

Il reste à remarquer par un simple calcul que

$$\begin{aligned}
\Delta_g \Phi_{\alpha,\varepsilon}(x_\alpha) &= -(h_0(x_\alpha) - \varepsilon_0)(1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^N G(x_{i,\alpha}, x_\alpha)^{1-\varepsilon} \\
&\quad + \varepsilon(1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^N \frac{|\nabla G(x_{i,\alpha}, x_\alpha)|^2}{G(x_{i,\alpha}, x_\alpha)^2} G(x_{i,\alpha}, x_\alpha)^{1-\varepsilon} \\
&= -(h_0(x_\alpha) - \varepsilon_0)(1 - \varepsilon) \Phi_{\alpha,\varepsilon} \\
&\quad + \varepsilon(1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^N \frac{|\nabla G(x_{i,\alpha}, x_\alpha)|^2}{G(x_{i,\alpha}, x_\alpha)^2} G(x_{i,\alpha}, x_\alpha)^{1-\varepsilon}
\end{aligned}$$

pour en déduire que

$$\begin{aligned}
\varepsilon(1 - \varepsilon) \Phi_{\alpha,\varepsilon}(x_\alpha)^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{|\nabla G(x_{i,\alpha}, x_\alpha)|^2}{G(x_{i,\alpha}, x_\alpha)^2} G(x_{i,\alpha}, x_\alpha)^{1-\varepsilon} \\
\leq u_\alpha(x_\alpha)^{\frac{4}{n-2}} - h_\alpha(x_\alpha) + (h_0(x_\alpha) - \varepsilon_0)(1 - \varepsilon) \\
\leq u_\alpha(x_\alpha)^{\frac{4}{n-2}} - \varepsilon_0(1 - \varepsilon) - \varepsilon h_0(x_\alpha) + o(1) \\
\leq u_\alpha(x_\alpha)^{\frac{4}{n-2}} - \frac{\varepsilon_0}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

quitte à choisir ε suffisamment petit. En utilisant le point (a) de la proposition 2.1 et puisque u_0 est supposée nulle, on voit déjà, en utilisant que le terme de gauche est positif ou nul, que $r_\alpha(x_\alpha) \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$. Il n'est alors pas difficile en utilisant (2.8) et (2.9) de minorer le terme de gauche par

$$\varepsilon(1 - \varepsilon) \frac{N}{C_1^{2-2\varepsilon}} (C_2 r_\alpha(x_\alpha)^{-2} - C_3)$$

et d'en déduire que

$$r_\alpha(x_\alpha)^2 u_\alpha(x_\alpha)^{\frac{4}{n-2}} \geq \varepsilon(1 - \varepsilon) \frac{NC_2}{C_1^{2-2\varepsilon}} + o(1).$$

Grâce à l'estimée (d) de la proposition 2.1, il en découle que

$$r_\alpha(x_\alpha)^2 \left(\sum_{i=1}^N B_{i,\alpha}(x_\alpha) \right)^{\frac{4}{n-2}} \geq \varepsilon(1 - \varepsilon) \frac{NC_2}{C_1^{2-2\varepsilon}} + o(1).$$

Ceci n'est possible que si $x_\alpha \in \bigcup_{i=1}^N B_{x_{i,\alpha}}(R_\varepsilon \mu_{i,\alpha})$ pour un certain $R_\varepsilon > 0$ ne dépendant que de ε . Ainsi, la fonction $\frac{u_\alpha}{\Phi_{\alpha,\varepsilon}}$ n'admet pas de maxima locaux en-dehors

de $\bigcup_{i=1}^N B_{x_i, \alpha}(R_\varepsilon \mu_{i, \alpha})$. Ainsi

$$\sup_{M \setminus \bigcup_{i=1}^N B_{x_i, \alpha}(R_\varepsilon \mu_{i, \alpha})} \frac{u_\alpha}{\Phi_\alpha^\varepsilon} = \sup_{\partial(\bigcup_{i=1}^N B_{x_i, \alpha}(R_\varepsilon \mu_{i, \alpha}))} \frac{u_\alpha}{\Phi_\alpha^\varepsilon}.$$

Les estimées (2.8) et (2.9) et le point (b) de la proposition 2.1 permettent ensuite de conclure la preuve de cette première étape.

Etape 2 - Nous pouvons maintenant démontrer l'estimée de la proposition 2.2 qui correspond en gros à prendre $\varepsilon = 0$ dans l'estimée de l'étape 1. Mais il y a un saut qualitatif entre $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon = 0$. L'hypothèse $\varepsilon > 0$ était cruciale dans l'étape précédente et il n'existe d'ailleurs pas à notre connaissance de preuve directe par principe du maximum de l'estimée finale (dans un cadre aussi général). Ici, nous allons utiliser la formule de représentation de Green pour obtenir le résultat. On note G_α la fonction de Green de l'opérateur $\Delta_g + h_\alpha$. Comme $h_\alpha \rightarrow h_0$ dans $C^{0, \eta}(M)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$, les estimées sur les fonctions de Green sont uniformes en α et nous avons en particulier l'estimée (2.8) sur G_α pour tout α assez grand²⁰. Grâce à la formule de représentation de Green et à l'équation satisfaite par u_α , nous pouvons ensuite écrire que

$$u_\alpha(x_\alpha) = \int_M G_\alpha(x_\alpha, x) u_\alpha(x)^{\frac{n+2}{n-2}} dv_g \leq C_1 \int_M d_g(x_\alpha, x)^{2-n} u_\alpha(x)^{\frac{n+2}{n-2}} dv_g$$

pour toute suite (x_α) de points de M . Fixons $0 < \varepsilon < \frac{2}{n+2}$ et utilisons l'estimée de l'étape 1 pour estimer une partie de cette intégrale. Plus précisément, écrivons que

$$\begin{aligned} & \int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^N B_{x_i, \alpha}(R_\varepsilon \mu_\alpha)} d_g(x_\alpha, x)^{2-n} u_\alpha(x)^{\frac{n+2}{n-2}} dv_g \\ & \leq C_\varepsilon^{\frac{n+2}{n-2}} \mu_\alpha^{\frac{n+2}{2}(1-2\varepsilon)} \int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^N B_{x_i, \alpha}(R_\varepsilon \mu_\alpha)} d_g(x_\alpha, x)^{2-n} r_\alpha(x)^{-(n+2)(1-\varepsilon)} dv_g \\ & \leq C_\varepsilon^{\frac{n+2}{n-2}} \mu_\alpha^{\frac{n+2}{2}(1-2\varepsilon)} \sum_{i=1}^N \int_{M \setminus B_{x_i, \alpha}(R_\varepsilon \mu_\alpha)} d_g(x_\alpha, x)^{2-n} d_g(x_i, \alpha)^{-(n+2)(1-\varepsilon)} dv_g \\ & = O\left(\sum_{i=1}^N \mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}} (d_g(x_i, \alpha, x_\alpha) + \mu_\alpha)^{2-n}\right) \end{aligned}$$

20. Evidemment, la constante C_1 se doit d'être changée mais peut être choisie uniforme en α .

par simple calcul puisque $\varepsilon < \frac{2}{n+2}$. Pour l'autre partie de l'intégrale, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} & \int_{\bigcup_{i=1}^N B_{x_{i,\alpha}}(R_\varepsilon \mu_\alpha)} d_g(x_\alpha, x)^{2-n} u_\alpha(x)^{\frac{n+2}{n-2}} dv_g \\ &= O\left(\sum_{i=1}^N d_g(x_{i,\alpha}, x_\alpha)^{2-n} \int_{B_{x_{i,\alpha}}(R_\varepsilon \mu_\alpha)} d_g(x_\alpha, x)^{2-n} u_\alpha(x)^{\frac{n+2}{n-2}} dv_g\right) \\ &= O\left(\sum_{i=1}^N \mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}} d_g(x_\alpha, x_{i,\alpha})^{2-n}\right) \end{aligned}$$

grâce aux inégalités de Hölder et à la borne a priori sur l'énergie dès lors que

$$\frac{d_g(x_{i,\alpha}, x_\alpha)}{\mu_\alpha} \rightarrow +\infty \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty$$

pour tout $1 \leq i \leq N$. En combinant ces deux estimées, nous arrivons à

$$u_\alpha(x_\alpha) = O\left(\mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}} \left(\min_{i=1,\dots,N} (d_g(x_{i,\alpha}, x) + \mu_{i,\alpha})\right)^{2-n}\right)$$

dès que la relation ci-dessus est vérifiée. Supposons maintenant que $r_\alpha(x_\alpha) = O(\mu_\alpha)$. Le point (d) de la proposition 2.1 donne alors immédiatement que

$$\begin{aligned} u_\alpha(x_\alpha) &= O\left(\sum_{i=1}^N \mu_{i,\alpha}^{\frac{n-2}{2}} (d_g(x_{i,\alpha}, x_\alpha) + \mu_{i,\alpha})^{2-n}\right) \\ &\quad + o\left(\left(\min_{i=1,\dots,N} (d_g(x_{i,\alpha}, x_\alpha) + \mu_{i,\alpha})\right)^{1-\frac{n}{2}}\right) \\ &= O\left(\mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}} \left(\min_{i=1,\dots,N} (d_g(x_{i,\alpha}, x_\alpha) + \mu_{i,\alpha})\right)^{2-n}\right) \\ &\quad + o\left(\left(\min_{i=1,\dots,N} (d_g(x_{i,\alpha}, x_\alpha) + \mu_{i,\alpha})\right)^{1-\frac{n}{2}}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu puisque

$$\min_{i=1,\dots,N} (d_g(x_{i,\alpha}, x_\alpha) + \mu_{i,\alpha}) = O\left(\mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}}\right)$$

dans ce cas. Ceci achève (l'esquisse de) la preuve de l'estimée de la proposition 2.2.

Dans le cas où la limite faible u_0 est non-nulle, la preuve est essentiellement plus technique. Il faut tout d'abord démontrer une version locale de l'estimée à ε près (c'est-à-dire au voisinage des points de concentration) pour l'étendre ensuite

par des arguments de théorie elliptique standard à toute la variété. L'estimée obtenue n'est pas tout-à-fait la bonne, elle fait intervenir des termes supplémentaires légèrement singulier (de moins en moins lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$). De même, pour passer à l'estimée avec $\varepsilon = 0$, il faut travailler un peu plus pour prendre soin de ces nouveaux termes. Mais le schéma général de la preuve reste dans l'ensemble le même.

Des estimées ponctuelles fortes de ce type, dans le cas d'un point de concentration isolé, i.e. dans le cas d'une bulle, remontent dans le cas euclidien à Han [75] et dans le cas vraiment riemannien (i.e. non localement conformément plat) à Hebey-Vaugon [83, 84].

1.3. Hiérarchie des points de concentration et contrôle optimal. L'objectif de cette étape est de parvenir à une estimée ponctuelle par au-dessus de la suite (u_α) qui soit optimale, c'est-à-dire un contrôle ponctuel de la suite (u_α) par la somme des bulles :

PROPOSITION 2.3. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soit (u_α) une suite de solutions C^2 positives de l'équation*

$$\Delta_g u_\alpha + h_\alpha u_\alpha = u_\alpha^{\frac{n+2}{n-2}}$$

avec $h_\alpha \rightarrow h_0$ dans $C^{0,\eta}(M)$ pour un certain $\eta > 0$. Alors il existe $C > 0$ telle que, après extraction d'une sous-suite,

$$|u_\alpha(x) - u_0(x)| \leq C \sum_{i=1}^N B_{i,\alpha}(x) + \varepsilon_\alpha \|u_0\|_\infty$$

pour tout $x \in M$ où les suites $(x_{i,\alpha})_{i=1,\dots,N}$ et $(\mu_{i,\alpha})_{i=1,\dots,N}$ et la fonction u_0 sont données par la proposition 2.1 et où (ε_α) est une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

Ordonnons les points de concentration par ordre décroissant de hauteur :

$$\mu_\alpha = \mu_{1,\alpha} \geq \mu_{2,\alpha} \geq \dots \geq \mu_{N,\alpha}.$$

L'estimée de la proposition s'obtient par récurrence sur k en montrant successivement que les estimées suivantes ont lieu :

$$|u_\alpha(x) - u_0(x)| \leq C \left(\sum_{i=1}^k B_{i,\alpha}(x) + \mu_{k,\alpha}^{\frac{n-2}{2}} \left(\min_{i=k+1,\dots,N} (d_g(x, x_{i,\alpha}) + \mu_{i,\alpha}) \right)^{2-n} \right) + \varepsilon_\alpha \|u_0\|_\infty.$$

Il faut remarquer que cette estimée pour $k = 1$ est exactement celle de la proposition 2.2 et que, pour $k = n$, nous obtenons l'estimée désirée. Comme dans la sous-section précédente, le cas $u_0 \not\equiv 0$ est techniquement plus délicat que la cas où la limite faible est nulle. Mais même dans ce cas, des difficultés apparaissent. L'idée

naturelle est d'imiter la preuve de l'estimée pour $k = 1$ pour passer de k à $k + 1$, i.e. passer par des estimées à ε près grâce au principe du maximum et au point (d) de la proposition 2.1 en choisissant des fonctions-tests adéquates puis d'utiliser la formule de représentation de Green pour passer à l'estimée avec $\varepsilon = 0$. Ce schéma fonctionne à quelques modifications d'importance près. Il est quasi-impossible de trouver les bonnes fonctions-tests qui donnent l'estimée à ε près attendue. Le principe du maximum ne donne qu'une estimée à ε près a priori moins bonne que celle voulue. La formule de représentation de Green donne alors une estimée (avec $\varepsilon = 0$) un peu moins bonne que celle voulue (en gros, $\mu_{k+1,\alpha}$ est remplacée par une quantité un peu plus grande). Il faut donc une étape supplémentaire pour montrer que cette quantité peut être en fait prise égale à $\mu_{k+1,\alpha}$. Ce raisonnement par récurrence sur les points de concentration constitue le coeur de la preuve (et sa partie la plus longue et technique). Même si, par rapport à (18), elle a été légèrement simplifiée dans (27)²¹, il paraît illusoire d'espérer la résumer en quelques pages. Nous renvoyons donc à (18) et (27) pour la preuve.

1.4. Asymptotique précise. Une fois l'estimée optimale par au-dessus obtenue, l'asymptotique précise du théorème 2.1 est simple à obtenir. Il suffit d'écrire avec la formule de représentation de Green que

$$\begin{aligned} u_\alpha(x_\alpha) - u_0(x_\alpha) &= \int_M \mathcal{G}(x_\alpha, x) \left(u_\alpha(x)^{\frac{n+2}{n-2}} - u_0(x)^{\frac{n+2}{n-2}} \right) dv_g(x) \\ &\quad + \int_M \mathcal{G}(x_\alpha, x) (h_0(x) - h_\alpha(x)) u_\alpha(x) dv_g(x) \end{aligned}$$

pour toute suite (x_α) de points de M où \mathcal{G} est la fonction de Green de l'opérateur $\Delta_g + h_0$ et d'estimer les différents termes grâce à la proposition 2.3 et au point (b) de la proposition 2.1. Nous ne le ferons pas dans ce mémoire et renvoyons à (18) pour les détails.

1.5. Conclusion. Résumons brièvement cette preuve. Tout d'abord, il faut trouver un bon changement d'échelle, une bonne renormalisation de la suite de fonctions au voisinage d'un point où elle explose, et ce afin d'obtenir un profil limite. L'étape suivante consiste à trouver une estimée ponctuelle invariante par ce même changement d'échelle qui va permettre de détecter, en deux temps, l'ensemble des points de concentration. La partie la plus longue et la plus technique de la preuve consiste ensuite en la transformation de l'estimée ponctuelle faible en estimée ponctuelle forte. Même si les outils (principe du maximum et fonction de Green) sont simples à décrire, leur agencement n'est pas évident à cause de l'imbrication des bulles les unes dans les autres.

21. En particulier, (18) contenait une hiérarchisation plus compliquée des points de concentration (en construisant un arbre généalogique de bulles, où les enfants d'une bulle étaient les bulles qui se trouvaient au-dessus de celle-ci) dont (27) se passe en grande partie.

Le théorème 2.1 donne donc une description précise dans l'espace C^0 de toute suite de solutions d'équations de type Yamabe qui explose. Il est à ce point de vue optimal. Il resterait bien entendu à comprendre de quelles façons les diverses bulles peuvent interagir en fonction du potentiel h_α , de la géométrie de la variété et de la dimension. Ceci sera l'objet de la section 2 du chap. 3.

A titre de remarque, l'hypothèse que l'opérateur limite $\Delta_g + h$ ait un noyau trivial est nécessaire pour obtenir la description ponctuelle du théorème 2.1. En effet, comme démontré dans l'appendice B de **(18)**, si une suite (u_α) de solutions strictement positives de

$$\Delta_g u_\alpha + h_\alpha u_\alpha = u_\alpha^{\frac{n+2}{n-2}}$$

avec $h_\alpha \rightarrow h_0$ dans $C^{0,\eta}(M)$ vérifie

$$u_\alpha(x_\alpha) = (1 + o(1))u_0(x_\alpha) + \sum_{i=1}^N (1 + o(1))B_{i,\alpha}(x_\alpha) + O\left(\left(\max_{i=1,\dots,N} \mu_{i,\alpha}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right)$$

pour toute suite de points (x_α) , alors l'opérateur $\Delta_g + h_0$ est coercif et en particulier a un noyau trivial.

2. Equations d'ordre 4

Nous allons donner une première illustration, particulièrement simple, de la puissance de la méthode ponctuelle quand il s'agit de quantifier les niveaux d'énergie auxquels des défauts de compacité peuvent se produire. Nous allons nous intéresser à des équations d'ordre 4 issues de la géométrie conforme (au sens où les équations d'ordre 2 de la section 1 l'étaient) et décrire les résultats de **(22)**.

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension 4. Considérons sur celle-ci l'équation d'ordre 4 avec non-linéarité exponentielle :

$$\Delta_g^2 u - \operatorname{div}_g(Adu) + b = fe^u$$

où b et f sont deux fonctions régulières sur M et A est un champ de $(2, 0)$ -tenseurs symétriques. Cette équation est modélée sur l'équation de Q -courbure, équation de prescription de la Q -courbure dans une classe conforme qui est en dimension 4 l'analogue de l'équation de prescription de la courbure scalaire²² en dimension 2. La Q -courbure a fait l'objet de nombreux travaux ces dernières années. Nous renvoyons sur ce sujet à l'article de survol **[36]** et aux références qui y sont contenues (voir aussi **[125]**).

Considérons maintenant une suite (u_α) de solutions de

$$\Delta_g^2 u_\alpha - \operatorname{div}_g(A_\alpha du_\alpha) + b_\alpha = f_\alpha e^{u_\alpha} \quad (2.10)$$

où les suites (b_α) , (f_α) et (A_α) convergent vers des objets de même nature b_0 , f_0 et A_0 , en topologie C^2 - pour fixer les idées mais ce n'est pas optimal. Supposons

22. Celle-ci s'écrit, en dimension 2, $\Delta_g u + S_g = fe^u$.

que la suite (u_α) explose lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, i.e. $\sup_M u_\alpha \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$. Le théorème ci-dessous donne alors un résultat de quantification d'énergie pour les niveaux d'explosion mais également une asymptotique relativement précise de la suite (u_α) et des informations sur la localisation éventuelle des points de concentration. Avant d'énoncer le résultat, quelques notations sont nécessaires. Nous noterons $L_0 = \Delta_g^2 - \text{div}_g(A_0 du)$. Nous supposons dans la suite que son noyau ne contient que les constantes. Alors sa fonction de Green G est bien définie à une constante près²³ et peut s'écrire sous la forme

$$G(x, y) = \frac{1}{8\pi^2} \ln \frac{1}{d_g(x, y)} + \beta(x, y)$$

pour $(x, y) \in M^2$, $x \neq y$. Ici, la fonction β est dans $C^1(M \times M)$. C'est la partie régulière de la fonction de Green G . Posons également

$$\varphi(x) = \int_M G(x, y) b_0(y) dv_g.$$

Enonçons maintenant le résultat démontré dans **(22)** :

THÉORÈME 2.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension 4. Soit (u_α) une suite de solutions de (2.10) qui explose. Supposons que le noyau de L_0 ne contienne que les fonctions constantes et que la limite f_0 soit strictement positive. Alors, à extraction près d'une sous-suite,*

(a) (quantification) *Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$\int_M b_0 dv_g = 64\pi^2 N.$$

(b) (asymptotique) *Il existe $\{x_i\}_{i=1, \dots, N}$ tel que*

$$u_\alpha - \frac{1}{\text{Vol}_g(M)} \int_M u_\alpha dv_g \rightarrow 64\pi^2 \sum_{i=1}^N G(x_i, \cdot) - \varphi$$

dans $C_{loc}^2(M \setminus \{x_i\}_{i=1, \dots, N})$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

(c) (localisation) *Enfin,*

$$64\pi^2 \nabla_y \beta(x_i, x_i) + 64\pi^2 \sum_{j \neq i} \nabla_x G(x_i, x_j) - \nabla \varphi(x_i) = -\frac{\nabla f_0(x_i)}{f_0(x_i)}$$

pour tout $1 \leq i \leq N$.

23. Que nous fixons pour la suite, par exemple en demandant que le minimum de la fonction de Green soit 1. Mais ce choix est arbitraire et le lecteur pourra s'assurer que les résultats du théorème 2.2 sont invariants par ajout d'une constante à cette fonction de Green.

Le point (a) correspond bien à la quantification annoncée. Celle-ci a lieu sur l'intégrale de b_0 qui correspond également à $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_M f_\alpha e^{u_\alpha} dv_g$, ce qui joue le rôle d'énergie ici. Le point (b) donne un comportement asymptotique de la suite (u_α) loin des points de concentration qui sont d'ailleurs isolés (il n'y a pas de phénomène de bulles sur bulles pour des non-linéarités exponentielles en dimension critique). Le comportement de la suite tout près des points de concentration est régi par un profil standard. Il resterait à obtenir un comportement asymptotique dans la zone intermédiaire. Ceci est partiellement fait - mais de manière non optimale - au cours de la preuve de **(22)**. Le point (c) est une contrainte sur la localisation de ces différents points de concentration. Il convient de remarquer que seul ce dernier point dépend de la fonction f_0 (hormis le fait qu'elle soit strictement positive).

Le point (a) donne une condition simple sur l'intégrale de b_0 pour que l'ensemble des solutions de l'équation soit borné dans $C^2(M)$. Il suffit que $\frac{1}{64\pi^2} \int_M b_0 dv_g$ ne soit pas un entier. En particulier, des résultats de compacité pour l'équation de Q -courbure prescrite en découlent. Ce point précis du théorème a été démontré indépendamment par Malchiodi **[123]** et est utilisé de manière cruciale en combinaison avec des travaux de Ding-Jost-Li-Wang **[55]** dans **[57]** pour obtenir des résultats d'existence de Q -courbure constante dans une classe conforme donnée (moyennant que l'intégrale de cette courbure évite un ensemble dénombrable de valeurs). Les points (b) et (c) sont une première étape dans l'analyse des défauts de compacité lorsque $\int_M b_\alpha dv_g$ traverse une des valeurs interdites par le point (a) et laissent un espoir pour compter²⁴ précisément le nombre de solutions de l'équation pour toute fonction b_0 . Sur ce sujet, les travaux de Chen-Lin **[38]**, voir aussi **[118]**, en dimension 2 sont instructifs et ceux de **[119]** en dimension 4 constituent une étape supplémentaire.

Indiquons en quelques étapes comment se démontre un tel résultat. Tout d'abord, prenons un point de maximum x_α de la fonction u_α , i.e. $u_\alpha(x_\alpha) = \max_M u_\alpha$, qui, par hypothèse, tend vers $+\infty$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$. Le changement d'échelle adapté - le réglage du microscope - à ce genre d'équations est bien connu depuis les travaux sur des non-linéarités exponentielles avec le laplacien en dimension 2 : en posant

$$v_\alpha(x) = u_\alpha(\exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x)) - u_\alpha(x_\alpha)$$

pour $x \in B_0(\delta\mu_\alpha^{-1})$, $0 < \delta < \frac{1}{2}i_g(M)$ fixé avec (μ_α) une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$ définie par

$$f_\alpha(x_\alpha) \mu_\alpha^4 e^{u_\alpha(x_\alpha)} = 1,$$

il est possible de montrer que

$$v_\alpha \rightarrow V \text{ dans } C_{loc}^2(\mathbb{R}^4) \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty$$

24. au sens de la théorie du degré.

où V vérifie l'équation

$$\Delta_\xi^2 V = e^V$$

dans \mathbb{R}^4 et $V \leq V(0) = 0$. De plus, $e^V \in L^1(\mathbb{R}^4)$. Ceci vient du fait que $\left(\int_M f_\alpha e^{u_\alpha} dv_g\right)$ est uniformément bornée²⁵. A titre de remarque, cette quantité jouant le rôle d'énergie pour notre équation, il vient gratuitement que la suite (u_α) est d'énergie uniformément bornée. Malheureusement, ceci ne suffit pas tout-à-fait pour classer exactement l'ensemble des solutions de l'équation-limite ci-dessus. En effet, Lin [120] a démontré que, moyennant ces informations sur V , soit

$$V(x) = -4 \ln \left(1 + \frac{|x|^2}{8\sqrt{6}} \right),$$

soit il existe $a > 0$ tel que $\Delta_\xi V \geq a$ sur \mathbb{R}^4 . Ce défaut de classification²⁶ est essentiellement dû à la présence de fonctions dans le noyau de Δ_ξ^2 qui sont majorées sur \mathbb{R}^4 et qui ne sont pas constantes²⁷. Tout le problème est donc d'éliminer la deuxième possibilité. Ceci peut se faire en utilisant l'équation vérifiée par u_α et plus précisément en écrivant grâce à la formule de représentation de Green que

$$\begin{aligned} & \mu_\alpha^{-2} \int_{B_{x_\alpha}(R\mu_\alpha)} |\Delta_g u_\alpha| dv_g \\ & \leq C \mu_\alpha^{-2} \int_{x \in B_{x_\alpha}(R\mu_\alpha)} \int_{y \in M} |\Delta_g G_\alpha(x, y)| (e^{u_\alpha}(y) + 1) dv_g(y) dv_g(x) \\ & \leq C \int_{y \in M} (e^{u_\alpha}(y) + 1) \left(\mu_\alpha^{-2} \int_{x \in B_{x_\alpha}(R\mu_\alpha)} d_g(x, y)^{-2} dv_g(x) \right) dv_g(y) \\ & \leq CR^2 \end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de R et α changeant d'une ligne à l'autre, G_α est la fonction de Green de l'opérateur $\Delta_g^2 - \text{div}_g(A_\alpha d \cdot)$, opérateur qui a un noyau réduit aux constantes pour α grand puisque cette propriété a lieu à la limite. Ici, il faut utiliser quelques estimées standard sur la fonction de Green. Un passage à la limite lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$ donne alors

$$\int_{B_0(R)} |\Delta_\xi V| dx \leq CR^2$$

pour une constante C indépendante de R . Ceci exclut clairement la deuxième possibilité et nous donne la convergence de v_α vers la solution de l'équation-limite

25. ce qui suit d'une simple intégration de l'équation satisfaite par u_α .

26. à comparer avec la classification des solutions de l'équation analogue en dimension 2, cf. [39].

27. Ceci est à comparer avec le théorème de Liouville qui assure que toute fonction harmonique majorée sur tout l'espace est constante.

désirée. Ainsi, l'origine de la solution V nous permet tout de même de la caractériser²⁸. Il faut remarquer que le point de concentration ainsi construit transporte un quantum d'énergie puisque

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{B_{x_\alpha}(R\mu_\alpha)} f_\alpha e^{u_\alpha} dv_g = \int_{\mathbb{R}^4} e^V dx = 64\pi^2.$$

Pour trouver les autres points de concentration, il faut concocter une estimée ponctuelle invariante par le changement d'échelle ci-dessus. La quantité

$$\Phi_\alpha(x) = d_g(x_\alpha, x)^4 e^{u_\alpha(x)}$$

a cette propriété. En effet,

$$\Phi_\alpha(\exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x)) = |x|^4 f_\alpha(x_\alpha)^{-1} e^{v_\alpha(x)}$$

et une borne sur Φ_α est équivalente à une borne sur la quantité analogue construite à partir de v_α . En reprenant le schéma de preuve de la section 1.1.2, il est ainsi possible de construire un deuxième point de concentration dès que $\sup_M \Phi_\alpha \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$, deuxième point de concentration qui n'interagit pas au niveau énergétique avec le premier et qui apporte son quantum d'énergie. Le processus peut ainsi se continuer et est certain de s'arrêter faute d'énergie disponible. En suivant ce schéma de preuve, le résultat obtenu est le suivant : il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et N suites de points $(x_{i,\alpha})_{i=1,\dots,N}$ convergentes tels qu'après extraction d'une sous-suite, les assertions suivantes soient vérifiées :

(i) $\frac{d_g(x_{i,\alpha}, x_{j,\alpha})}{\mu_{i,\alpha}} \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$, avec

$$\mu_{i,\alpha}^4 = f_\alpha(x_{i,\alpha})^{-1} e^{-u_\alpha(x_{i,\alpha})} \rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty.$$

(ii) $u_\alpha(\exp_{x_{i,\alpha}}(\mu_{i,\alpha} x)) - u_\alpha(x_{i,\alpha}) \rightarrow V$ dans $C_{loc}^2(\mathbb{R}^4)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ pour tout $1 \leq i \leq N$ où V est comme ci-dessus. En conséquence de quoi,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{B_{x_{i,\alpha}}(R\mu_{i,\alpha})} f_\alpha e^{u_\alpha} dv_g = 64\pi^2$$

pour tout $1 \leq i \leq N$.

(iii) La quantité $\left(\min_{i=1,\dots,N} d_g(x_{i,\alpha}, x) \right)^4 e^{u_\alpha(x)}$ est uniformément bornée en α et x .

Par effet régularisant des EDPs elliptiques, l'estimée ponctuelle (iii) passe aux gradients successifs de u_α et la quantité $\left(\min_{i=1,\dots,N} d_g(x_{i,\alpha}, x) \right)^k |\nabla^k u_\alpha|_g$ est uniformément bornée en α et x pour $k = 1, 2, 3$.

²⁸. Dans certains cas, il n'est pas possible de s'en sortir comme cela et il faut alors faire face à une multitude de profils asymptotiques, cf. [144].

Evidemment, cette estimée ponctuelle faible est juste insuffisante pour conclure que les points de concentration prennent toute l'énergie par théorème de convergence dominée de Lebesgue. Il faut donc réussir à améliorer un petit peu cette estimée, au moins dans un voisinage des points de concentration. Le problème ici est que l'opérateur $\Delta_g^2 - \operatorname{div}_g(A_\alpha d.)$ ne vérifie pas de principe du maximum. Par contre, l'estimée ci-dessus sur les gradients donne directement que les fonctions (u_α) sont comparables à leurs moyennes sur les sphères centrées en un point de concentration, tout du moins au voisinage de celui-ci. Obtenir des estimées sur les fonctions (u_α) revient donc à obtenir des estimées sur leurs moyennes. C'est en gros la stratégie utilisée dans la suite de la preuve. Nous ne la détaillerons pas dans ce mémoire.

Comparée à l'analyse ponctuelle de la section 1, celle-ci est infiniment plus simple. Le résultat de quantification est également plus simple à démontrer que celui de la section suivante. Il pourrait donc être intéressant de comprendre ce qui se passe si l'opérateur limite $\Delta_g^2 - \operatorname{div}_g(A_0 d.)$ a un noyau. En particulier, est-ce que le résultat de quantification reste vrai dans ce cadre? C'est à notre avis une des questions à regarder avant tout sur ce type d'équations où l'analyse semble plus simple.

3. Quantification en dimension 2

Dans cette section, qui décrit le travail **(23)**, nous allons illustrer sur un exemple encore plus frappant le type de résultats totalement inaccessibles par des méthodes d'énergie qu'il est possible d'obtenir grâce à l'approche ponctuelle développée dans la section 1. Nous allons repasser dans l'espace euclidien quoique un résultat analogue puisse sans aucun doute être démontré sur des espaces non-homogènes puisque la preuve n'utilise les symétries de l'espace euclidien que pour des raisons techniques²⁹.

Considérons Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et une équation du type

$$\Delta_\xi u = f(x, u) \text{ dans } \Omega, \quad u > 0 \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.11)$$

où f est une non-linéarité exponentielle critique. Pour fixer les idées, prenons

$$f(x, t) = h(x)te^{4\pi t^2}.$$

La constante 4π n'est pas très importante et n'est là que pour des questions ultérieures de normalisation agréable; le point important est que la non-linéarité

29. L'analyse du papier **(17)**, cf. section 1.3 du chap. 1, est un sous-cas de celle de **(23)** décrite ici et a, elle, été étendue au cadre riemannien dans **[173]**.

croisse en e^{u^2} , ce qui est en quelque sorte la vraie³⁰ non-linéarité critique en dimension 2 au vu de l'inégalité de Trudinger-Moser (cf. chap. 1, section 1.3). Pour l'exemple de non-linéarité f pris, les solutions de l'équation sont des points critiques (strictement positifs) de la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} h(x) e^{4\pi u^2} dx$$

définie et régulière (grâce à l'inégalité de Trudinger-Moser) sur $H_0^1(\Omega)$. Mais cette fonctionnelle ne satisfait pas la condition de Palais-Smale (globalement) - ceci n'est pas surprenant puisque l'inégalité de Trudinger-Moser a un aspect critique - et des suites de solutions de l'équation (2.11) peuvent développer des phénomènes de concentration.

Cette équation présente de fortes analogies avec l'équation de type Yamabe étudiée section 1. Il est donc naturel de se demander s'il est possible de décrire une suite de solutions de cette équation dans des espaces d'énergie, obtenir une quantification des niveaux d'explosion (comme cela avait été fait par Struwe [160] pour l'équation de type Yamabe) voire obtenir des estimées ponctuelles analogues à celles décrites section 1. La théorie ponctuelle pour cette équation semble inaccessible³¹ pour l'instant. Par contre, en utilisant certaines idées développées pour la théorie ponctuelle des équations de type Yamabe, il est possible d'obtenir des résultats de quantification et une décomposition dans l'espace d'énergie pour cette équation. Le résultat obtenu dans (23) est le suivant :

THÉORÈME 2.3. *Soit Ω un domaine régulier de \mathbb{R}^2 . Soit (f_α) une suite de fonctions à croissance critique uniforme dans Ω . Soit (u_α) une suite de solutions de*

$$\Delta u_\alpha = f_\alpha(x, u_\alpha) \text{ dans } \Omega, \quad u_\alpha > 0 \text{ dans } \Omega, \quad u_\alpha = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Supposons que $J_\alpha(u_\alpha) \rightarrow \beta$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ où J est la fonctionnelle d'énergie associée à l'équation, i.e.

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} \left(\int_0^{u(x)} f_\alpha(x, t) dt \right) dx.$$

Alors il existe $u_\infty \in H_0^1(\Omega)$ solution de l'équation-limite $\Delta u_\infty = f_\infty(x, u_\infty)$ avec condition de Dirichlet au bord, éventuellement nulle, et un entier N tels que, après

30. Elle est en tout cas "plus critique" et plus difficile à comprendre que la non-linéarité en e^u qui présente également des défauts de compacité et que nous avons traité dans le paragraphe précédent avec une équation en bi-laplacien. L'analyse asymptotique pour les équations de courbure scalaire prescrite en dimension 2, i.e. avec une non-linéarité e^u , a été très largement étudiée ces 20 dernières années. Voici quelques références sur le sujet : [26, 38, 113]. Le lecteur trouvera une liste plus étoffée dans l'article de survol de Lin [118].

31. ou, tout du moins, le chemin pour y parvenir est escarpé et semé d'embûches.

extraction d'une sous-suite,

$$\beta = J_\infty(u_\infty) + \frac{N}{2}.$$

Enoncé ainsi, ceci est un résultat de quantification des niveaux d'explosion³² de la suite (u_α) . En fait, la preuve fournit également une décomposition de u_α dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ en termes de bulles standard mais la description en est un peu compliquée.

Qu'est-ce qu'une suite de fonctions à croissance critique uniforme dans Ω ? Pour une définition précise, nous renvoyons à **(23)**. Il suffit de savoir que cela signifie en gros que $f_\alpha(x, t)$ se comporte comme $e^{4\pi t^2}$ pour t grand uniformément en x et α et que la suite converge vers une limite f_∞ . Cette classe comporte en particulier toutes les suites de fonctions du type

$$f_\alpha(x, t) = h_\alpha(x) P_\alpha(t) e^{4\pi t^2}$$

à condition que (h_α) soit une suite de fonctions régulières strictement positives convergente dans C^1 et que P_α vérifie les propriétés suivantes : P_α est régulière, impaire et strictement positive dès que $t > 0$ et est à croissance sous-critique. Une suite convergente de polynômes convient, ou même des termes en $e^{\eta t}$ pour $\eta < 2$. Pour la discussion qui suit, nous nous contenterons de prendre des suites de fonctions (f_ε) indépendantes de la variable x car cela simplifie beaucoup les notations.

Ce théorème répond à une question naturelle, au vu de ce qui se passe pour les équations de type Yamabe, ou pour les équations avec non-linéarité exponentielle en dimension 2, mais a en fait une histoire assez courte, faute d'outils disponibles jusqu'à récemment. Adimurthi et Struwe **[3]** l'ont démontré dans le cas où il est certain que $N = 1$ et $u_0 \equiv 0$. Ils font une hypothèse sur β qui rend exclusive l'alternative $u_0 \not\equiv 0$ ou développement d'un phénomène de concentration et qui interdit également le développement de plusieurs bulles. De plus, ils se restreignent à une classe très spéciale de non-linéarités (f_ε) (qui, en particulier, ne dépendent pas de x). Le théorème ci-dessus répond d'ailleurs à une question explicitement posée dans **[3]**. Leur apport essentiel est d'avoir découvert le changement d'échelle, un peu étrange au premier abord, adapté à la compréhension du phénomène d'explosion. Par contre, la méthode utilisée étant essentiellement de type énergie, ils étaient contraints de s'arrêter à la première bulle. En effet, pour détecter une éventuelle deuxième bulle, cette méthode demande de soustraire la première bulle à la solution mais, ici, l'équation vérifiée par cette nouvelle suite change dramatiquement de nature (à cause de la non-linéarité sauvage). Il semblerait de plus, mais c'est un travail à faire, que ce résultat de quantification soit faux pour des suites de Palais-Smale. C'est le travail de Adimurthi et Prashanth **[2]** qui exhibe deux types de profil asymptotique pour l'explosion de suites de Palais-Smale qui

32. Comparer à (2.4).

appuie cette intuition. Il devrait en effet être possible de combiner ces deux types de profil pour violer la quantification pour des suites de Palais-Smale.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons esquisser la preuve du théorème 2.3 en comparant celle-ci à la preuve du théorème 2.1.

3.1. Le premier point de concentration. Dans toute la suite, et pour avoir une bonne idée de ce qui se passe, il faut penser à une non-linéarité

$$f_\alpha(x, t) = te^{4\pi t^2} .$$

Quoique très restrictif, cet exemple est significatif.

Tout d'abord, un simple argument permet de montrer que l'hypothèse du théorème " $J_\alpha(u_\alpha) \rightarrow \beta$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ " donne une borne a priori sur la norme L^2 du gradient de u_α . Ainsi, la suite (u_α) est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et, à extraction d'une sous-suite près, elle converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers une solution u_∞ , éventuellement nulle, de l'équation-limite. Si jamais la suite (u_α) était uniformément bornée dans $L^\infty(\Omega)$, les plongements compacts de Sobolev donneraient immédiatement que la convergence est forte (et a même lieu dans C^0) et donc le résultat de quantification avec $N = 0$. Nous supposons donc dorénavant que

$$\sup_{\Omega} u_\alpha \rightarrow +\infty \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty .$$

Prenons un point $x_\alpha \in \Omega$ tel que $u_\alpha(x_\alpha) = \sup_{\Omega} u_\alpha$. L'objectif est de trouver le changement d'échelle adéquat, i.e. de régler correctement le microscope, afin de voir ce qui se passe au voisinage de ce point. Soit une suite (μ_α) de réels strictement positifs convergeant vers 0. Posons

$$v_\alpha(x) = u_\alpha(x_\alpha + \mu_\alpha x)$$

définie sur $\Omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } x_\alpha + \mu_\alpha x \in \Omega\}$. Il est clair qu'à extraction près, Ω_α converge soit vers l'espace \mathbb{R}^2 tout entier - ce qui correspond à $d(x_\alpha, \partial\Omega) \gg \mu_\alpha$ - soit, après une rotation qui ne change rien au problème, vers un demi-espace $[R_0, +\infty) \times \mathbb{R}$ - ce qui correspond à $\frac{d(x_\alpha, \partial\Omega)}{\mu_\alpha} \rightarrow R_0$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$. L'équation vérifiée par v_α est

$$\Delta v_\alpha = \mu_\alpha^2 f_\alpha(v_\alpha) .$$

La suite (v_α) vérifie également $v_\alpha \leq v_\alpha(0)$ dans Ω_α . Il faut maintenant écraser notre suite (v_α) . Pour des non-linéarités exponentielles, l'écrasement ne se fait pas par division par le maximum mais par retranchement de celui-ci. Ecrivons alors que

$$\Delta(v_\alpha - v_\alpha(0)) = \mu_\alpha^2 f_\alpha(v_\alpha) .$$

La seule chance d'obtenir de la convergence est de prendre μ_α suffisamment petit pour que le terme de droite soit uniformément borné. Comme la suite (f_α) est uniformément croissante pour t grand et tend vers $+\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, $f_\alpha(v_\alpha) \leq f_\alpha(v_\alpha(0))$ dans Ω_α pour α grand. Une première idée pourrait être de prendre $\mu_\alpha^2 =$

$\frac{1}{f_\alpha(v_\alpha(0))}$. Malheureusement, à cause de la présence du carré dans l'exponentielle, si jamais $(v_\alpha - v_\alpha(0))$ convergerait avec ce choix de μ_α , $\mu_\alpha^2 f_\alpha(v_\alpha)$ ne convergerait pas mais se comporterait comme $e^{8\pi v_\alpha(0)(v_\alpha - v_\alpha(0))}$. Il est clair qu'un passage à la limite serait ici inenvisageable. Il faudra donc choisir $\mu_\alpha^2 \ll \frac{1}{f_\alpha(v_\alpha(0))}$. Mais alors $v_\alpha - v_\alpha(0)$ a tendance à devenir harmonique. Il est d'ailleurs possible de montrer qu'elle converge, à extraction près, vers une fonction harmonique négative ou nulle sur l'espace tout entier³³, valant 0 en 0. D'après le théorème de Liouville, elle converge donc vers 0. D'où l'idée suivante : remultiplier cette suite $(v_\alpha - v_\alpha(0))$ par un certain $\lambda_\alpha \rightarrow +\infty$ afin de garder de la convergence mais vers une fonction non triviale. Pour résumer, les arguments, partiellement heuristiques, ci-dessus suggèrent de poser

$$w_\alpha = \lambda_\alpha (u_\alpha(x_\alpha + \mu_\alpha x) - u_\alpha(x_\alpha))$$

sur Ω_α avec $\mu_\alpha^2 \ll \frac{1}{f_\alpha(v_\alpha(0))}$ et $\lambda_\alpha \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$. Imaginons un instant que nous soyons dans le meilleur des mondes et que cette suite converge dans $C_{loc}^0(\mathbb{R}^2)$ vers une fonction w non triviale. A quelles conditions un passage à la limite dans l'équation

$$\Delta w_\alpha = \lambda_\alpha \mu_\alpha^2 f_\alpha(u_\alpha(x_\alpha) + \lambda_\alpha^{-1} w_\alpha)$$

est-il envisageable ? La réponse se lit très bien sur l'exemple simple $f_\alpha(t) = te^{4\pi t^2}$ puisque, dans ce cas,

$$\begin{aligned} f_\alpha(u_\alpha(x_\alpha) + \lambda_\alpha^{-1} w_\alpha) &= (u_\alpha(x_\alpha) + \lambda_\alpha^{-1} w_\alpha) e^{4\pi(u_\alpha(x_\alpha) + \lambda_\alpha^{-1} w_\alpha)^2} \\ &= (u_\alpha(x_\alpha) + o(1)) e^{4\pi u_\alpha(x_\alpha)^2} e^{8\pi u_\alpha(x_\alpha) \lambda_\alpha^{-1} (w + o(1))} e^{4\pi \lambda_\alpha^{-2} w_\alpha^2} \\ &= (1 + o(1)) u_\alpha(x_\alpha) e^{4\pi u_\alpha(x_\alpha)^2} e^{8\pi u_\alpha(x_\alpha) \lambda_\alpha^{-1} (w + o(1))} . \end{aligned}$$

Pour que cette quantité converge lorsque multipliée par $\lambda_\alpha \mu_\alpha^2$, le choix de λ_α et μ_α s'imposent : il faut prendre $\lambda_\alpha = 8\pi u_\alpha(x_\alpha)$ et $\mu_\alpha^2 = u_\alpha(x_\alpha)^2 e^{4\pi u_\alpha(x_\alpha)^2} = u_\alpha(x_\alpha) f_\alpha(u_\alpha(x_\alpha))$. C'est en effet un bon choix et le résultat suivant a lieu : à extraction d'une sous-suite près,

$w_\alpha = 8\pi u_\alpha(x_\alpha) (u_\alpha(x_\alpha + \mu_\alpha x) - u_\alpha(x_\alpha)) \rightarrow W$ dans $C_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ où $W \leq 0$, $W \not\equiv 0$, vérifie

$$\Delta W = 8\pi e^W \text{ dans } \mathbb{R}^2$$

et $W(0) = 0$. Il reste à montrer que $e^W \in L^1(\mathbb{R}^2)$, ce qui vient de la borne sur l'énergie de (u_α) , pour conclure, grâce au théorème de classification de Chen et Li [39], que

$$W(x) = -2 \ln(1 + \pi|x|^2) .$$

33. C'est à ce moment-là qu'est éliminée la convergence de Ω_α vers un demi-espace, l'idée essentielle étant que $v_\alpha - v_\alpha(0)$ devrait y devenir une fonction harmonique, nulle en 0, et tendant vers $-\infty$ sur le bord de ce demi-espace, ce qui est impossible.

Ceci donne un premier point de concentration. En particulier, nous avons l'estimée d'énergie suivante :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{B_{x_\alpha}(R\mu_\alpha)} u_\alpha f_\alpha(u_\alpha) dx = \int_{\mathbb{R}^2} e^W dx = 1 .$$

Il faut remarquer ici que, contrairement au cas des non-linéarités critiques en puissance en dimensions supérieures, la norme L^2 du gradient ne se concentre pas tout-à-fait au même endroit - et à une vitesse différente - que l'intégrale de $u_\alpha f_\alpha(u_\alpha)$. Globalement, ces deux quantités sont égales mais, par exemple,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{B_{x_\alpha}(R\mu_\alpha)} |\nabla u_\alpha|^2 dx \rightarrow 0$$

quand $\alpha \rightarrow +\infty$ pour tout $R > 0$. En fait, la norme L^2 du gradient se concentre sur un anneau autour de x_α et de manière diffuse³⁴. Une difficulté non négligeable de la preuve du résultat de quantification est la détection des vitesses de concentration de cette norme.

3.2. Comment trouver d'autres points de concentration ? Afin de trouver d'autres points de concentration, et selon l'idée développée dans la section 1.1.2, il faut trouver une estimée ponctuelle qui possède les mêmes invariances d'échelle que l'équation. Parler ici d'invariance d'échelle de l'équation est un léger abus si on pense au changement drastique de la nature de l'équation après le changement d'échelle opéré ci-dessus. Mais l'idée reste la même. Cette estimée ponctuelle est donnée par la quantité

$$\Phi_\alpha(x) = |x_\alpha - x|^2 u_\alpha(x) f_\alpha(u_\alpha(x)) .$$

Pourquoi cette quantité est-elle invariante par le changement d'échelle de la sous-section précédente ? C'est un tout petit peu délicat à voir. Le mieux est de réécrire Φ_α sous la forme

$$\Phi_\alpha(x) = |x_\alpha - x|^2 u_\alpha(x) \Delta u_\alpha(x) .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(x_\alpha + \mu_\alpha x) &= \mu_\alpha^2 |x|^2 u_\alpha(x_\alpha + \mu_\alpha x) \Delta u_\alpha(x_\alpha + \mu_\alpha x) \\ &= |x|^2 \frac{u_\alpha(x_\alpha + \mu_\alpha x)}{8\pi u_\alpha(x_\alpha)} \Delta w_\alpha(x) \end{aligned}$$

où w_α est la fonction renormalisée de la sous-section précédente. Il suffit ensuite de se convaincre que $\frac{u_\alpha(x_\alpha + \mu_\alpha x)}{u_\alpha(x_\alpha)}$ reste proche de 1 et que w_α est bornée sur une certaine distance pour admettre que cette estimée est "invariante" par le changement d'échelle de la sous-section précédente. Toujours est-il que cette estimée joue le rôle attendu d'elle puisqu'elle permet de détecter de nouveaux points de concentration.

³⁴. aucun changement d'échelle par dilatation ne donne quoique ce soit de visible pour cette norme.

Nous ne reprendrons pas les arguments en détail mais, si $\sup_{\Omega} \Phi_{\alpha} \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$, alors un point de maximum de Φ_{α} donne un deuxième point de concentration qui apporte sa contribution quantifiée d'énergie et n'interagit pas avec le précédent (au niveau énergétique). Le processus peut alors être continué jusqu'à épuisement, ce qui ne manquera de se produire puisque l'énergie totale de la suite (u_{α}) est uniformément bornée. Cette étape correspond à l'étape de "détection des bulles hautes" dans la théorie ponctuelle pour les équations de Yamabe. Malheureusement, c'est un des points faibles de cette preuve de quantification - et aussi ce qui la rend très longue - il semble délicat de détecter les "bulles basses" par une méthode ponctuelle. Nous sommes ainsi contraints de saturer en quelque sorte le nombre de bulles que nous obtenons artificiellement. Plus clairement, par la méthode ponctuelle ci-dessus, un certain nombre k de suites $(x_{i,\alpha}, \mu_{i,\alpha})_{i=1,\dots,k}$ avec les propriétés (a), (b) et (c) énoncées ci-dessous ont été trouvées (à extraction d'une sous-suite près). L'idée est ensuite de saturer le procédé en ajoutant, si elles existent, de nouvelles suites telles que leur ajout ne viole pas les propriétés (a), (b) et (c) ci-dessous. Et ce jusqu'à ce que ce soit impossible, ce qui arrivera nécessairement puisque la suite (u_{α}) a une énergie uniformément bornée. Nous arrivons alors au résultat suivant :

PROPOSITION 2.4. *Soit Ω un domaine régulier de \mathbb{R}^2 . Soit (f_{α}) une suite de fonctions à croissance critique uniforme dans Ω . Soit (u_{α}) une suite de solutions de*

$$\Delta u_{\alpha} = f_{\alpha}(x, u_{\alpha}) \text{ dans } \Omega, \quad u_{\alpha} > 0 \text{ dans } \Omega, \quad u_{\alpha} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

On suppose que la suite (u_{α}) est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et que $\sup_{\Omega} u_{\alpha} \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}^$, et il existe N suites de points $(x_{i,\alpha})_{i=1,\dots,N}$ telles que, après extraction d'une sous-suite, les assertions suivantes aient lieu :*

(a) *Pour tous $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$,*

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{|x_{i,\alpha} - x_{j,\alpha}|}{\mu_{i,\alpha}} = +\infty$$

où $\mu_{i,\alpha}^{-2} = u_{\alpha}(x_{i,\alpha}) f_{\alpha}(u_{\alpha}(x_{i,\alpha}))$ et $\mu_{i,\alpha} \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

(b) *Pour tout $1 \leq i \leq N$,*

$$8\pi u_{\alpha}(x_{i,\alpha}) (u_{\alpha}(x_{i,\alpha} + \mu_{i,\alpha}x) - u_{\alpha}(x_{i,\alpha})) \rightarrow -2 \ln(1 + \pi|x|^2)$$

dans $C_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}_i)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ où

$$\mathcal{S}_i = \left\{ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{x_{j,\alpha} - x_{i,\alpha}}{\mu_{i,\alpha}}, j \neq i \right\}.$$

(c) Il existe $C > 0$ telle que

$$\left(\min_{i=1,\dots,N} |x_{i,\alpha} - x| \right)^2 u_\alpha(x) f_\alpha(u_\alpha(x)) \leq C$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout α .

De plus, étant donnée une suite de points $(x_{N+1,\alpha})$, il est impossible d'extraire une sous-suite de la précédente de façon à ce que les trois propriétés ci-dessus aient lieu avec les suites $(x_{i,\alpha})_{i=1,\dots,N+1}$. Enfin,

$$u_\alpha \rightarrow u_0 \text{ dans } C_{loc}^1(\bar{\Omega} \setminus \mathcal{S}) \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty$$

où u_0 est une solution de l'équation-limite, éventuellement nulle, et

$$\mathcal{S} = \left\{ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} x_{i,\alpha}, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Revenons un instant sur les raisons de l'échec de la méthode ponctuelle pour détecter ces éventuelles bulles basses. Celles-ci correspondent dans la proposition ci-dessus au cas où $\mathcal{S}_i \neq \emptyset$, c'est-à-dire au cas où les autres bulles déjà trouvées ne sont pas envoyées à l'infini par le changement d'échelle (cf. section 1.1.3 pour l'analogie dans le cas des équations de Yamabe). En général, après changement d'échelle sur un tel point de concentration (qui serait détectable par une méthode ponctuelle comme dans la section 1.1.3), la suite converge vers une solution de l'équation

$$\Delta_\xi U = 8\pi e^U$$

dans \mathbb{R}^4 privé d'un certain nombre de points - les traces des bulles précédentes. De plus, $e^U \in L^1(\mathbb{R}^4)$. Mais cela ne suffit pas pour un résultat d'effacement des singularités éventuelles. En effet, comme démontré par Prajapat et Tarantello [142], il existe des solutions du problème ci-dessus qui sont singulières. Elles sont données, par exemple en supposant que la singularité est en 0, par

$$U_\eta = \ln \frac{(2-\eta)^2}{4\pi|x|^\eta (1+|x|^{2-\eta})^2}$$

et sont solutions au sens faible de l'équation

$$\Delta_\xi U_\eta = 2\pi\eta\delta_0 + 8\pi e^{U_\eta}.$$

Dès que $0 \leq \eta < 2$, $e^{U_\eta} \in L^1(\mathbb{R}^4)$ et cette fonction pourrait a priori apparaître comme limite de notre suite renormalisée. Rien ne peut éviter a priori l'apparition de ces solutions où il faut imaginer que l'interaction entre les bulles est telle qu'une bulle va jusqu'à influencer sur la forme même d'une autre bulle, même dans le rayon d'action du microscope adapté. De plus, l'énergie portée par ces bulles pourrait être aussi petite qu'imaginable puisque

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{U_\eta} dx = \frac{2-\eta}{2}.$$

Ainsi, même en supposant le processus d'extraction de bulles lancé, rien ne pourrait assurer qu'il s'arrête.

En fait, ces bulles ne peuvent apparaître, en tout cas lorsque la suite (u_α) est réellement solution de l'équation et pas seulement suite de Palais-Smale associée à la fonctionnelle correspondante. Mais il faut travailler un peu plus pour le démontrer. C'est pour cela qu'il faut saturer la proposition en ajoutant artificiellement, sans procédé pour les détecter, ces bulles basses en supposant qu'elles ont la bonne forme. La tâche suivante est de démontrer qu'en effet, toutes les bulles ont été trouvées. C'est par ailleurs une excellente question, ouverte, que de savoir si ces bulles basses artificiellement ajoutées peuvent réellement apparaître. Il semblerait que cela soit assez compliqué à produire. Sur cette équation, le phénomène de bulles sur bulles semble peu probable, comme l'est le phénomène de bulles sur solution faible non-nulle³⁵. Mais ceci reste à prouver (ou à contredire).

3.3. Toute l'énergie a-t-elle été trouvée ? Maintenant que l'ensemble des points de concentration probable a été trouvé (cf. proposition 2.4), il s'agit de montrer qu'en effet, ce sont les seuls, et qu'il n'y a pas de perte d'énergie entre ces points de concentration pour arriver au résultat de quantification. Nous serons brefs sur le sujet car c'est de loin la partie la plus technique et ardue de la preuve. La première remarque à faire est que l'estimée faible obtenue dans la proposition 2.4 se transforme en une estimée sur le gradient de u_α : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left(\min_{i=1,\dots,N} |x_{i,\alpha} - x| \right) u_\alpha(x) |\nabla u_\alpha(x)| \leq C.$$

La preuve de cette estimée faible sur le gradient n'est pas triviale ; elle requiert un raisonnement par contradiction, une renormalisation adéquate et quelques arguments sur les fonctions harmoniques. Toujours est-il que cette estimée nous permet de comparer, au moins dans un voisinage proche des points de concentration, la fonction u_α à sa moyenne sur les sphères de centre le point de concentration. Plus précisément, posons

$$\varphi_{i,\alpha} = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_{x_{i,\alpha}}(r)} u_\alpha d\sigma$$

pour $0 \leq r \leq \min_{j \neq i} |x_{i,\alpha} - x_{j,\alpha}|$ et $r \leq d(x_{i,\alpha}, \partial\Omega)$. Tant que r est dans cette région, grâce à l'estimée faible sur le gradient,

$$\frac{1}{D} f_\alpha(\varphi_\alpha) \leq \Delta \varphi_\alpha \leq D f_\alpha(\varphi_\alpha)$$

pour une certaine constante $D > 1$ indépendante de α . Une étude de cette inéquation différentielle ordinaire permet d'obtenir quelques estimées intéressantes sur u_α et d'en déduire en particulier qu'aucune énergie n'est perdue dans cette zone.

35. Pour une discussion de cette problématique, cf. la section 2.1 du chap. 3.

Une fois que ceci est fait sur tous les points de concentration, il faut les regrouper par deux ou plus (tous à la même distance les uns des autres) puis recommencer en considérant que ce groupe ne fait qu'un. Ainsi, la combinaison d'une hiérarchisation bien choisie des points de concentration et d'une étude d'une inéquation différentielle ordinaire permet de conclure que tous les points de concentration ont été trouvés. En particulier, et c'est le plus difficile, il est démontré qu'aucun point de concentration dégénéré ne peut apparaître. Ensuite, il faut démontrer qu'aucune énergie n'est perdue entre les points de concentration. La mise en place rigoureuse de ce vague schéma de preuve est assez technique et cette seule partie de la preuve court sur quelque 30 pages.

3.4. Et après ? Cette astuce de passer par les moyennes pour se ramener à l'étude d'équations (ou d'inéquations) différentielles ordinaires³⁶ est certes jolie mais elle ne donne pas les estimées optimales que nous sommes en droit d'attendre. Ces estimées sont nécessaires pour qui veut répondre aux questions assez naturelles qui se posent ici : les points de concentration sont-ils isolés comme c'est le cas pour les non-linéarités vraiment exponentielles (cf. section 2) ? Est-il possible d'avoir un phénomène d'explosion avec une limite faible non-nulle ? Y a-t-il des non-linéarités f_0 pour lesquelles il n'y a pas d'explosion ? Pour toutes ces questions et leur motivation, nous renvoyons à la section 2 du chap. 3.

Enfin, une question brûlante et intéressante est la suivante : la quantification est-elle vraie pour des suites de Palais-Smale ? A notre avis non³⁷ mais il faudrait une preuve. Ce serait une magnifique illustration, claire et nette, de la force de la méthode ponctuelle puisque, si la quantification n'est pas vraie pour des suites de Palais-Smale, la méthode d'énergie est nécessairement vouée à l'échec. Pour l'instant, nous ne pouvons que constater que celle-ci est inopérante mais une preuve de son inefficacité serait intéressante.

4. Conclusion

Dans cette section, en montrant comment fonctionne la méthode ponctuelle de détection des points de concentration sur plusieurs exemples, les difficultés qui apparaissent et comment les contourner, nous espérons avoir convaincu que cette méthode est très efficace pour répondre à des problèmes de quantification. Mais ce n'est pas son seul atout. Elle donne également des informations extrêmement précises sur les suites de solutions qui développent des points de concentration, voire une description optimale de celles-ci, quitte à travailler un petit peu plus. C'est d'ailleurs souvent dans cette partie qu'une adaptation à l'équation est nécessaire alors que la détection des points de concentration est une "autoroute". Ces

36. déjà utilisée dans la section 2 et propre aux non-linéarités exponentielles (en dimension critique).

37. cf. commentaire page 61.

estimées asymptotiques optimales sont utiles pour obtenir des résultats de compacité, stabilité, ... (cf. chap. 3 et 4).

Nous sommes persuadés que la méthode décrite ci-dessus peut être utilisée, en l'adaptant, dans beaucoup de situations³⁸. Nous espérons donc qu'elle servira à l'avenir.

38. Cela a d'ailleurs déjà été fait dans [152, 161]. C'est en cours pour l'étude du problème des H -bulles.

CHAPITRE 3

Stabilité, instabilité et compacité

Ce chapitre est consacré aux travaux **(16)**, **(19)**-**(21)**, **(24)**, **(26)** et **(27)**. Nous allons introduire la notion de stabilité pour des équations aux dérivées partielles elliptiques, notion qui nous paraît intéressante et qui, sans avoir été formalisée ni étudiée pour elle-même, est déjà présente dans un certain nombre de résultats d'existence par méthode de continuité. C'est d'ailleurs une notion parente de celle de compacité, avec laquelle elle partage quelques points communs mais de laquelle elle se révèle bien différente. Encore une fois, fidèle au parti-pris de ce mémoire, nous la présenterons sur le modèle le plus simple, les équations de type Yamabe, qui ont déjà été bien étudiées dans le chapitre 2. Puis nous passerons rapidement en revue quelques autres exemples où nous l'avons étudiée (les systèmes d'EDP elliptiques, les équations de contrainte en relativité générale). Avant d'en venir à la notion de stabilité, nous allons parler d'une notion plus classique, celle de compacité, en reprenant l'un des problèmes phares de l'analyse géométrique, le problème de Yamabe.

Précisons un peu le plan de ce chapitre et le contenu des travaux qui y sont présentés. La référence **(19)** contient une preuve en petites dimensions de la compacité de l'ensemble des métriques à courbure scalaire constante dans une classe conforme fixée, cf. section 1. Les références **(16)** et **(20)** traitent de la notion de stabilité pour des équations de type Yamabe, cf. la section 2 qui est la principale de ce chapitre, tandis que la référence **(21)** est un survol sur ces mêmes équations. Les références **(24)** et **(27)** concernent la stabilité pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles elliptiques à croissance de Sobolev critique, cf. section 4. Enfin, dans le travail **(26)**, il s'agit de stabilité pour des équations d'Einstein-Lichnerowicz issues du problème des contraintes pour les équations d'Einstein avec champ scalaire, cf. section 3.

1. Compacité pour l'équation de Yamabe

En 1960, Yamabe s'est dit qu'il était temps d'essayer de résoudre la conjecture de Poincaré à l'aide d'outils d'analyse¹. Partons de l'observation d'Hilbert que les

1. Cette intuition s'est trouvée justifiée quelque quarante ans plus tard avec les travaux de Perelman [**137**, **139**, **138**], même si ce n'est pas complètement l'angle d'attaque suggéré par Yamabe qui s'est révélé efficace mais celui proposé vingt ans plus tard par Hamilton [**73**].

métriques d'Einstein sont des points critiques de la fonctionnelle

$$\mathcal{H}(g) = Vol_g(M)^{-\frac{2}{n}} \int_M S_g dv_g$$

parmi toutes les métriques sur une variété M de dimension n fixée. Poursuivons avec le fait, classique en géométrie riemannienne, qu'une variété compacte simplement connexe de dimension 3 qui admet une métrique d'Einstein est la sphère S^3 . Il en découle qu'une possibilité pour attaquer la conjecture de Poincaré est de trouver un point critique de cette fonctionnelle sur toute variété de dimension 3 compacte simplement connexe. Evidemment, ce ne peut être simple puisque sur certaines variétés, cette fonctionnelle n'admet pas de points critiques : c'est le cas de $S^1 \times S^2$ qui n'admet pas de métrique d'Einstein et donc sur laquelle la fonctionnelle \mathcal{H} n'admet pas de points critiques.

Comme exercice préparatoire, Yamabe s'est donc proposé de trouver des points critiques de cette fonctionnelle sous la contrainte que la métrique g reste dans une classe conforme fixée. Un tel point critique ne donne plus une métrique d'Einstein mais une métrique à courbure scalaire constante. Trouver une telle métrique peut être intéressant : par exemple, en dimension 2, cela donne le théorème d'uniformisation².

Yamabe affirmait dans son papier [169] de 1960 qu'un tel point critique existait dans toute classe conforme et donc que toute classe conforme possédait une métrique à courbure scalaire constante. Le problème de Yamabe connaît une (re)naissance en 1968 avec la découverte par Trudinger [164] d'une erreur dans le travail de Yamabe [169]. Trudinger, en montrant que la preuve était trouée, allait ouvrir tout un champ d'investigations en analyse géométrique³.

1.1. Résolution du problème de Yamabe et questions de multiplicité.

Le problème de Yamabe est donc le suivant : étant donnée (M, g) une variété riemannienne compacte⁴, existe-t-il une métrique $\tilde{g} = e^v g$, v fonction régulière de M dans \mathbb{R} , qui soit à courbure scalaire constante ? En dimension 2, une réponse positive est une façon de voir le théorème d'uniformisation de Poincaré. En dimensions

2. D'aucuns voient le problème de Yamabe comme une extension du théorème d'uniformisation, d'autres expliqueront que c'est le problème de Q -courbure en dimension paire. Mais ceci n'a pas grand sens. Le théorème d'uniformisation, une fois qu'il est vu comme problème de prescription de courbure de Gauss constante, peut admettre autant de généralisations qu'il existe de problèmes de prescription de courbure constante puisque la dimension 2 ne présente qu'une seule courbure, celle de Gauss.

3. Il est fort probable que le travail de Pohožaev [140] ait mis la puce à l'oreille de Trudinger. En effet, Pohožaev avait démontré en 1965 qu'une équation similaire à celle pour laquelle Yamabe prétendait avoir trouvé une solution n'en possédait pas nécessairement. Il se trouve d'ailleurs que, dans ces années 60, l'équation en question intéressait à la fois des géomètres et des EDPistes euclidiens (cf. chap. 4).

4. Le problème peut également être posé sur des variétés non compactes.

$n \geq 3$, il vaut mieux poser $e^v = u^{\frac{4}{n-2}}$ et les courbures scalaires de \tilde{g} et g sont alors reliées par l'équation

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Résoudre le problème de Yamabe revient donc à trouver un $\lambda \in \mathbb{R}$ et une fonction u régulière et strictement positive solution de

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}. \quad (3.1)$$

Clairement, λ peut toujours être supposé appartenir à $\{-1, 0, +1\}$. Mais, qui plus est, une fois donnée la variété riemannienne (M, g) , le signe de λ est déterminé par le signe de la première valeur propre de l'opérateur $\Delta_g + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g$. En effet, si cette première valeur propre est négative (resp. nulle, positive), les seuls λ pour lesquels il puisse y avoir une solution à l'équation (3.1) sont négatifs (resp. nuls, positifs). Ceci amène à distinguer trois classes de Yamabe : négative, nulle et positive. Dans les cas nul et négatif, il est relativement facile de trouver une solution à l'équation (cf. Trudinger [164]). De plus, la solution est unique dans ces cas-là⁵. Le cas positif a résisté quelques années de plus : il a fallu attendre Aubin [9] en 1976 pour le traitement des variétés de dimensions $n \geq 6$ non localement conformément plates et Schoen [153] en 1984 pour les cas restants, i.e. les dimensions $n \leq 5$ et les variétés localement conformément plates. Un excellent survol sur la résolution du problème de Yamabe a été écrit par Lee et Parker [107]. Ce survol unifie même les preuves de Aubin et Schoen en introduisant les coordonnées conformes normales.

Si, lorsque l'invariant de Yamabe est négatif ou nul, il n'y a essentiellement qu'une métrique à courbure scalaire constante, la situation change drastiquement si l'invariant de Yamabe est positif : il existe des variétés riemanniennes à invariant de Yamabe positif pour lesquelles le nombre de métriques à courbure scalaire constante dans la classe conforme de la métrique initiale est arbitrairement grand (voire infini).

Le premier exemple qui vient à l'esprit est la sphère standard : si (S^n, h) dénote la sphère unité de \mathbb{R}^{n+1} avec la métrique induite de la métrique euclidienne, alors non seulement la métrique standard a une courbure scalaire constante (égale à $n(n-1)$) mais une infinité de métriques dans la classe conforme de la métrique standard ont une courbure scalaire constante. Obata [131] a tout d'abord montré que toute métrique à courbure scalaire constante dans la classe conforme de la sphère standard était isométrique à celle-ci. Donc trouver l'ensemble des métriques à courbure scalaire constante dans la classe conforme de la métrique standard revient à trouver l'ensemble des difféomorphismes conformes de la sphère standard,

5. Unique à multiplication par une constante près, ce qui modifie le λ dans le cas négatif mais ne le modifie pas dans le cas nul. En particulier, dans une classe conforme à invariant de Yamabe négatif ou nul, il n'existe qu'une seule métrique à courbure scalaire constante de volume 1.

c'est-à-dire des difféomorphismes de la sphère tels que φ^*h appartienne à la classe conforme de h . Ceci n'est pas difficile une fois remarqué qu'il est possible, quitte à composer par une rotation (isométrie), de fixer un point puis de repasser à un difféomorphisme conforme de l'espace euclidien via projection stéréographique. Nous n'en considérerons qu'une famille, ceux donnés par $\Phi_{P,t}(x) = \pi_P(t\pi_P^{-1}(x))$ où π_P est la projection stéréographique de pôle P fixé et $t \geq 1$ est un réel. Un simple calcul donne alors

$$\Phi_{P,t}^* h = u_{P,t}^{\frac{4}{n-2}} h$$

où

$$u_{P,t}(x) = \left(\frac{2t}{1 - \cos d_h(x, P) + t^2(1 + \cos d_h(x, P))} \right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Cette fonction vérifie l'équation de Yamabe sur la sphère standard, i.e.

$$\Delta_h u_{P,t} + \frac{n(n-2)}{4} u_{P,t} = \frac{n(n-2)}{4} u_{P,t}^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Or cette famille à un paramètre de solutions n'est pas bornée dans l'espace C^2 . Elle a une énergie bornée puisque

$$\int_{S^n} \left(|\nabla u_{P,t}|_h^2 + \frac{n(n-2)}{4} u_{P,t}^2 \right) dv_h = \frac{n(n-2)}{4} \omega_n$$

pour tout $t \geq 1$. Par contre, il est clair que $\|u_{P,t}\|_\infty \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ et que la suite $(u_{P,t})$ se concentre au point $-P$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. C'est le modèle d'explosion qui peut se produire pour une suite de solutions de l'équation de Yamabe (cf. chap. 2).

Revenons à notre problème de multiplicité de métriques à courbure scalaire constante (positive) dans une classe conforme donnée. Hormis la sphère standard, il y a d'autres exemples de multiplicité. Prenons par exemple $M_T = S^{n-1} \times S^1(T)$ munie de la métrique produit standard. Il est clair que, lorsque $T \rightarrow +\infty$, cette métrique n'atteint plus le minimum de la fonctionnelle

$$\left(\int_{M_T} S_g dv_g \right) Vol_g(M_T)^{-\frac{2}{n}}$$

dans sa classe conforme puisque celui-ci est inférieur à une valeur fixe ne dépendant que de n . Or ce minimum est toujours atteint par une métrique à courbure scalaire constante. C'est comme cela que le problème de Yamabe a été résolu par Aubin [9] et Schoen [153]. Ainsi il est clair que, pour un certain T_1 suffisamment grand, il existe une deuxième métrique à courbure scalaire constante. Cette métrique elle-même se relève naturellement aux revêtements M_{NT_1} et cesse d'être minimisante pour N grand. Ainsi, par le même argument, il existe un certain T_2 pour lequel il existe trois métriques distinctes à courbure scalaire constante dans la classe conforme de la métrique produit. Et ainsi de suite. Cet exemple est dû à

Schoen [156] et montre bien qu'il peut, en-dehors de la sphère standard, y avoir une multiplicité de solutions au problème de Yamabe dans une classe conforme donnée⁶. Pollack [141] a d'ailleurs montré que ces exemples étaient nombreux.

1.2. Compacité de l'ensemble des solutions. Dans les deux travaux [155] et [156], Schoen provoqua un coup de tonnerre en annonçant que, excepté sur la sphère standard, l'ensemble des métriques à courbure scalaire constante dans une classe conforme donnée est pré-compact dans la topologie C^2 . En termes d'EDP, ceci revient à dire que l'ensemble des solutions de l'équation

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

est borné a priori dans $C^2(M)$, sauf si la variété est conformétement difféomorphe à la sphère standard (voir sous-section précédente). Schoen donne une preuve dans le cas conformétement plat en supposant une borne a priori sur l'énergie des solutions (ou encore sur le volume des métriques à courbure scalaire constante) dans [155]. Dans [156], en s'appuyant sur les travaux de Schoen-Yau [157] et sur l'application développante des variétés localement conformétement plates, il donne une preuve particulièrement élégante de ce résultat toujours dans le cas localement conformétement plat mais sans borne a priori sur l'énergie des solutions. Il apparaissait clairement que cette deuxième preuve n'avait aucune chance de s'étendre au cas non conformétement plat. Mais dans un cours donné à Stanford en 88-89, voir [154], il proposait une approche pour démontrer ce résultat de compacité dans le cas général. Cette approche a été mise en œuvre par Li et Zhu [116] en dimension 3 quelques années plus tard en s'inspirant de Schoen-Zhang [159] qui avait développé cette analyse dans un cadre proche mais différent. En dimensions plus grandes, le problème apparaissait plus ardu. J'ai démontré dans (19) ce résultat en dimensions 4 et 5. Puis les choses se sont accélérées puisque Marques [126] l'a ensuite démontré jusqu'à la dimension 7, Li et Zhang [115] jusqu'à la dimension 11 et enfin Khuri, Marques et Schoen [100] l'ont démontré jusqu'à la dimension 24. Il convient de remarquer qu'à partir de la dimension 8, ces résultats sont conditionnés à la preuve du théorème de la masse positive, disponible seulement en dimensions $n \leq 7$ grâce à [158]. Un autre coup de tonnerre est venu de Brendle [20] puis de Brendle-Marques [22] qui ont démontré que le résultat était faux en dimensions plus grandes⁷.

6. Le résultat dans [156] est plus précis que cela puisqu'il contient un décompte des solutions. Il faut noter que, dans ce cas précis, l'équation de Yamabe se réduit à une équation différentielle ordinaire.

7. Brendle [20] trouve des contre-exemples à la compacité en dimensions $n \geq 52$, contre-exemples étendus aux dimensions $25 \leq n \leq 51$ par Brendle et Marques [22]. Le lecteur pourra consulter le récent article de survol de Brendle [21].

2. Stabilité et instabilité des équations de type Yamabe

Nous allons nous intéresser à des questions de stabilité et d'instabilité pour des EDP elliptiques, plus particulièrement dans cette section pour l'équation

$$\Delta_g u + hu = u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad u \geq 0 \quad (3.2)$$

sur une variété riemannienne compacte (M, g) de dimensions $n \geq 3$ où h est une fonction de M dans \mathbb{R} . Pour fixer les idées, nous supposons que cette fonction h est de classe C^1 . Pour une équation d'évolution, la stabilité est mesurée par rapport à des perturbations des données initiales et de l'équation. Pour des EDP elliptiques, la stabilité sera mesurée uniquement par rapport à des perturbations de l'équation. Ici, un paramètre naturel à perturber est la fonction h . Nous dirons donc que l'équation (3.2) est stable si une perturbation du potentiel h ne crée pas de nouvelles solutions, i.e. de solutions qui se trouvent loin de toute solution de l'équation initiale.

Pour être plus précis, il va nous falloir introduire une distance entre les ensembles de solutions des équations. Pour X et Y deux sous-ensembles de $C^2(M)$, nous définirons donc la distance pointée suivante :

$$d_{C^2}^{\rightarrow}(X; Y) = \sup_{u \in X} \inf_{v \in Y} \|v - u\|_{C^2(M)}. \quad (3.3)$$

Ce n'est pas une vraie distance puisqu'elle n'est pas symétrique⁸. Par convention, nous poserons $d_{C^2}^{\rightarrow}(X, \emptyset) = +\infty$ si $X \neq \emptyset$ et $d_{C^2}^{\rightarrow}(\emptyset, Y) = 0$ pour tout Y . Avant de définir diverses notions de stabilité, nous avons encore besoin d'introduire une notation. Etant donné $h \in C^1(M)$ et Λ un réel strictement positif, nous noterons \mathcal{S}_h^Λ l'ensemble des solutions de l'équation (3.2) d'énergie plus petite que Λ , i.e.

$$\mathcal{S}_h^\Lambda = \left\{ u \in C^2(M) \text{ solution de (3.2) t.q. } \int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \leq \Lambda \right\}.$$

Par définition, \mathcal{S}_h^∞ est l'ensemble des solutions de (3.2).

DÉFINITION 3.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soit $h \in C^1(M)$. Soit $\Lambda \in (0, +\infty)$. Nous dirons que l'équation (3.2) est :*

- Λ -stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\left\| \tilde{h} - h \right\|_{C^1(M)} \leq \eta \Rightarrow d_{C^2}^{\rightarrow}(\mathcal{S}_{\tilde{h}}^{\Lambda+\varepsilon}, \mathcal{S}_h^\Lambda) \leq \varepsilon.$$

- Λ -compacte si l'ensemble \mathcal{S}_h^Λ est borné dans $C^2(M)$.

Enfin, si $\Lambda = +\infty$ dans les définitions ci-dessus, nous dirons simplement que l'équation est (globalement) stable ou (globalement) compacte.

⁸. Cette distance est nulle si et seulement si $X \subset \bar{Y}$. Elle vérifie une inégalité triangulaire $d_{C^2}^{\rightarrow}(X; Z) \leq d_{C^2}^{\rightarrow}(X; Y) + d_{C^2}^{\rightarrow}(Y; Z)$.

Une première remarque qui s'impose est que $\mathcal{S}_h^\infty = \{0\}$ dès que la première valeur propre de l'opérateur $\Delta_g + h$ est négative ou nulle⁹. Ainsi, si $\lambda_1(h) \leq 0$, il est clair que l'équation (3.2) est compacte. Si $\lambda_1(h) < 0$, cette propriété est stable par perturbations ; aucune équation perturbée ne possède de solutions et donc l'équation (3.2) est stable. Dans la suite, nous supposons donc que

$$\lambda_1(h) = \inf_{u \in C^\infty(M), u \neq 0} \frac{\int_M (|\nabla u|_g^2 + hu^2) dv_g}{\int_M u^2 dv_g} \geq 0.$$

Par théorie elliptique standard, une équation est Λ -compacte s'il existe $C > 0$ telle que toute solution $u \in \mathcal{S}_h^\Lambda$ vérifie $\|u\|_\infty \leq C$. Réciproquement, une équation n'est pas Λ -compacte si il existe une suite de solutions (u_α) dans \mathcal{S}_h^Λ telle que $\|u_\alpha\|_\infty \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

Toujours par théorie elliptique standard, une équation est Λ -stable si toute suite de solutions (u_α) d'équations perturbées

$$\Delta_g u_\alpha + h_\alpha u_\alpha = u_\alpha^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ et } \int_M u_\alpha^{2^*} dv_g \leq \Lambda + o(1)$$

avec $h_\alpha \rightarrow h$ dans $C^1(M)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ est uniformément bornée dans $L^\infty(M)$. Par contre, la réciproque n'est pas vraie. Elle le sera uniquement si l'équation est Λ -compacte. Il est seulement vrai qu'une équation Λ -compacte est Λ -stable si et seulement si toute suite de solutions (u_α) dans $\mathcal{S}_{h_\alpha}^{\Lambda+o(1)}$ avec $h_\alpha \rightarrow h$ dans $C^1(M)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ est uniformément bornée dans $L^\infty(M)$. Cela soulève une première question :

Question 1 - Existe-t-il des équations qui sont Λ -stables sans être Λ -compactes ?

Cela nous paraît assez improbable mais tant que ce n'est pas démontré, la notion de stabilité forte définie ci-dessous est pertinente. Si la réponse à la question 1 est non, cette stabilité forte ne sera rien d'autre que la stabilité.

DÉFINITION 3.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Soit $h \in C^1(M)$. Soit $\Lambda \in (0, +\infty)$. Nous dirons que l'équation (3.2) est fortement Λ -stable si elle est Λ -compacte et Λ -stable. Pour $\Lambda = +\infty$, nous dirons alors qu'elle est fortement stable.*

La question 1 revient à poser la question de l'équivalence entre Λ -stabilité et forte Λ -stabilité. Considérons maintenant une fonction $h \in C^1(M)$ pour laquelle l'équation (3.2) correspondante n'est pas fortement Λ -stable. Ceci signifie qu'il

9. En effet, en testant l'équation (3.2) contre la fonction propre φ strictement positive associée à la première valeur propre λ_1 de $\Delta_g + h$, nous obtenons $\int_M u^{\frac{n+2}{n-2}} \varphi dv_g = \lambda_1 \int_M u \varphi dv_g$, ce qui impose $\lambda_1 > 0$ si $u \neq 0$.

existe une suite (h_α) de fonctions C^1 sur M telle que $h_\alpha \rightarrow h$ dans $C^1(M)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ et une suite de solutions strictement positives (u_α) de l'équation

$$\Delta_g u_\alpha + h_\alpha u_\alpha = u_\alpha^{\frac{n+2}{n-2}}$$

avec

$$\int_M u_\alpha^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \leq \Lambda + o(1)$$

qui n'est pas uniformément bornée dans $L^\infty(M)$. Si $\Lambda = +\infty$, cette dernière condition est vide. Si $\Lambda < +\infty$, grâce à la décomposition H_1^2 de Struwe [160], cf. section 1 du chapitre 2, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$u_\alpha = u_0 + \sum_{i=1}^N B_{i,\alpha} + R_\alpha$$

où $R_\alpha \rightarrow 0$ dans $H_1^2(M)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$, les $B_{i,\alpha}$ sont des bulles standards de centre $(x_{i,\alpha})$ et de poids $(\mu_{i,\alpha})$ et $u_0 \in \mathcal{S}_h^{\Lambda - NE_n}$. De plus,

$$\Lambda + o(1) \geq \int_M u_\alpha^{\frac{2n}{n-2}} dv_g = \int_M u_0^{\frac{2n}{n-2}} dv_g + NE_n + o(1).$$

Il s'ensuit en particulier que l'équation (3.2) est toujours fortement Λ -stable si $\Lambda < E_n$.

L'équation de Yamabe sur la sphère standard, i.e. avec $h \equiv \frac{n(n-2)}{4}$ n'est pas Λ -compacte dès lors que $\Lambda \geq E_n$. Elle n'est d'ailleurs sans doute pas Λ -stable non plus (cf. discussion de la question 1).

L'équation de Yamabe sur une variété riemannienne compacte (M, g) , i.e. avec $h \equiv \frac{n-2}{4(n-1)} S_g$, est compacte si la dimension de la variété est inférieure ou égale à 24 ou si la variété est localement conformément plate (et n'est pas conformément difféomorphe à la sphère standard). Par contre, dès que la variété est localement conformément plate, cette équation n'est pas E_n -stable (cf. (20)). Et il existe des exemples de variétés de dimension $n \geq 25$ sur lesquelles elle n'est pas E_n -compacte.

Ces quelques exemples montrent que cette notion de stabilité est riche, plus riche que la notion de compacité : il existe par exemple des équations compactes instables. Cette notion ouvre la porte à un foisonnement de questions que nous allons décrire ci-dessous.

2.1. Un résultat de stabilité forte. Nous allons commencer par décrire un résultat de stabilité obtenu dans (16). C'est lui qui va ouvrir tout un champ de questions autour de cette notion. Le résultat est le suivant :

THÉORÈME 3.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$. Soit $h \in C^1(M)$ telle que $\lambda_1(h) > 0$. Si $h(x) \neq \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(x)$ pour tout $x \in M$ et si $n \neq 6$, alors l'équation (3.2) est fortement Λ -stable pour tout $\Lambda > 0$.*

Ainsi nous voyons que l'équation de Yamabe est critique à bien des égards. Elle l'est bien sûr à cause de la non-linéarité en $u^{\frac{n+2}{n-2}}$ qui correspond au cas limite des injections de Sobolev mais elle l'est également du point de vue de son potentiel. Dès lors que le potentiel h ne touche pas le potentiel de l'équation de Yamabe, l'équation (3.2) est fortement Λ -stable pour tout $\Lambda > 0$ excepté en dimensions 3 et 6. Rappelons que, pour le cas de l'équation de Yamabe elle-même, la forte Λ -stabilité est fautive sur certaines variétés de grande dimension et sur la sphère standard en toutes dimensions.

Avant de discuter plus avant les questions soulevées par ce résultat, donnons une brève idée de sa preuve¹⁰. Elle procède par l'absurde. Supposons que, sur une variété riemannienne compacte (M, g) de dimension $n \geq 3$, nous ayons une suite (u_α) de solutions C^2 aux problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_g u_\alpha + h_\alpha u_\alpha = u_\alpha^{\frac{n+2}{n-2}} \\ u_\alpha > 0 \text{ dans } M \\ \int_M u_\alpha^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \leq \Lambda \end{array} \right. \quad (3.4)$$

où (h_α) est une suite de fonctions C^1 telle que $h_\alpha \rightarrow h$ dans $C^1(M)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$. Supposons de plus que $\lambda_1(h) > 0$. Si l'équation (3.2) n'est pas fortement Λ -stable, il existe une telle suite de solutions (u_α) qui n'est pas uniformément bornée dans $L^\infty(M)$. Nous supposons donc que c'est le cas et que $\sup_M u_\alpha \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$. Nous sommes alors dans le cadre de l'étude faite dans la section 1 du chapitre 2. La suite (u_α) développe des points de concentration et nous avons, après extraction d'une sous-suite,

$$u_\alpha = u_0 + \sum_{i=1}^N B_{i,\alpha} + R_\alpha \quad (3.5)$$

avec $R_\alpha \rightarrow 0$ dans $H_1^2(M)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$, u_0 solution - soit strictement positive soit identiquement nulle par principe du maximum - de l'équation-limite, N un entier et les $B_{i,\alpha}$ des bulles standard données par

$$B_{i,\alpha}(x) = \mu_{i,\alpha}^{\frac{n-2}{2}} \left(\mu_{i,\alpha}^2 + \frac{d_g(x_{i,\alpha}, x)^2}{n(n-2)} \right)^{1-\frac{n}{2}}$$

10. Encore une fois, il n'est pas question de la donner en détails vu qu'elle court sur 70 pages, tout en supposant acquise la théorie ponctuelle du chapitre 2.

pour des suites $(x_{i,\alpha})$ de points de M et $(\mu_{i,\alpha})$ de réels strictement positifs $(\mu_{i,\alpha})$ tendant vers 0 lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$. De plus, le théorème 2.1 nous donne une description ponctuelle de la suite (u_α) :

$$u_\alpha(x_\alpha) = (1 + o(1))u_0(x_\alpha) + \sum_{i=1}^N (1 + o(1))B_{i,\alpha}(x_\alpha) + O\left(\left(\max_{i=1,\dots,N} \mu_{i,\alpha}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right)$$

pour toute suite (x_α) de points de M . Il reste à comprendre pourquoi ce n'est pas possible si le potentiel h ne touche pas le potentiel de l'équation de Yamabe. L'idée est qu'un des points de concentration devra se trouver en un point où $h(x) = \frac{n-2}{4(n-1)}S_g(x)$, tout du moins si la dimension n'est ni 3 ni 6. Ce point sera celui correspondant au poids $\mu_{i,\alpha}$ le plus grand, c'est-à-dire correspondant à la bulle la moins haute et la plus étalée. Toute la difficulté provient du fait que cette bulle risque fortement d'être cachée par d'autres bulles plus hautes. Il va donc falloir aller la chercher.

La notion essentielle pour y parvenir est celle de rayon d'influence d'une bulle. Etant donné $1 \leq i \leq N$, le rayon d'influence de la i -ème bulle est défini par

$$r_{i,\alpha} = \begin{cases} \min_{j \in \mathcal{A}_i} \sqrt{\frac{\mu_{i,\alpha}}{\mu_{j,\alpha}} d_g(x_{i,\alpha}, x_{j,\alpha})^2 + \mu_{i,\alpha} \mu_{j,\alpha}} & \text{si } u_0 \equiv 0 \\ \min \left\{ \min_{j \in \mathcal{A}_i} \sqrt{\frac{\mu_{i,\alpha}}{\mu_{j,\alpha}} d_g(x_{i,\alpha}, x_{j,\alpha})^2 + \mu_{i,\alpha} \mu_{j,\alpha}}; \sqrt{\mu_{i,\alpha}} \right\} & \text{si } u_0 \not\equiv 0 \end{cases}$$

où

$$\mathcal{A}_i = \{1 \leq j \leq N, j \neq i \text{ t.q. } \mu_{i,\alpha} = O(\mu_{j,\alpha})\} .$$

Evidemment, si $\mathcal{A}_i = \emptyset$ et $u_0 \equiv 0$, nous poserons $r_{i,\alpha} = \frac{1}{2}i_g(M)$ par exemple. Derrière cette définition d'apparence compliquée se cache en fait une idée simple : $r_{i,\alpha}$ doit être vu comme le rayon de la boule de centre $x_{i,\alpha}$ dans laquelle la bulle $B_{i,\alpha}$ est dominante dans la décomposition (3.5), excepté que doivent être oubliées les bulles qui sont beaucoup plus hautes qu'elle¹¹. Les rayons d'influence de différentes bulles sont représentés sur la figure 7, page 79.

11. C'est le sens de la restriction $j \in \mathcal{A}_i$. De toutes façons, ces bulles qui sont beaucoup plus hautes, si jamais elles étaient centrées dans la boule de centre $x_{i,\alpha}$ et de rayon $r_{i,\alpha}$, ne seraient beaucoup plus haute que $B_{i,\alpha}$ que sur une boule de rayon négligeable devant $r_{i,\alpha}$.

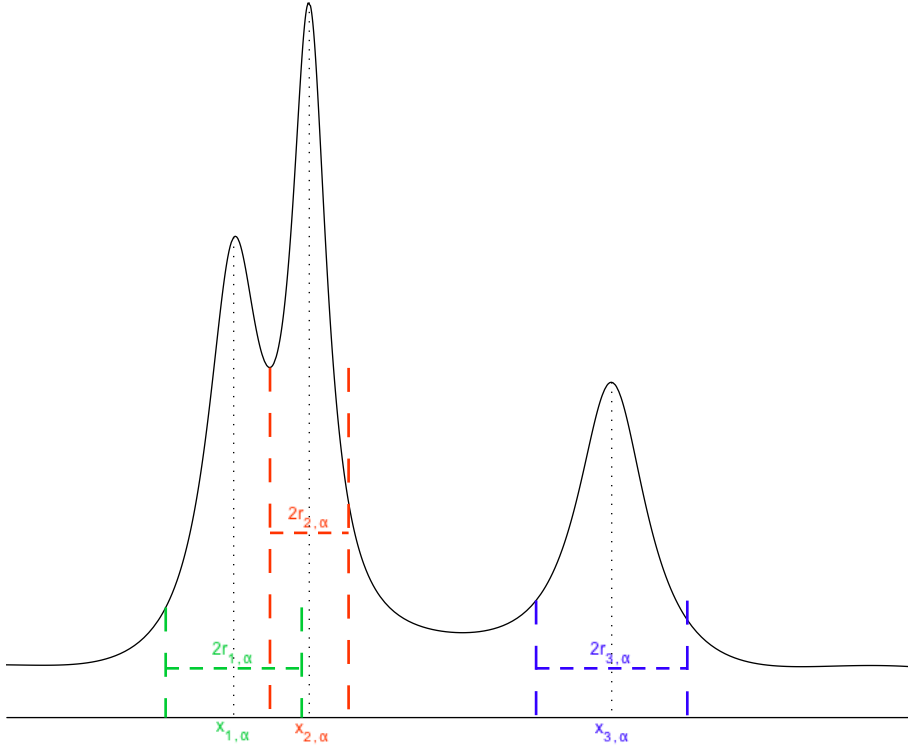


Fig. 7 : rayons d'influence des bulles.

Pourquoi s'intéresser au rayon d'influence d'une bulle? Tout simplement parce que c'est à cette échelle, i.e. à distance de l'ordre de $r_{i,\alpha}$ de $x_{i,\alpha}$, que l'interaction ponctuelle entre cette bulle et une autre (ou u_0) est la plus forte. C'est donc à cette distance que va se produire le recollement entre cette bulle et une autre bulle (ou u_0). Or recoller une bulle sur une bulle (ou sur une fonction u_0) tout en restant solution de l'équation est nécessairement contraignant. C'est donc en comprenant précisément ce qui se passe à cette échelle que nous pouvons espérer obtenir de précieuses informations sur les positions relatives des bulles les unes par rapport aux autres. Enfin, si le rayon d'influence ne tend pas vers 0, ce qui n'arrive que lorsque la bulle est l'une des moins hautes et $u_0 \equiv 0$, la géométrie de la variété devrait jouer un rôle dans le recollement de cette bulle pour donner une solution globale de l'équation.

En travaillant par récurrence de la bulle la plus haute à la plus basse, il est possible de démontrer que, pour tout $1 \leq i \leq N$, si $r_{i,\alpha} \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$,

$$\left(h(x_i) - \frac{1}{6} S_g(x_i) + o(1) \right) r_{i,\alpha}^2 \ln \frac{r_{i,\alpha}}{\mu_{i,\alpha}} = C_i$$

si $n = 4$ et

$$\left(h(x_i) - \frac{1}{6} S_g(x_i) + o(1) \right) r_{i,\alpha}^{n-2} \mu_{i,\alpha}^{4-n} = C_i$$

si $n \geq 5$ où C_i est une constante strictement positive (qui est explicite et dépend de l'endroit où se trouve les autres bulles et de u_0). En dimension 3, il est en fait impossible de coller des bulles sur des bulles et $r_{i,\alpha} \not\rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$. Nous renvoyons à **(16)** pour la preuve de ces estimées sur les rayons d'influence.

Ainsi le recollement doit se faire à une distance précise, qui dépend de la hauteur de la bulle. De plus, il est clair qu'une bulle ne peut être recollée sur une autre bulle (ou sur une fonction u_0) que si, au centre de la bulle, $h(x_i) \geq \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(x_i)$.

Mais ceci ne nous donne pas encore le résultat : il est possible de recoller une bulle sur une autre bulle même si $h > \frac{n-2}{4(n-1)} S_g$. C'est la bulle la plus basse qui, elle, doit absolument se concentrer en un point où $h(x) = \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(x)$. Il faut là encore distinguer plusieurs cas : cette bulle est isolée ; cette bulle doit se recoller sur une limite faible non-nulle ; cette bulle arrive dans un chapelet de bulles de taille équivalente et de centres très rapprochés les uns des autres.

Reprenons ces différents cas. Par bulle isolée, nous signifions ici simplement que $r_{i,\alpha} \not\rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$. Ceci ne veut pas dire qu'il n'y a pas des bulles beaucoup plus hautes qui se concentrent au même endroit mais cela exclut l'existence d'une limite faible non-nulle et la présence de bulles de hauteur équivalente se concentrant au même endroit. Dans ce cas, la conclusion vient assez directement de l'application d'une identité de Pohožaev : la bulle doit se concentrer à un endroit où $h(x) = \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(x)$ en dimensions $n \geq 4$. La situation en dimension 3 est plus compliquée et nous ne la discuterons pas ici ¹².

Si la bulle doit se recoller sur une limite faible non-nulle, i.e. $r_{i,\alpha} = \sqrt{\mu_{i,\alpha}}$, l'estimation sur les rayons d'influence donne une contradiction en dimensions $n = 3, 4, 5$ et donne directement que $h(x_i) = \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(x_i)$ si $n \geq 7$. Par contre, a priori, rien ne l'interdit en dimension 6 mais alors l'estimée des rayons d'influence nous dit, de façon surprenante, que $h(x_i) > \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(x_i)$. A titre de remarque, l'estimée sur les rayons d'influence donne $r_{i,\alpha} \gg \sqrt{\mu_{i,\alpha}}$ et donc la nullité de u_0 en dimensions 3, 4 et 5, ce qui signifie que la suite (u_α) ne peut pas développer de points de concentration si sa limite faible est non-nulle.

Enfin, si cette bulle arrive avec un chapelet de bulles de même taille qui se concentrent toutes au même endroit, c'est un argument de balance qui donne la contradiction. Pour que cela soit possible, il faudrait que chaque centre de bulle soit le "centre de gravité" des autres centres des bulles du chapelet pondérées par leur paramètre $\mu_{i,\alpha}$. Mais, comme le nombre de bulles est fini, il y en a toujours une qui se trouve le plus à l'extérieur, d'où une contradiction. Bref, cette situation

12. Nous renvoyons au chap. 1 et au chap. 4, section 1, pour cette discussion sur le phénomène des petites dimensions.

est impossible, quelque soit la dimension¹³. Pour plus de détails, nous renvoyons à **(16)**.

Revenons sur les résultats de l'analyse contenue dans **(16)**. Tout d'abord, il a été démontré qu'une limite faible non-nulle en dimensions $n = 3, 4, 5$ interdisait tout phénomène de concentration. Dans ces petites dimensions, il est impossible d'avoir à la fois $u_0 \neq 0$ et $N \geq 1$ dans la décomposition (3.5). Résultat surprenant s'il en est. En dimension 3, et c'est un phénomène du même ordre, il ne peut y avoir accumulation de bulles : les points de concentration sont isolés. En effet, la morale de cette histoire est la suivante : plus les dimensions sont petites, plus il est difficile de recoller des bulles entre elles ; plus une bulle est étalée et basse, plus elle est difficile à recoller à une autre de hauteur donnée. Par "difficile à recoller", nous entendons que le recollement doit avoir lieu plus loin du point de concentration. Il suffit maintenant de voir la limite faible non-nulle comme une bulle de poids 1, i.e. maximale étalée pour éclairer un peu le premier résultat à la lumière du second.

Ensuite, des informations sur les lieux de concentration ont été obtenues. Notons $\{x_i\}_{i=1,\dots,N}$ l'ensemble des limites des centres des bulles $(x_{i,\alpha})$. Alors, nous avons les résultats suivants :

- si $n = 4, 5$, il existe au moins un point de concentration x_i pour lequel $h(x_i) = \frac{n-2}{4(n-1)}S_g(x_i)$.

- si $n \geq 7$, tous les points de concentration x_i sont tels que $h(x_i) = \frac{n-2}{4(n-1)}S_g(x_i)$.

- si $n = 6$ et si $u_0 \equiv 0$, nous sommes dans le cas des dimensions $n \geq 7$.

- si $n = 6$ et si $u_0 \neq 0$, alors tous les points de concentration x_i sont tels que $h(x_i) > \frac{n-2}{4(n-1)}S_g(x_i)$.

Enfin, si $n = 3$, les points de concentration sont isolés et des relations (d'équilibre) faisant intervenir la fonction de Green en ces divers points sont vérifiées.

En fait, il devrait être possible de montrer¹⁴ que, lorsque c'est le cas, non seulement $h(x_i) = \frac{n-2}{4(n-1)}S_g(x_i)$ mais aussi $\nabla h(x_i) = \frac{n-2}{4(n-1)}\nabla S_g(x_i)$.

Ce résultat ouvre la porte à de nombreuses questions autour de cette notion de stabilité des équations de type Yamabe. Questions que nous allons décrire maintenant.

2.2. Lieux de M cause d'instabilité. Etant donnée une équation (3.2) qui n'est pas fortement Λ -stable, Λ fini, et une suite (u_α) satisfaisant (3.4) qui explose, il existe un certain nombre de points, les limites des centres des bulles $x_{i,\alpha}$ dans la

13. Ici, l'hypothèse d'énergie finie, et sa conséquence qui est que le nombre de bulles est fini, est cruciale.

14. Cela se trouvera sans doute dans le travail en préparation **(31)**.

décomposition (3.5), tels que, à extraction près,

$$u_\alpha \rightarrow u_0 \text{ dans } C^2 \left(M \setminus \{x_i\}_{i=1,\dots,N} \right) \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty. \quad (3.6)$$

Nous appellerons cet ensemble de points où la convergence n'a pas lieu $\mathcal{C}(u_\alpha)$. Cet ensemble dépend de la suite considérée (et en fait même de la sous-suite extraite). Ainsi il n'est pas très bien défini. Ce qui est bien défini par contre, c'est l'ensemble de ces points pour toutes les suites (u_α) possibles. Posons

$$\mathcal{C}_h^\Lambda = \bigcup_{(u_\alpha)} \mathcal{C}(u_\alpha)$$

où l'union est prise sur l'ensemble des suites de solutions de (3.4) vérifiant (3.6). En d'autres termes, un point $x \in M$ est dans \mathcal{C}_h^Λ si et seulement si il existe une suite (u_α) de solutions de (3.4) avec $h_\alpha \rightarrow h$ dans $C^1(M)$ qui vérifie (3.6) et où l'un des x_i est le point x en question. L'ensemble \mathcal{C}_h^Λ sera dit "ensemble de points d'instabilité" de l'équation (3.2). Si celui-ci est vide, alors l'équation (3.2) est fortement Λ -stable.

Le théorème 3.1 ou plus exactement l'analyse faite dans **(16)** nous dit que

$$\mathcal{C}_h^\Lambda \subset \left\{ x \in M \text{ t.q. } h(x) = \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(x) \right\}$$

dès que la dimension n'est ni 3 ni 6. En dimension 6, nous avons en fait

$$\mathcal{C}_h^\Lambda \subset \left\{ x \in M \text{ t.q. } h(x) = \frac{1}{5} S_g(x) + 2u(x) \text{ pour un } u \in \mathcal{S}_h^{\Lambda-E_n} \right\}.$$

Une question assez naturelle est la suivante :

Question 2 - Etant donnée une fonction $h \in C^1(M)$ et $\Lambda \in \mathbb{R}^+$, peut-on caractériser exactement \mathcal{C}_h^Λ ? Et bien entendu en déduire des conditions nécessaires et suffisantes sur h pour que l'équation (3.2) soit fortement stable ?

Hormis les informations ci-dessus, nous savons que cet ensemble est vide dès que $\Lambda < E_n$. En dimensions $n \geq 7$, nous pouvons conjecturer sans grand risque¹⁵ que

$$\mathcal{C}_h^\Lambda = \mathcal{F}(h)$$

pour tout $\Lambda \geq E_n$ où

$$\mathcal{F}(h) = \left\{ x \in M \text{ t.q. } \left| h(x) - \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(x) \right| + \left| \nabla \left(h - \frac{n-2}{4(n-1)} S_g \right) (x) \right|_g = 0 \right\}.$$

En dimensions $4 \leq n \leq 6$, une caractérisation complète semble plus délicate. Il devrait cependant être possible de démontrer que $\mathcal{F}(h) \subset \mathcal{C}_h^\Lambda$ dès que $\Lambda \geq E_n$. Ensuite, cet ensemble de points d'instabilité devrait dépendre de Λ . En particulier,

¹⁵. Le papier en préparation **(31)** se chargera de répondre à cette question, au moins sur la sphère standard.

il semble qu'une fois que $\Lambda \geq 2E_n$, il soit en dimensions 4 et 5 beaucoup plus gros que $\mathcal{F}(h)$.

2.3. Solutions cause d'instabilité. En dimensions 3, 4 et 5, une suite de solutions (u_α) qui explose ne peut avoir une limite faible que nulle. Il est impossible de développer des points de concentration avec une limite faible non-nulle. Notons \mathcal{CS}_h^Λ l'ensemble des fonctions $u \in \mathcal{S}_h^\infty$ qui peuvent apparaître comme limite faible d'une suite de solutions (u_α) de (3.4) qui explose. Cet ensemble est l'ensemble des solutions de (3.2) cause d'instabilité. En dimensions $3 \leq n \leq 5$, comme démontré dans (16), $\mathcal{CS}_h^\Lambda = \{0\}$. Il est naturel de se demander quel est cet ensemble de solutions cause d'instabilité en dimensions plus grandes :

Question 3 - Est-il possible de caractériser \mathcal{CS}_h^Λ en dimensions $n \geq 6$?

En dimensions $n \geq 7$, la réponse devrait être

$$\mathcal{CS}_h^\Lambda = \mathcal{S}_h^{\Lambda - E_n} .$$

Autant dire qu'en dimensions $n \geq 7$, hormis la contrainte triviale que la solution doit avoir une énergie plus petite que $\Lambda - E_n$, il ne devrait pas y en avoir d'autres. En dimension $n = 6$, la situation est plus compliquée¹⁶.

2.4. Borne sur l'énergie ou pas ? Remarquons que tous les résultats ci-dessus concernait la forte Λ -stabilité pour Λ fini. En particulier, si nous sommes capables de répondre aux questions 2 et 3, la forte Λ -stabilité, et les causes de l'éventuelle instabilité, serait entièrement comprise en dimensions $n \geq 4$ pour Λ fini, tout du moins si $\lambda_1(h) > 0$. Si, de plus, la réponse à la question 1 est non, forte Λ -stabilité et Λ -stabilité seraient deux notions équivalentes et la Λ -stabilité serait alors bien comprise pour tout Λ fini. Reste alors la question de l' ∞ -stabilité, ou de la forte ∞ -stabilité. Sur cette question, beaucoup moins de résultats sont disponibles. Il a été démontré dans (16) le résultat suivant, le cas $n = 3$ revenant à Li-Zhu [116] :

THÉORÈME 3.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. L'équation (3.2) est fortement ∞ -stable dès que $h < \frac{n-2}{4(n-1)}S_g$ sur M .*

Démontrer un tel théorème utilise une approche différente de celle utilisée pour la preuve du théorème 3.1. En effet, dès que $h_0 < \frac{n-2}{4(n-1)}S_g$, il est possible de raisonner à partir de la bulle la plus haute et de démontrer que celle-ci ne peut pas apparaître. La contradiction vient donc de la bulle la plus haute. En effet, recoller une bulle sur une autre bulle ou sur une limite faible non nulle nécessite, en tout cas

16. Encore une fois, cette question sera traitée dans (31) au moins dans le cas de la sphère standard.

en dimensions $n \geq 4$, d'avoir $h_0 \geq \frac{n-2}{4(n-1)}S_g$ au point de concentration¹⁷. En dimension 3, la situation est un petit peu différente¹⁸ et les bulles sont nécessairement isolées. Enfin, pour recoller une bulle sur la variété, il faut avoir $h_0 = \frac{n-2}{4(n-1)}S_g$ au point de concentration en dimensions $n \geq 4$ et la masse de la fonction de Green nulle en ce point en dimension 3. Dans la preuve du théorème 3.1, c'est la bulle la plus basse qui donne la contradiction. Rien n'interdit de recoller une bulle sur une bulle lorsque $h_0 > \frac{n-2}{4(n-1)}S_g$ mais la bulle la plus basse, qui doit être recollée soit sur la limite faible, soit sur la variété, ne peut l'être que si $h_0 = \frac{n-2}{4(n-1)}S_g$, sauf en dimensions 3 et 6.

Ainsi ces deux approches sont vraiment différentes. Pour démontrer la compacité dans l'équation de Yamabe, c'est par exemple l'approche sans borne sur l'énergie qui est utilisée; il faut donc démontrer directement qu'il est impossible de recoller une bulle sur quoique ce soit. Quand la contradiction vient de la bulle la plus basse, il semble délicat de la détecter lorsqu'aucune borne sur l'énergie n'est faite a priori. Mais il est également extrêmement délicat de construire des suites de solutions qui explosent avec une énergie tendant vers $+\infty$, c'est-à-dire développant une infinité de bulles. La question suivante est donc extrêmement intéressante et difficile :

Question 4 - L'équation 3.2 est-elle fortement stable (fortement ∞ -stable) si $h_0 > \frac{n-2}{4(n-1)}S_g$ en dimensions $n \neq 3, 6$? Ou alors peut-on trouver des contre-exemples?

Nous pensons que c'est plutôt la deuxième option la bonne mais construire des contre-exemples risque de ne pas être simple. Ceci n'empêchera pas l'équation d'être fortement ∞ -stable dans certains cas mais il nous semble que des hypothèses supplémentaires sur h_0 devront être faites.

2.5. Et si l'opérateur a un noyau? Il serait très agréable également de comprendre quel rôle joue le noyau de l'opérateur $\Delta_g + h$ s'il y en a un. Nous avons vu que la première valeur propre de cet opérateur doit être positive ou nulle pour que la question de la stabilité ait un intérêt. Si celle-ci est nulle, le noyau de cet opérateur est 1-dimensionnel. Quid de la stabilité dans ce cas?

Question 4 - Est-il possible d'obtenir une caractérisation des équations Λ -stables lorsque $\lambda_1(h) = 0$?

Comme nous l'avons vu au chap. 2, section 1.5, la présence du noyau influence fortement le profil des suites de solutions qui explosent et son rôle dans cette question de stabilité n'est pas encore clair.

17. Voir les estimations sur les rayons d'influence de la page 79.

18. Au sujet de ce phénomène dimensionnel, voir section 1 du chap. 4.

3. Les équations de contrainte en relativité générale

Dans (26), nous avons étudié cette question de stabilité pour les équations d'Einstein-Lichnerowicz avec champ scalaire sur des variétés riemanniennes compactes. Ces équations proviennent des équations de contrainte issues de la théorie de la relativité générale, plus précisément lorsque la gravitation est couplée avec un champ scalaire vérifiant une équation des ondes non-linéaire (ou linéaire).

Dans la première sous-section ci-dessous, nous allons décrire l'origine de l'équation dont nous étudierons la stabilité dans la sous-section suivante. Nous expliquerons également pourquoi il est intéressant d'obtenir des résultats de stabilité forte pour cette équation.

3.1. Les contraintes dans la théorie d'Einstein avec champ scalaire.

Dans la théorie de la relativité générale, l'espace-temps est décrit par une variété lorentzienne (X, h) de dimension $n + 1$. L'équation d'Einstein relie courbure de cet espace-temps et matière par

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Sh_{ij} = 8\pi\mathcal{G}T_{ij}.$$

Dans cette équation, R_{ij} est la courbure de Ricci de (X, h) , S sa courbure scalaire et T_{ij} est le tenseur énergie-impulsion de la matière présente, \mathcal{G} étant la constante gravitationnelle de Newton. La forme du tenseur T_{ij} reste à déterminer et dépend du modèle utilisé pour décrire la matière. Toujours est-il que, pour des raisons de conservation de l'énergie, celui-ci doit être à divergence nulle, i.e. $T_{ij}{}^{;j} = 0$, ce qui est d'ailleurs clair pour des raisons géométriques une fois posée l'équation d'Einstein¹⁹ puisque $(R_{ij} - \frac{1}{2}Sh_{ij})^{;j} = 0$.

Dans une théorie de champ scalaire, le tenseur T dépend de la métrique h et d'un champ scalaire $\psi : X \mapsto \mathbb{R}$ et s'écrit

$$T_{ij} = \partial_i\psi\partial_j\psi - \left(\frac{1}{2}|\nabla\psi|_h^2 + V(\psi)\right)h_{ij}$$

où V est un potentiel. Comme T est à divergence nulle, le champ ψ doit vérifier une équation des ondes

$$\nabla^i\partial_i\psi = \frac{dV}{d\psi}.$$

Le potentiel dépend de la théorie considérée : pour un champ de Klein-Gordon massif, $V(\psi) = \frac{1}{2}m\psi^2$; le cas $V(\psi) \equiv \Lambda$ et $\psi \equiv 0$ redonne l'équation d'Einstein dans le vide avec une constante cosmologique. Dans la suite, nous oublierons la

19. Mais c'est ce qui s'appelle renverser le processus historique puisque c'est entre autres cette conservation de l'énergie qui a conduit Einstein à ce choix de tenseur géométrique dans son équation.

constante physique $8\pi\mathcal{G}$ dans l'équation d'Einstein et celle-ci s'écrira donc dans notre situation

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Sh_{ij} = \partial_i\psi\partial_j\psi - \left(\frac{1}{2}|\nabla\psi|_h^2 + V(\psi)\right)h_{ij}. \quad (3.7)$$

Considérons maintenant une tranche d'espace M , i.e. une hypersurface (de dimension n) de type espace²⁰ dans X . Ecrivons localement la métrique sous la forme

$$h = -N^2 dt \otimes dt + \gamma_{ij}\theta^i \otimes \theta^j$$

où $(dt, d\theta^i)$ est la base duale de la base associée à la tranche d'espace choisie $(e_\perp = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \beta^j\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right), \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. La fonction N est la fonction de délai, les β^j sont les composantes du vecteur décalage. Ces deux données dépendent du feuilletage local de X et de la fonction temps choisi. Posons pour la suite

$$\pi = N^{-1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - \beta^j\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right).$$

En utilisant l'équation d'Einstein pour $G_{\perp\perp}$ et l'équation de Gauss, nous obtenons la contrainte hamiltonienne

$$2N^{-2}G_{\perp\perp} = S_\gamma - |K|_\gamma^2 + (tr_\gamma K)^2 = \pi^2 + |\nabla\psi|_\gamma^2 + 2V(\psi) \quad (3.8)$$

où S_γ est la courbure scalaire de la variété riemannienne (M, γ) et K est la seconde forme fondamentale de la sous-variété M dans X . De l'équation d'Einstein sur les $G_{j\perp}$ et des équations de Codazzi, nous obtenons la contrainte de moment

$$-N^{-1}G_{j\perp} = K_{jm}{}^{,m} - \partial_j(tr_\gamma K) = \pi\partial_j\psi. \quad (3.9)$$

Ces équations dites de contrainte portent sur γ , K , ψ et π mais ne contiennent pas N et β .

Le reste de l'équation d'Einstein (i.e. portant sur les G_{ij}) donne alors les équations d'évolution

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{ij}}{\partial t} = N \left(R_{ij} - 2K_{im}K_j^m + (tr_\gamma K)K_{ij} - \partial_i\psi\partial_j\psi + \frac{1}{n-1}V(\psi)\gamma_{ij} \right) \\ - N^{-1}N_{,ij} + \mathcal{L}_\beta K_{ij} \end{aligned} \quad (3.10)$$

et

$$\frac{\partial\pi}{\partial t} = N \left(\Delta\psi + (tr_\gamma K)\pi - \frac{\partial V}{\partial\psi} \right) + \gamma^{kl}\partial_k N\partial_l\psi + \mathcal{L}_\beta\pi. \quad (3.11)$$

Les données ψ et γ évoluent par

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = N\pi + \mathcal{L}_\beta\psi$$

²⁰. "de type espace" signifie que la métrique induite de h sur M est définie positive, i.e. riemannienne.

et

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = -2NK_{ij} + \mathcal{L}_\beta \gamma_{ij}$$

grâce aux définitions de π et K . Les variables N et β sont complètement libres durant l'évolution. Cela reflète l'invariance des équations sous l'action du groupe des difféomorphismes.

Dans [40], en s'inspirant de [69] et en s'appuyant sur les travaux de Leray [108], il est démontré que le système d'équations (3.10) et (3.11) est hyperbolique et bien posé²¹, quitte à faire un bon choix de jauge²². Partant d'une variété riemannienne (M, γ) et de données K , ψ et π sur M satisfaisant les équations de contrainte (3.8)-(3.9), le système d'équations d'évolution (3.10)-(3.11) admet une solution en temps petit sur M avec les conditions initiales (γ, K, ψ, π) . En d'autres termes, il existe une variété lorentzienne X vérifiant l'équation d'Einstein (3.7) telle que M soit une tranche d'espace dans X , γ soit la métrique induite sur M par la métrique lorentzienne, K soit sa seconde forme fondamentale, ψ et π soient les données du champ et de sa "dérivée temporelle" sur M .

Trouver des solutions des équations de contrainte permet donc de générer des espaces-temps vérifiant les équations d'Einstein avec champ scalaire. Comprendre l'ensemble des solutions des équations de contrainte peut également avoir un intérêt puisque ces contraintes sont bien sûr vérifiées tout au long de l'évolution. Pour un très bel article de survol sur ces équations de contrainte, nous renvoyons à [14]. Y est en particulier expliquée en détails la méthode dite conforme pour trouver des solutions à ces équations de contrainte, méthode que nous allons brièvement décrire dans notre situation maintenant.

Les équations de contrainte (3.8)-(3.9) sont sous-déterminées²³. Assez paradoxalement, un bon moyen pour trouver des solutions à ces équations est de fixer un certain nombre d'inconnues afin de rendre le système déterminé et de tenter de résoudre ce système pour les inconnues restantes. C'est l'objet de la méthode conforme, initiée par Lichnerowicz [117]. Partons d'une variété riemannienne (M, g) . Considérons comme fixée la classe conforme²⁴ et cherchons γ sous la forme

$$\gamma = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$$

pour une fonction φ régulière et strictement positive sur M . Puisque les courbures scalaires de γ et de g sont reliées par l'équation

$$\Delta_g \varphi + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g \varphi = \frac{n-2}{4(n-1)} S_\gamma \varphi^{\frac{n+2}{n-2}},$$

21. Pour les équations d'Einstein dans le vide, ce résultat remonte aux années 50 et au travail de Choquet-Bruhat [69].

22. i.e. de fonctions N et β .

23. Il y a $n+1$ équations pour $n^2 + n + 2$ inconnues.

24. Cela "tue" déjà $\frac{n^2+n-2}{2}$ variables.

la contrainte hamiltonienne (3.8) devient

$$\begin{aligned} \varphi^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g \varphi + S_g \varphi \right) &= \pi^2 + \varphi^{-\frac{4}{n-2}} |\nabla \psi|_g^2 + 2V(\psi) \\ &\quad + \varphi^{-\frac{8}{n-2}} |K|_g^2 - \tau^2 \end{aligned}$$

avec

$$\tau = \gamma^{ij} K_{ij}.$$

La contrainte de moment (3.9) devient quant à elle

$$\varphi^{-\frac{4}{n-2}} (\operatorname{div}_g K)_i - \frac{2}{n-2} \tau \varphi^{-1} \varphi_{,i} + 2\varphi^{-\frac{n+2}{n-2}} K_{ij} \varphi^{,j} = \pi \psi_{,i} + \tau_{,i}.$$

Cette deuxième équation sur K se simplifie en posant

$$K = \varphi^{-2} P + \frac{\tau}{n} \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$$

avec P sans trace. Elle devient alors

$$\varphi^{-\frac{2n}{n-2}} \operatorname{div}_g (P)_i = \frac{n-1}{n} \tau_{,i} + \pi \psi_{,i}.$$

Celle-ci est encore sous-déterminée. Considérons τ , qui sera la courbure moyenne de M dans l'espace-temps X , fixé, et posons également²⁵

$$P = U + \mathcal{L}_g X$$

pour U un champ de $(2,0)$ -tenseurs sans trace et à divergence nulle et X un champ de vecteurs. Ici, $\mathcal{L}_g X$ est la dérivée de Lie conforme de X , i.e.

$$(\mathcal{L}_g X)_{ij} = X_{i,j} + X_{j,i} - \frac{2}{n} (\operatorname{tr}_g X) g_{ij}.$$

Si U est considérée comme donnée, le nombre d'inconnus devient égal au nombre d'équations puisque la contrainte de moment devient

$$\varphi^{-\frac{2n}{n-2}} \operatorname{div}_g (\mathcal{L}_g X)_i = \frac{n-1}{n} \tau_{,i} + \pi \psi_{,i}.$$

Nous arrivons donc au système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g \varphi + \left(S_g - |\nabla \psi|_g^2 \right) \varphi &= \left(2V(\psi) - \frac{n-1}{n} \tau^2 + \pi^2 \right) \varphi^{\frac{n+2}{n-2}} \\ &\quad + \varphi^{-\frac{3n-2}{n-2}} |U + \mathcal{L}_g X|_g^2 \end{aligned}$$

et

$$\operatorname{div}_g (\mathcal{L}_g X)_i = \left(\frac{n-1}{n} \tau_{,i} + \pi \psi_{,i} \right) \varphi^{\frac{2n}{n-2}}$$

d'inconnues φ et X . Afin de le découpler au maximum, il convient de poser

$$\pi = \varphi^{-\frac{2n}{n-2}} \tilde{\pi}$$

25. Tout champ de $(2,0)$ -tenseurs symétriques sans trace peut se décomposer ainsi.

pour arriver au système final :

$$\begin{cases} \Delta_g \varphi + h\varphi = f\varphi^{\frac{n+2}{n-2}} + a\varphi^{-\frac{3n-2}{n-2}} \\ \Delta_{g,conf} X = \frac{n-1}{n}\varphi^{\frac{2n}{n-2}}\nabla\tau + \tilde{\pi}\nabla\psi \end{cases} \quad (3.12)$$

avec

$$\begin{aligned} h &= \frac{n-2}{4(n-1)} \left(S_g - |\nabla\psi|_g^2 \right), \\ f &= \frac{n-2}{4(n-1)} \left(2V(\psi) - \frac{n-1}{n}\tau^2 \right) \text{ et} \\ a &= \frac{n-2}{4(n-1)} \left(|U + \mathcal{L}_g X|_g^2 + \tilde{\pi}^2 \right). \end{aligned}$$

Étant donné une variété riemannienne (M, g) , des fonctions $\psi, \tilde{\pi}, \tau$ sur M et U un champ de $(2, 0)$ -tenseurs sans trace à divergence nulle, si X et φ vérifient le système d'équations (3.12), alors les données $(M, \gamma), K, \psi$ et π avec

$$\gamma = \varphi^{\frac{4}{n-2}}g, \quad \pi = \varphi^{-\frac{2n}{n-2}}\tilde{\pi} \text{ et } K = \varphi^{-2}(U + \mathcal{L}_g X) + \frac{\tau}{n}\varphi^{\frac{4}{n-2}}g$$

satisfont les contraintes hamiltonienne (3.8) et de moment (3.9) et constituent donc des données initiales pour le problème de Cauchy²⁶.

Ce système est entièrement découplé si τ est constante²⁷. Dans ce cas, il suffit de résoudre la seconde équation, ce qui ne pose aucun problème puisque l'opérateur $\Delta_{g,conf}$ est elliptique. Il faut juste s'assurer que le noyau de cet opérateur est trivial (ou orthogonal à la donnée $\tilde{\pi}\nabla\psi$). Les éléments du noyau sont des champs de Killing conformes et leur présence est rare d'après [15]. Une fois résolue la seconde équation, reste à utiliser X comme donnée supplémentaire dans la première et à trouver une solution φ à celle-ci.

La méthode principale qui a été utilisée pour résoudre ce système (dans le cas découplé) est la méthode des sur- et sous-solutions. Celle-ci donne des résultats lorsque la fonction f est strictement négative. Par exemple, dans [41], il est démontré que la première équation de (3.12) admet une solution dès que $f \leq 0$, $a > 0$ et l'opérateur $\Delta_g + h$ est coercif. A titre de remarque, dans le cas découplé, pour les équations d'Einstein dans le vide, i.e. avec $\psi = 0$, $\pi = 0$ et $V \equiv 0$, il est complètement connu, en fonction des données, si l'équation admet des solutions ou non (voir Bartnik-Isenberg [14]). Plus récemment, Hebey-Pacard-Pollack [81] ont

26. En particulier, il existe un espace-temps $X = (-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ vérifiant l'équation d'Einstein (3.7) avec γ la métrique induite sur M , K la seconde forme fondamentale de M dans X , et donc τ sa courbure moyenne, ψ et π étant les données du champ et de sa dérivée temporelle sur la tranche d'espace M .

27. Cette fonction τ est la courbure moyenne de l'hypersurface M dans son développement de Cauchy $X = M \times (-\varepsilon; \varepsilon)$.

utilisé une méthode variationnelle pour démontrer des résultats d'existence sur le système découplé mais cette fois en accordant que f soit positive ou change de signe.

Pour le système couplé, presque rien n'est connu. Pour les équations d'Einstein dans le vide, la seule approche est encore par sur- et sous-solutions, notions développées pour les systèmes dans [89]. Cette approche a été raffinée par Maxwell dans [127]. Mais il est certain que ces techniques achopperont sur le signe de la non-linéarité f pour notre système (3.12). Nous sommes pour notre part convaincus que la méthode variationnelle, couplée avec des résultats de stabilité, devrait donner des résultats dans le cas couplé. La section suivante peut être vue comme une première étape vers cet objectif.

3.2. Stabilité et instabilité de l'équation d'Einstein-Lichnerowicz. Soit l'équation de Lichnerowicz de la sous-section précédente, i.e.

$$\Delta_g u + hu = fu^{\frac{n+2}{n-2}} + au^{-\frac{3n-2}{n-2}} \quad (3.13)$$

où h , f et a sont des fonctions régulières sur une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Notons, pour $0 \leq \Lambda \leq +\infty$,

$$\mathcal{S}_{a,h,f}^\Lambda = \{u \in C^2(M) \text{ solution de (3.13) avec } E(u) \leq \Lambda\}$$

où, encore une fois, l'énergie est la norme $L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$. L'équation (3.13) sera dite Λ -stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|a - a'\|_{C^0} + \|h - h'\|_{C^0} + \|f - f'\|_{C^2} \leq \eta \Rightarrow d_{C^2}^{\leftrightarrow}(\mathcal{S}_{a',h',f'}^{\Lambda+\varepsilon}, \mathcal{S}_{a,h,f}^\Lambda) \leq \varepsilon$$

où la distance $d_{C^2}^{\leftrightarrow}$ a été définie en (3.3), page 74. Elle sera dite fortement Λ -stable si, de plus, l'ensemble $\mathcal{S}_{a,h,f}^\Lambda$ est borné dans $C^2(M)$.

Le résultat que nous avons démontré dans (26) est le suivant :

THÉORÈME 3.3. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $3 \leq n \leq 5$. Soient a , h et f trois fonctions régulières sur M . Alors*

- l'équation (3.13) est fortement Λ -stable pour tout $\Lambda > 0$ dès que $a > 0$.
- l'équation (3.13) est fortement ∞ -stable dès que $a > 0$ et $f > 0$.

Un corollaire de ce résultat est qu'en dimensions $3 \leq n \leq 5$, pour des choix génériques de fonctions a , h et f avec $a > 0$ et $f > 0$, il existe un nombre pair, éventuellement nul, de solutions à l'équation (3.13). En particulier, à chaque fois que [81] nous fournit une solution, il en existe une deuxième (sauf cas exceptionnel). Un simple argument de théorie du degré donne ce corollaire à partir du moment où la forte ∞ -stabilité est démontrée pour l'ensemble des données considérées.

Il faut remarquer que l'hypothèse $a > 0$ est compatible avec le problème des contraintes décrit ci-dessus (il suffit par exemple de prendre $\tilde{\pi} > 0$) et que c'est

une hypothèse cruciale dans ce théorème²⁸. Ainsi l'équation de Lichnerowicz ne pose pas de problèmes d'instabilité dans le système (3.12), au moins en petites dimensions. C'est de bon augure pour qui veut comprendre le système couplé.

En dimensions plus grandes que 6, l'équation n'est pas stable sous les hypothèses du théorème 3.3. En effet, nous avons la proposition suivante, tirée de (26) :

PROPOSITION 3.1. *Pour tout $n \geq 6$, il existe des variétés riemanniennes compactes (M, g) de dimension n et des fonctions a et h strictement positives telles que l'équation*

$$\Delta_g u + hu = u^{\frac{n+2}{n-2}} + au^{-\frac{3n-2}{n-2}}$$

ne soit pas Λ -stable dès que Λ est suffisamment grand.

L'effet dimensionnel de ces résultats est à relier avec le fait qu'en dimensions $3 \leq n \leq 5$, il est impossible pour une suite de solutions d'équation de type Yamabe d'exploser avec une limite faible non-nulle. Ici le terme en puissance négative dans l'équation (avec le bon signe de a) assure en quelque sorte que cette limite faible est non-nulle (même si, pour l' ∞ -stabilité, il n'est même pas certain qu'elle existe). Ensuite, la preuve ressemble dans les deux cas beaucoup plus à une preuve de type ∞ -stabilité que Λ -stabilité (cf. discussion de la section 2.4, page 83). En fait, il est directement démontré qu'aucun point de concentration ne peut apparaître, sans appel à la bulle la plus basse. L'hypothèse sur l'énergie lorsque f change de signe est là pour éviter des profils de concentration dégénérés.

4. Les systèmes d'EDP elliptiques

Dans (24) et (27), nous nous sommes intéressés à cette question de stabilité pour des systèmes d'EDP elliptiques. Ces systèmes sont vérifiés par les ondes stationnaires pour des systèmes couplés d'équations de Schrödinger non-linéaires²⁹ (de type Gross-Pitaevskii). Ces systèmes apparaissent essentiellement dans deux branches de la physique : dans la théorie de Hartree-Fock des doubles condensats de Bose-Einstein (cf. [31]), dans l'étude des solitons incohérents en optique non-linéaire (cf. [4, 42, 86, 87, 97]).

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Pour $p \geq 1$ un entier, $M_p^s(\mathbb{R})$ dénote l'espace vectoriel des matrices carrées symétriques réelles de taille p . Considérons le système d'EDP elliptiques

$$\Delta_g^p \mathcal{U} + \mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{U}^{\frac{n+2}{n-2}}$$

où $\mathcal{A} : M \mapsto M_p^s(\mathbb{R})$ est C^1 , $\mathcal{U} : M \mapsto \mathbb{R}^p$ est une p -fonction, Δ_g^p est l'opérateur de Laplace-Beltrami agissant sur les p -fonctions, i.e. le laplacien agissant ligne à

28. Il est impossible d'obtenir un résultat de stabilité sans hypothèse sur h et f si a est autorisé à s'annuler voire à changer de signe.

29. Une référence assez générale sur ces systèmes et leur rôle en physique est [1].

ligne. Reste à spécifier ce que nous entendons par $\mathcal{U}^{\frac{n+2}{n-2}}$. Deux choix naturels sont possibles. Le premier, étudié dans (24), consiste à poser, en coordonnées,

$$\left(\mathcal{U}^{\frac{n+2}{n-2}}\right)_i := |u_i|^{\frac{4}{n-2}} u_i$$

et cela correspond à un système faiblement couplé. En effet, dans ce cas, le couplage entre les lignes n'a lieu que dans le potentiel, par l'intermédiaire de la matrice de couplage \mathcal{A} . C'est le système le plus simple à étudier et nous ne décrirons pas ici les résultats obtenus dans ce cadre dans (24). Le deuxième, étudié dans (27), est beaucoup plus intéressant et correspond à un système fortement couplé. Dans ce deuxième cas,

$$\mathcal{U}^{\frac{n+2}{n-2}} := |\mathcal{U}|^{\frac{4}{n-2}} \mathcal{U}$$

où $|\cdot|$ est la norme l^2 dans \mathbb{R}^p . Ici, le couplage entre les lignes a lieu à la fois dans le potentiel, par l'intermédiaire de la matrice de couplage \mathcal{A} , et dans la non-linéarité. À partir de maintenant, c'est ce système fortement couplé que nous considérerons. Il peut donc s'écrire

$$\Delta_g \mathcal{U} + \mathcal{A} \mathcal{U} = |\mathcal{U}|^{\frac{4}{n-2}} \mathcal{U} \quad (3.14)$$

ou, en coordonnées,

$$\Delta_g u_i + \sum_{j=1}^p \mathcal{A}_{ij} u_j = \left(\sum_{j=1}^p u_j^2 \right)^{\frac{2}{n-2}} u_i \quad (3.14)$$

pour $i = 1, \dots, p$ où les (u_i) sont les coordonnées de \mathcal{U} et les (\mathcal{A}_{ij}) les entrées de la matrice de couplage \mathcal{A} . Nous nous intéresserons dans la suite à des solutions positives ou nulles de ce système où, par $\mathcal{U} \geq 0$, nous entendons $u_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, p$.

Nous mesurerons la stabilité de ce système par rapport aux perturbations de la matrice de couplage \mathcal{A} . Ainsi, nous dirons que le système (3.14) est Λ -stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|\mathcal{A}' - \mathcal{A}\|_{C^1} \leq \eta \Rightarrow d_{C^2}^{\leftrightarrow}(\mathcal{S}_{\mathcal{A}'}^{\Lambda+\varepsilon}, \mathcal{S}_{\mathcal{A}}^{\Lambda}) \leq \varepsilon$$

où

$$d_{C^2}^{\leftrightarrow}(X, Y) = \sup_{\mathcal{U} \in X} \inf_{\mathcal{V} \in Y} \|\mathcal{U} - \mathcal{V}\|_{C^2} ,$$

les normes C^k pour des p -fonctions ou des fonctions de matrices étant les sommes des normes C^k des coordonnées et où

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^{\Lambda} = \{\mathcal{U} \text{ solution de (3.14) telle que } \mathcal{E}(\mathcal{U}) \leq \Lambda\} ,$$

l'énergie $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ d'une p -fonction étant définie par

$$\mathcal{E}(\mathcal{U}) = \int_M |\mathcal{U}|^{\frac{2n}{n-2}} dv_g .$$

Dire que le système est Λ -stable revient donc à dire qu'une petite perturbation de la matrice de couplage ne crée pas de solutions d'énergie plus petite que Λ loin de toute solution du système initial.

Nous définirons comme dans la section 2 la forte Λ -stabilité comme étant la Λ -stabilité plus la Λ -compacité. Nous nous sommes attachés dans (27) à trouver des conditions sur la matrice de couplage \mathcal{A} pour que le système soit fortement Λ -stable pour Λ fini³⁰. Avant d'énoncer le résultat de (27), nous avons besoin d'introduire deux hypothèses sur la matrice de couplage \mathcal{A} . La première concerne le noyau de l'opérateur $\Delta_g + \mathcal{A}$:

$$(H) \text{Ker}(\Delta_g + \mathcal{A}) \cap L^2(M, \text{Vect}_+(\mathbb{R}^p)) = \{0\}$$

où $\text{Vect}_+(\mathbb{R}^p)$ est l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^p avec des composantes positives ou nulles. Pour introduire la seconde hypothèse, notons

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A} - \frac{n-2}{4(n-1)} S_g Id$$

où S_g est la courbure scalaire de (M, g) et Id est la matrice identité. Pour $x \in M$, notons $Is_{\mathcal{A}_n(x)}$ l'espace vectoriel des vecteurs isotropes³¹ de \mathcal{A}_n . La deuxième hypothèse est que, pour tout $x \in M$, $\mathcal{A}_n(x)$ ne doit pas posséder de sous-espaces stables avec une base orthonormée composée de vecteurs isotropes à composantes positives ou nulles. En d'autres termes, nous supposons que

(H') *Pour tout $x \in M$ et tout $k \in \{1, \dots, p\}$, il n'existe pas de famille orthonormale (e_1, \dots, e_k) de vecteurs dans $Is_{\mathcal{A}_n(x)} \cap \text{Vect}_+(\mathbb{R}^p)$ telle que l'espace vectoriel engendré par cette famille soit stable par \mathcal{A}_n .*

Le cas $k = 1$ dans l'hypothèse (H') revient à dire que le noyau de $\mathcal{A}_n(x)$ ne possède pas de vecteur non-trivial à composantes positives ou nulles. L'hypothèse (H') est satisfaite dans plusieurs situations simples. C'est le cas par exemple si $\mathcal{A}_n(x)$ ne possède pas de vecteurs isotropes, ce qui est assuré par exemple par une hypothèse du type $\mathcal{A}_n(x)$ définie positive (ou négative) pour tout $x \in M$. Dans le cas $p = 2$, (H') est satisfaite dès lors que $\det \mathcal{A}_n(x) > 0$ pour tout $x \in M$.

Autant l'hypothèse (H) est analytique de nature, l'hypothèse (H') est elle algébrique. Elle est d'ailleurs reliée à la structure conforme sous-jacente à notre système. Mais, par rapport à la situation pour les équations de type Yamabe, elle prend en compte l'interaction entre les lignes³².

Le théorème démontré dans (27) est le suivant :

THÉORÈME 3.4. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$, soit $p \geq 1$ un entier. Pour toute fonction $\mathcal{A} : M \mapsto M_p^s(\mathbb{R})$ de classe C^1*

30. Le cas $\Lambda = +\infty$ est l'objet d'un travail en cours, (32).

31. Un vecteur isotrope d'une matrice B est un vecteur X tel que $\langle BX, X \rangle = 0$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^p .

32. L'hypothèse pour $k = 1$ serait l'analogue de l'hypothèse du théorème 3.1. Mais cette hypothèse pour $k \geq 2$ est liée au fait que nous regardons ici un système d'EDP elliptiques.

satisfaisant les hypothèses (H) et (H'), le système (3.14) est fortement Λ -stable pour tout $\Lambda > 0$ si $n \neq 6$. De plus, il existe des exemples de variétés de dimension 6 et de fonctions \mathcal{A} de classe C^1 vérifiant (H) et (H') pour lesquelles le système (3.14) n'est pas fortement Λ -stable dès que Λ est suffisamment grand.

Pour démontrer ce théorème, il faut : une théorie ponctuelle des défauts de compacité (cf. section 1 du chap. 2 pour le cas scalaire) pour ces systèmes couplés, une estimation des rayons d'influence des bulles (cf. section 2.1 pour le cas scalaire). Si la preuve de ce théorème suit les schémas de preuve de (18) et (16), au prix d'un sérieux remaniement tout de même, elle a également bénéficié de quelques travaux préliminaires sur ces systèmes, en particulier (24).

Nous n'allons pas reprendre le schéma de preuve d'un tel résultat mais juste en pointer les difficultés principales. La première, de taille, est l'absence totale de principe du maximum pour ces systèmes. Par exemple, une composante de \mathcal{U} peut parfaitement s'annuler quelque part sans pour autant être identiquement nulle. Le principe de comparaison étant essentiel dans la preuve des estimées ponctuelles (cf. section 1 du chap. 2 pour le cas scalaire), cela crée bien entendu des complications. Nous sommes en fait sauvés par le fait que la somme des composantes de \mathcal{U} vérifie elle un principe du maximum, ce qui permet de faire passer un certain nombre d'estimées. Reste à travailler pour passer d'estimées sur les composantes prises dans leur ensemble à des estimées sur les composantes individuelles. Cette théorie ponctuelle permet de décrire une suite de solutions du système qui explose en termes de bulles standard modelées sur les solutions du système $\Delta \mathcal{U} = |\mathcal{U}|^{\frac{4}{n-2}} \mathcal{U}$ dans l'espace entier \mathbb{R}^n . Les solutions de ce système sont classifiées dans (27) et (32).

Une deuxième difficulté, certes banale à énoncer mais bien entendu fondamentale, est que les composantes de \mathcal{U} interagissent. Même si seule une composante de \mathcal{U} développe un point de concentration quelque part, il est clair que les autres lignes en seront affectées puisque l'équation qui les régit va devenir singulière. Si, de plus, plusieurs composantes développent des points de concentration, à des échelles différentes, plus ou moins proches les uns des autres, il est clair que les interactions risquent d'être difficiles à comprendre dans le détail, chose nécessaire pour obtenir un résultat de stabilité digne de ce nom. C'est tout le travail sur les rayons d'influence qui s'en trouve perturbé et qui demande à être repris en grande partie.

Quelques problèmes d'EDP elliptiques euclidiennes

Ce chapitre porte sur les travaux **(25)** et **(28)**. Ils ont tous deux en commun de démontrer des résultats de non-existence de solutions à des EDP elliptiques dans des domaines de l'espace euclidien en utilisant la stabilité d'une équation qui ne possède trivialement pas de solutions. Nous commencerons par décrire le travail **(28)**, écrit en collaboration avec P. Laurain, qui jette une lumière nouvelle sur le phénomène des petites dimensions dans les problèmes à la Brézis-Nirenberg. Ce sera l'objet de la section 1. Ensuite, dans la section 2, nous nous intéresserons à des problèmes de type Ambrosetti-Prodi et en particulier à une conjecture de Lazer-McKenna en résumant le travail **(25)**. Enfin, cf. **(30)**, nous travaillons avec F. Robert et J. Wei sur une conjecture de Ni qui revient encore une fois à démontrer de la stabilité pour une équation à croissance critique sur un domaine euclidien, mais cette fois avec condition de Neumann au bord, ce qui a une forte tendance à compliquer les choses puisque des points de concentration peuvent apparaître sur le bord. Comprendre l'interaction entre points de concentration à l'intérieur et points de concentration sur le bord n'est pas chose aisée et, encore une fois, des phénomènes dimensionnels apparaissent.

1. Le phénomène des petites dimensions

Si l'équation avec croissance de Sobolev critique doit sa gloire en grande partie au problème de Yamabe et à l'analyse géométrique, si nombre d'idées nouvelles dans l'analyse de ces EDP elliptiques avec défaut de compacité sont issues de ce domaine, il ne faut pas oublier que, dès les années 1960, et parallèlement ensuite, les mêmes équations ont été étudiées dans l'espace euclidien. A partir des années 1980, ce domaine, sous l'impulsion du travail de Brézis et Nirenberg **[27]**, a connu une extension fulgurante.

Nous allons revenir dans cette section sur le phénomène des petites dimensions, déjà mis en évidence par les travaux d'Aubin **[9]** en 1976, mais mis sur le devant de la scène par Brézis-Nirenberg **[27]** et Schoen **[153]**.

La rencontre entre les deux domaines sus-cités s'est sans doute faite chez Trudinger qui découvre l'erreur de Yamabe après avoir pris connaissance du travail de Pohožaev. Résoudre l'équation

$$\Delta u + hu = u^q$$

dans un ouvert Ω avec condition de Dirichlet au bord pour h une fonction régulière et bornée sur Ω n'est pas difficile tant que $q < \frac{n+2}{n-2}$. En effet, dans ce cas, il suffit par exemple de résoudre le problème de minimisation

$$\mu = \inf_{u \in \mathcal{H}_{q+1}} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + hu^2) dx$$

où \mathcal{H}_{q+1} est l'ensemble des fonctions dans $H_0^1(\Omega)$, l'espace des fonctions nulles au bord dont le gradient est dans L^2 , normalisées telles que $\int_{\Omega} |u|^{q+1} dx = 1$. Or ce problème de minimisation est simple à résoudre car l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{q+1}(\Omega)$ est compacte tant que $q < \frac{n+2}{n-2}$. Une condition suffisante pour le résoudre est tout de même que la première valeur propre de l'opérateur $\Delta + h$ soit strictement positive. Mais c'est également une condition nécessaire pour avoir une solution de strictement positive de l'équation ci-dessus (cf. note page 75). Il suffit ensuite de remarquer que le minimum peut être pris positif ou nul et d'utiliser le principe du maximum pour trouver une solution strictement positive à l'équation ci-dessus. Pour $q = \frac{n+2}{n-2}$, tout se corse. En 1965, Pohožaev, dans [140], démontre que l'équation ci-dessus n'admet pas de solution si $h \equiv \lambda \geq 0$, $q \geq \frac{n+2}{n-2}$ et l'ouvert Ω est étoilé. Ce résultat est basé sur l'identité de Pohožaev. Nous reviendrons sur cette identité un peu plus loin, page 98. Ainsi, résoudre cette équation dès que $q = \frac{n+2}{n-2}$ ne peut être simple. Ce problème a connu un certain nombre de développements avant les années 80, essentiellement dans le cadre des problèmes de Yamabe et de courbure scalaire prescrite. Les contributions importantes sont celles de Trudinger [164], Aubin [9], Kazdan-Warner [98, 99]. Citons également celle de Schoen [153] au début des années 80. Dans le monde euclidien, une contribution importante, qui contribua à la publicisation de ces questions, fut celle de Brézis et Nirenberg [27].

Dans [27], Brézis et Nirenberg s'intéressent à l'existence de solutions minimisantes (donc positives) de l'équation

$$\Delta u + \lambda u = u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ dans } \Omega, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

où Ω est un ouvert lisse borné de \mathbb{R}^n . Une solution est dite minimisante si elle atteint le minimum de la fonctionnelle

$$J(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx$$

sur l'ensemble \mathcal{H} des fonctions de $H_0^1(\Omega)$ vérifiant $\int_{\Omega} |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx = 1$. Notons

$$\mu = \inf_{u \in \mathcal{H}} J(u).$$

Il est facile de voir grâce à un calcul de fonctions-tests dû à Aubin [10] que

$$\mu \leq K(n, 2)^{-2}$$

où $K(n, 2)$ est la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev euclidienne (cf. section 1 du chap. 1, page 17). Il est également bien connu depuis [9] et même [164] que l'infimum ci-dessus est atteint dès que $\mu < K(n, 2)^{-2}$ si $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$, la première valeur propre du laplacien sur Ω avec condition de Dirichlet au bord. En dimensions $n \geq 4$, en utilisant les fonctions-tests d'Aubin [9], Brezis et Nirenberg démontrent que $\mu < K(n, 2)^{-2}$ si et seulement si $\lambda < 0$. De plus, une solution minimisante n'existe que si $-\lambda_1(\Omega) < \lambda < 0$. En effet, son existence pour $\lambda \geq 0$ donnerait une fonction extrémale pour l'inégalité de Sobolev euclidienne sur tout l'espace (en l'étendant par 0 en-dehors de Ω); or celles-ci sont connues et ne sont pas à support compact (cf. chap. 1, page 17). Ainsi, en dimensions $n \geq 4$, l'existence d'une solution minimisante est équivalente au fait que $\mu < K(n, 2)^{-2}$, lui-même équivalent à $\lambda < 0$. Pour ce qui est de l'existence de solutions non-minimisantes, le résultat de Pohožaev [140] nous dit que, si l'ouvert Ω est étoilé, il ne peut pas exister de solutions dès que $\lambda > 0$. Ceci règle intégralement la question de l'existence de solutions au problème ci-dessus dans le cas étoilé. Si Ω est un ouvert non étoilé, la situation devient plus complexe, en ce qui concerne les solutions non-minimisantes. Il peut en exister pour $\lambda \geq 0$: c'est le cas sur les anneaux, cf. [98], ou sur des ouverts qui y ressemblent, cf. [46], et plus généralement sur tous les domaines ayant une topologie non triviale, cf. [12].

Revenons au problème des solutions minimisantes. Il n'est pas difficile d'étendre le résultat ci-dessus à l'équation

$$\Delta u + hu = u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.1)$$

où Ω est un ouvert lisse borné de \mathbb{R}^n et $h \in C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Remarquons que l'existence d'une solution à ce problème entraîne la coercivité de l'opérateur $\Delta_g + h$, i.e. la positivité de la première valeur propre de cet opérateur sur Ω avec condition de Dirichlet au bord. Posons

$$\mu_h = \inf_{u \in \mathcal{H}} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + hu^2) \, dx .$$

Encore une fois, il est clair que $\mu_h \leq K(n, 2)^{-2}$ et Brezis et Nirenberg [27] démontrent donc que les trois assertions suivantes sont équivalentes en dimensions $n \geq 4$:

- (a) Il existe $x \in \Omega$ tel que $h(x) < 0$.
- (b) $\mu_h < K(n, 2)^{-2}$.
- (c) μ_h est atteint par une fonction strictement positive solution minimisante de (4.1).

Mais le plus intéressant du travail de Brezis et Nirenberg reste la mise en lumière d'un phénomène dimensionnel. En dimension 3, la situation change drastiquement. Ils démontrèrent qu'en dimension 3, il existe $\lambda^*(\Omega) \in (-\lambda_1(\Omega), 0)$ tel que les propositions suivantes soient vraies :

- $\mu_\lambda = K(3, 2)^{-1}$ pour $\lambda \geq \lambda^*(\Omega)$.
- $\mu_\lambda < K(3, 2)^{-1}$ pour $\lambda < \lambda^*(\Omega)$.
- μ_λ n'est pas atteint pour $\lambda > \lambda^*(\Omega)$.

Cela pose évidemment la question de la caractérisation de ce $\lambda^*(\Omega)$ et également de l'existence d'une solution minimisante pour $\lambda = \lambda^*(\Omega)$. Dans le cas de la boule unité B de \mathbb{R}^3 , Brezis et Nirenberg ont démontré que $\lambda^*(B) = -\frac{1}{4}\lambda_1(B)$ et que $\mu_{\lambda^*(B)}$ n'est pas atteint.

Dans **(14)**, nous avons répondu à ces deux questions dans le cadre plus général de l'équation (4.1). Sur Ω un ouvert borné lisse de \mathbb{R}^3 , étant donnée une fonction $h \in C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que l'opérateur $\Delta + h$ soit coercif, nous noterons $\mathcal{G}_h : \Omega \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ sa fonction de Green avec condition de Dirichlet au bord. Cette fonction est symétrique, régulière en-dehors de la diagonale, positive, et vérifie au sens des distributions

$$\Delta_y \mathcal{G}_h(x, y) + h(y) \mathcal{G}_h(x, y) = \delta_x$$

pour tout $x \in \Omega$ et $\mathcal{G}_h(x, y) = 0$ si $x \in \Omega$ et $y \in \partial\Omega$. Cette fonction de Green admet le développement limité

$$\mathcal{G}_h(x, y) = \frac{1}{\omega_2 |x - y|} + M_h(x) + o(1)$$

pour y proche de x . La constante $M_h(x)$ est appelée la masse de la fonction de Green au point x . Nous avons démontré dans **(14)** que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) Il existe $x \in \Omega$ tel que $M_h(x) > 0$.
- (b) $\mu_h < K(3, 2)^{-1}$.
- (c) μ_h est atteint par une fonction strictement positive solution minimisante de (4.1).

Ainsi la question de l'existence de solutions minimisantes est parfaitement bien comprise en dimension 3 également.

Dans **(28)**, nous avons tenté de creuser un peu plus ce phénomène de petites dimensions en étudiant la stabilité de l'obstruction de Pohožaev en dimension 3. Considérons une solution de l'équation (4.1). Multiplier cette équation par $x^i \partial_i u$ et intégrer par parties mène à la célèbre identité de Pohožaev :

$$\int_{\Omega} \left(h + \frac{1}{2} x^i \partial_i h \right) u^2 dx = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x, \nu) (\partial_\nu u)^2 d\sigma. \quad (4.2)$$

Cette identité ne sort pas de nulle part. L'idée de départ est que l'équation $\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}}$ est invariante par le changement d'échelle $u_\lambda = \lambda^{\frac{n-2}{2}} u(\lambda x)$. Ceci signifie que tous les u_λ vérifient l'équation $\Delta u_\lambda = u_\lambda^{\frac{n+2}{n-2}}$. Différentier cette équation en $\lambda = 1$ nous donne une solution de l'équation linéarisée : la fonction $v = x^k \partial_k u + \frac{n-2}{2} u$

vérifie $\Delta v = \frac{n+2}{n-2}u^{\frac{4}{n-2}}v$. En fait, l'équation linéarisée admet d'autres solutions¹ liées à l'invariance de l'équation par toute translation en espace. Ces autres solutions mèneraient à d'autres identités de Pohožaev, toutefois moins intéressantes pour notre propos. Voyons en quoi cette remarque mène à l'identité de Pohožaev. Etant donnée une solution u de l'équation (4.1), la fonction $v = x^k \partial_k u + \frac{n-2}{2}u$ sera presque solution de l'équation linéarisée, le presque étant dû à la présence d'un bord et à celle d'un potentiel h . Tester l'équation (4.4) contre la fonction v devrait donc relier quelques quantités contenant des termes de bord et la fonction h . En effet, v vérifie l'équation

$$\Delta v + hv = \frac{n+2}{n-2}u^{\frac{4}{n-2}}v - (x^k \partial_k h + 2h)u.$$

Multiplions l'équation (4.4) par v et intégrons par parties. En utilisant le fait que

$$\int_{\Omega} u^{\frac{n+2}{n-2}}v \, dx = 0,$$

ce qui est fondamentalement dû à l'invariance de la norme $L^{\frac{2n}{n-2}}$ par le changement d'échelle ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\Delta u + hu)v \, dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} v \partial_{\nu} u \, d\sigma + \int_{\Omega} (\Delta v + hv)u \, dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} (x, \nu) (\partial_{\nu} u)^2 \, d\sigma - \int_{\Omega} (x^k \partial_k h + 2h)u^2 \, dx, \end{aligned}$$

ce qui n'est rien d'autre que (4.2).

Grâce à (4.2), l'équation (4.1) ne peut avoir de solutions non-triviales dès que Ω est étoilé par rapport à l'origine² et que

$$h + \frac{1}{2}x^i \partial_i h \geq 0. \quad (4.3)$$

C'est ce qui est appelé l'obstruction de Pohožaev.

Par contre, dès que Ω n'est plus étoilé ou que h ne vérifie plus cette condition, il est possible d'obtenir des résultats d'existence dont il est illusoire d'espérer donner une liste³.

Nous allons ici nous intéresser à la stabilité de l'obstruction de Pohožaev. Partant d'un domaine étoilé Ω et d'une fonction h vérifiant (4.3), nous voulons savoir si la propriété "il n'existe pas de solutions non-triviales au problème (4.1)" est stable

1. Pour une étude complète de cette équation linéarisée sur l'espace entier, cf. Bianchi-Egnell [17].

2. ou par rapport à n'importe quel point à condition de modifier de manière adéquate la condition (4.3), puisque le problème est invariant par translation.

3. Ce problème a fait l'objet d'une myriade de travaux dans les 20 dernières années.

par perturbation. Nous ne considérerons que des perturbations de la fonction h mais il serait tout-à-fait plausible de faire le même travail pour des perturbations du domaine Ω . Voici ce que nous entendons exactement par stabilité de l'obstruction de Pohožaev :

DÉFINITION 4.1. *Soit Ω un domaine étoilé (par rapport à 0) de \mathbb{R}^n , soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach de fonctions sur Ω . Soit $h_0 \in X \cap C^1(\Omega)$ une fonction vérifiant (4.3). Nous dirons que l'obstruction de Pohožaev est X -stable en (h_0, Ω) s'il existe $\delta(h_0, \Omega, X) > 0$ tel que pour toute fonction $h \in X$ avec $\|h - h_0\|_X \leq \delta(h_0, \Omega, X)$, la seule solution C^2 de (4.1) est la solution triviale.*

Nous dirons que l'obstruction de Pohožaev est X -stable si elle est X -stable en (h_0, Ω) pour tout domaine Ω étoilé et toute fonction $h_0 \in X \cap C^1(\Omega)$ vérifiant (4.3).

Evidemment, la propriété (4.3) n'est elle pas stable sous des perturbations C^k de h , ce qui rend la question de la stabilité de l'obstruction de Pohožaev intéressante. En dimensions $n \geq 4$, l'obstruction de Pohožaev n'est X -stable pour aucun X raisonnable. En effet, toute perturbation de $h_0 \equiv 0$, qui vérifie (4.3), qui sera négative quelque part conduira à l'existence d'une solution minimisante, non-triviale, de (4.1) en dimensions $n \geq 4$ (cf. discussion ci-dessus)⁴. Par contre, en dimension 3, le cas des solutions minimisantes peut laisser espérer une certaine stabilité de l'obstruction de Pohožaev. Nous avons obtenu dans **(28)** le résultat suivant, qui, à nos yeux, est une excellente illustration de ce phénomène dimensionnel :

THÉORÈME 4.1. *L'obstruction de Pohožaev est $C^{0,\eta}$ -stable pour tout $\eta > 0$ en dimension 3. En d'autres termes, étant donnés $\eta > 0$, Ω un domaine de \mathbb{R}^3 étoilé par rapport à l'origine, et une fonction $h_0 \in C^1(\Omega)$ vérifiant (4.3), il existe $\delta(\eta, \Omega, h_0) > 0$ tel que pour toute fonction $h \in C^{0,\eta}(\Omega)$, si $\|h - h_0\|_{C^{0,\eta}(\Omega)} \leq \delta$, le problème (4.1) n'admet pas de solutions non triviales.*

Une conséquence de ce résultat en dimension 3 est la suivante : si Ω est un domaine étoilé de \mathbb{R}^3 , il existe une constante $\hat{\lambda}(\Omega) < 0$ telle que l'équation (4.1) ne possède pas de solutions non-triviales avec $h \equiv \lambda$ dès lors que $\lambda > \hat{\lambda}(\Omega)$. Cette situation est clairement différente de ce qui se passe pour certains domaines non-étoilés, en particulier les domaines à trous (cf. **[12]**).

Dans **[28]**, Brezis et Willem ont étudié cette question dans le cas de la boule unité pour des fonctions radiales. Notons $L_r^p(B)$ l'ensemble des fonctions radiales qui sont dans $L^p(B)$. Il est démontré dans **[28]** que l'obstruction de Pohožaev est L_r^∞ -stable dans la boule unité de \mathbb{R}^3 pour toute fonction $h \in L_r^\infty(B) \cap C^1(B)$.

4. Nous ne disons rien sur la X -stabilité en un couple précis (h, Ω) en dimensions $n \geq 4$. Il pourrait être intéressant de voir si l'obstruction de Pohožaev peut être stable en dimensions $n \geq 4$ autour de certaines fonctions h , dans les cas où ce n'est pas trivial, voire de caractériser ces fonctions h .

Dans [28], la question était explicitement posée d'une extension de ce résultat au cas non-radial. Si notre résultat fournit une réponse à cette question, le problème se révèle plus subtil que prévu dans le cas non-radial puisque l'identité de Pohožaev n'est jamais L^∞ -stable :

THÉORÈME 4.2. *L'obstruction de Pohožaev n'est jamais L^∞ -stable. En d'autres termes, étant donné un domaine Ω de \mathbb{R}^3 étoilé par rapport à l'origine et une fonction $h_0 \in L^\infty(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ satisfaisant (4.3), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $h_\varepsilon \in C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que $\|h_\varepsilon - h_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon$ et une fonction u_ε de classe C^2 strictement positive vérifiant*

$$\Delta u_\varepsilon + h_\varepsilon u_\varepsilon = u_\varepsilon^5 \text{ dans } \Omega$$

et $u_\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega$.

Ainsi la L_r^∞ -stabilité est spécifique au cas radial. En fait, le résultat n'est pas dû tant à la symétrie radiale qu'à une de ses conséquences en dimension 3 qui est qu'une suite de solutions de perturbations de l'équation (4.1) qui sont radiales ne peut développer qu'un point de concentration (en 0) si elle n'est pas compacte. De plus, grâce aux techniques d'EDP utilisées dans notre travail (28), à comparer aux techniques d'EDO de [28], nous pouvons raffiner le résultat dans le cas radial :

THÉORÈME 4.3. *L'obstruction de Pohožaev est L_r^p -stable dans la boule unité de \mathbb{R}^3 pour tout $p > 3$ mais n'est pas L_r^3 -stable.*

Cet ensemble de résultats dresse un tableau complet de la stabilité de l'obstruction de Pohožaev en dimension 3. Une question extrêmement intéressante et difficile est de savoir si ces résultats s'étendent au cas des solutions qui changent de signe. L'obstruction de Pohožaev, elle, s'étend à ce cadre. Cette question est très subtile à cause de la variété de solutions qui changent de signe à l'équation-modèle $\Delta u = u^5$ dans \mathbb{R}^3 . En particulier, le monde des "bulles-standard" s'agrandit considérablement dans ce cadre. Une simple question, peut-être plus abordable, est la suivante : existe-t-il des solutions qui changent de signe à l'équation (4.1) sur la boule unité de \mathbb{R}^3 pour $-\frac{1}{4}\lambda_1(B) < \lambda < 0$ alors qu'il n'en existe pas dès que $\lambda \geq 0$ et qu'il n'en existe pas de positives dans cet intervalle (voir [24] et [27]) ?

Disons quelques mots rapides sur la preuve de ces résultats. Démontrer que l'obstruction de Pohožaev est stable en h_0 revient à démontrer que l'équation (4.4) est stable⁵ avec $h = h_0$. Considérons la démonstration du théorème 4.1. En raisonnant par l'absurde, cela revient à démontrer que l'existence d'une suite de solutions u_ε aux équations

$$\Delta u_\varepsilon + h_\varepsilon u_\varepsilon = u_\varepsilon^5 \text{ dans } \Omega, u_\varepsilon > 0 \text{ dans } \Omega, u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

avec $h_\varepsilon \rightarrow h_0$ dans $C^{0,\eta}(\Omega)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ mène à une contradiction. Or, l'équation-limite ne possédant pas de solutions, une telle suite (u_ε) ne peut exister que si elle

5. voir chap. 3, section 2 pour la terminologie.

développe un certain nombre de points de concentration. Il faut démontrer que ces points de concentration sont en nombre fini (ce qui est classique en dimension 3 dès lors qu'ils se situent à l'intérieur de l'ouvert Ω mais qui devient délicat lorsque les points de concentration s'approchent du bord). Éliminer l'existence de points de concentration au bord pose problème car se crée un point de concentration artificiel à l'extérieur du domaine (par "symétrie orthogonale") qui a tendance à compenser l'effet des autres points de concentration et donc de rendre le recollement plus plausible. Malgré tout, cela est faisable. Le résultat est donc que la suite (u_ε) développe un nombre fini de points de concentration, tous situés dans l'intérieur de Ω . En utilisant l'identité de Pohožaev autour de ces points de concentration, nous obtenons ensuite des relations d'équilibre entre ces divers points faisant intervenir la fonction de Green de $\Delta + h_0$. C'est pour obtenir ces relations que la convergence dans $C^{0,\eta}$ est absolument nécessaire. S'il n'y a qu'un point, une convergence dans L^p , $p > 3$, suffit. Ensuite, il faut démontrer que ces relations d'équilibre ne peuvent pas être satisfaites, ce qui repose sur une jolie identité de type Pohožaev sur les fonctions de Green.

La construction des exemples menant à l'instabilité est quant à elle extrêmement délicate puisque le résultat est précis. La suite de fonctions (h_ε) doit converger dans L^∞ mais dans aucun $C^{0,\eta}$. Il faut remarquer que notre construction est explicite. Étant donnée la fonction h_0 , nous pouvons donner une suite (h_ε) explicite, en termes de fonction de Green de l'opérateur $\Delta + h_0$, qui converge dans L^∞ vers h_0 et pour laquelle l'équation (4.4) a toujours des solutions. En fait, nous démontrons que, sur tout ouvert borné régulier Ω de \mathbb{R}^3 , l'ensemble des fonctions h pour lesquelles l'équation (4.4) admet une solution non triviale est L^∞ -dense dans l'espace des fonctions pour lesquelles l'opérateur $\Delta + h$ est coercif.

2. La conjecture de Lazer-McKenna

Dans cette section, nous allons décrire les résultats obtenus dans (25) sur des problèmes dits d'Ambrosetti-Prodi pour y détecter encore un phénomène dimensionnel. Commençons par un petit historique sur ladite conjecture de Lazer-McKenna. McKenna a d'ailleurs récemment écrit un bel article de survol [128] sur les questions de multiplicité dans ces problèmes de type Ambrosetti-Prodi⁶. Tout commence dans la première moitié du siècle précédent avec les travaux de Hammerstein et de Dolph qui s'intéressent à l'équation

$$\Delta u = f(x, u) \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

dans un domaine Ω de \mathbb{R}^n . Hammerstein [74] démontra que si $\frac{\partial f}{\partial u} < \lambda_1 - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, λ_1 étant la première valeur propre du laplacien avec condition de Dirichlet au bord sur Ω , alors le problème admet une unique solution. Ce résultat fut étendu

6. Le lecteur y trouvera un état de l'art sur ces questions de multiplicité, un certain nombre de questions ouvertes ainsi qu'un lien entre ces questions et des problèmes de mécanique des ponts suspendus.

par Dolph [58] au cas $\lambda_i + \varepsilon < \frac{\partial f}{\partial u} < \lambda_{i+1} - \varepsilon$. Autant dire que, si la non-linéarité n'interagit pas avec le spectre du laplacien, le problème n'admet qu'une seule solution.

Le premier travail qui étudia le cas où la non-linéarité interagit avec le spectre du laplacien fut celui de Ambrosetti et Prodi [8]. Dans ce papier, ils s'intéressèrent au problème suivant

$$\Delta u = f(u) + h(x) - \alpha \varphi_1(x) \text{ dans } \Omega, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.4)$$

où φ_1 est la fonction propre associée à λ_1 . Ils démontrèrent que ce problème a exactement deux solutions pour α grand si f est une fonction convexe vérifiant $0 < f'(-\infty) < \lambda_1 < f'(+\infty) < \lambda_2$. La condition $f'(-\infty) > 0$ fut ensuite remplacée par $f'(-\infty) > -\infty$ par Manes et Micheletti [124]. L'autre hypothèse est plus difficile à enlever mais il est démontré dans [7, 50] que, si f est convexe et vérifie $-\infty < f'(-\infty) < \lambda_1 < f'(+\infty) < +\infty$, alors le problème (4.4) admet deux solutions distinctes pour α grand.

Mais, dès que deux valeurs propres sont traversées, il devrait apparaître plus de solutions. Lazer et McKenna reprirent le problème (4.4) dans [102] en supposant cette fois que $-\infty < f'(-\infty) < \lambda_1 < \lambda_{2n} < f'(+\infty) < \lambda_{2n+1}$. Ils démontrèrent alors que le problème avait au moins trois solutions, souvent quatre. Hofer [88] étendit le résultat, qui est alors beaucoup plus subtil, au cas $\lambda_{2n+1} < f'(+\infty) < \lambda_{2n+2}$. Dans [103], les auteurs conjecturèrent que le problème (4.4) devrait avoir au moins $2n$ solutions dès que $-\infty < f'(-\infty) < \lambda_1 < \lambda_n < f'(+\infty) < \lambda_{n+1}$, ce qui s'est révélé faux (cf. [33, 51, 105]). Une conjecture du même ordre, appelée habituellement conjecture de Lazer-McKenna, cf. [106], est que le nombre de solutions du problème (4.4), sous des hypothèses raisonnables de croissance sur f , devrait tendre vers $+\infty$ quand $s \rightarrow +\infty$ si $f'(-\infty) < \lambda_1$ et $f'(+\infty) = +\infty$. Une version plus faible pourrait se contenter de quatre solutions pour α grand sous les mêmes hypothèses.

Si beaucoup de résultats sont disponibles en dimension 1 (cf. [47, 103, 104, 122, 148, 149, 150]), rien n'était connu en dimensions plus grandes avant ces cinq dernières années. Nous nous contenterons dorénavant du problème :

$$\Delta u = f(u) - \alpha \varphi_1(x) \text{ dans } \Omega, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (4.5)$$

Le premier résultat de multiplicité fut obtenu en 2003 par Breuer, McKenna et Plum [23] à l'aide d'ordinateurs. Ils montrèrent que le problème ci-dessus admet au moins quatre solutions pour α grand si $f(t) = t^2$ et Ω est un carré. En 2005, Dancer et Yan [52] démontrèrent que la conjecture de Lazer-McKenna (dans sa version forte) est vraie si $f(t) = |t|^p$ et $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ en dimensions $n \geq 3$. Dans [53], ces mêmes auteurs démontrèrent la conjecture de Lazer-McKenna pour $f(t) = t_+^p + \lambda t$ avec $\lambda < \lambda_1$ et $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$. En dimension 2, pour des non-linéarités en puissance ou en exponentielle, nous renvoyons à [52, 54].

Nous nous intéresserons dans cette section au cas critique, c'est-à-dire au cas où la non-linéarité est $f(t) = t_+^{\frac{n+2}{n-2}} + \lambda t$. Ce cas fut étudié par Li, Yan et Yang [109, 110] et Wei et Yan [165]. L'équation s'écrit alors

$$\Delta u = u_+^{\frac{n+2}{n-2}} + \lambda u - \alpha \varphi_1(x) \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Pour décrire les résultats obtenus par ces auteurs, il est plus simple de remarquer que $v = u - \frac{\alpha}{\lambda_1 - \lambda} \varphi_1$ est solution de l'équation ci-dessus si et seulement si u est solution de l'équation

$$\Delta u = (u - \alpha \varphi_1)_+^{\frac{n+2}{n-2}} + \lambda u \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (4.6)$$

Ainsi, la conjecture de Lazer-McKenna dans le cas critique, i.e. pour la non-linéarité $f(t) = t_+^{\frac{n+2}{n-2}} + \lambda t$, stipule que le nombre de solutions de l'équation (4.6) devrait tendre vers $+\infty$ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$. Notons que $f'(-\infty) = \lambda$ et $f'(+\infty) = +\infty$. Pour $0 < \lambda < \lambda_1$, Li, Yan et Yang ont construit dans [109] des familles de solutions avec k pics, pour tout α grand, pour tout $k \in \mathbb{N}$, qui explosent près d'un point de maximum de φ_1 en dimensions $n \geq 7$. Toujours pour $0 < \lambda < \lambda_1$, Wei et Yan [165] construisirent, en dimensions $n \geq 6$, des familles de solutions avec k pics pour tout α grand, pour tout $k \in \mathbb{N}$, qui explosent en un point du bord de Ω où $-\partial_\nu \varphi_1$ est maximal. Par construction, ces solutions ont une énergie uniformément bornée lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$. En particulier, Li, Yan et Yang [109] et Wei et Yan [165] ont démontré une version plus forte de la conjecture de Lazer-McKenna : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe α_k tel que, pour tout $\alpha > \alpha_k$, il existe k solutions différentes de l'équation (4.6) qui ont la propriété que leur norme H_1^0 reste bornée lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$.

Dans (25), nous avons démontré que la dimension 6 ainsi que la condition $\lambda > 0$ étaient optimales pour ces constructions :

THÉORÈME 4.4. *Si $3 \leq n \leq 5$ et $\lambda < \lambda_1$ ou si $\lambda \leq 0$, l'équation (4.6) ne possède pas de suites de solutions d'énergie bornée. En d'autres termes, sous ces hypothèses, pour tout $\Lambda > 0$, il existe α_Λ tel que, pour tout $\alpha > \alpha_\Lambda$, l'équation (4.6) ne possède pas de solutions de norme H_0^1 plus petite que Λ . En particulier, la conjecture de Lazer-McKenna critique en énergie finie est fausse.*

Remarquons que les solutions de (4.6) sont des points critiques de la fonctionnelle

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) \, dx - \frac{n-2}{2n} \int_\Omega (u - \alpha \varphi_1)_+^{\frac{2n}{n-2}} \, dx.$$

Cette fonctionnelle a une structure de "lemme du col". Dans [109, 110], il était démontré que le lemme du col s'applique et qu'il existe donc une solution de type "col" pour tout $\alpha > 0$ et tout $0 < \lambda < \lambda_1$ dès que $n \geq 6$. Notre théorème entraîne que ceci n'est plus vrai pour α grand en dimensions $3 \leq n \leq 5$ ou si $\lambda \leq 0$.

Au cours de la preuve du théorème, nous obtenons une description précise de toute suite de solutions de l'équation (4.6) dont l'énergie est uniformément bornée lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$. En dimension 6, nous obtenons en particulier que la suite doit développer au moins un point de concentration sur le bord, ce qui explique pourquoi la construction de Li-Yan-Yang [109] ne fonctionne qu'en grandes dimensions, i.e. $n \geq 7$.

Ainsi, démontrer la conjecture de Lazer-McKenna critique en petites dimensions risque d'être très délicat puisqu'il va falloir construire de plus en plus de solutions d'énergie de plus en plus grande. Dans l'autre sens, essayer de montrer que la conjecture de Lazer-McKenna critique est globalement fausse, sans hypothèse sur l'énergie, semble également difficile, et ce pour deux raisons : tout d'abord, la contradiction vient de la bulle la plus basse et la détecter sans borne sur l'énergie est hors d'atteinte pour l'instant (cf. discussion du chap. 3, section 2.4, p. 83) ; ensuite, rien n'interdit des profils de concentration dégénérés si l'énergie n'est pas bornée. L'idée serait de commencer par la dimension 3 où nous serions tentés, à nos risques et périls, de dire que cette conjecture est fausse.

La preuve du théorème se fait par l'absurde. Imaginons qu'il existe une suite (u_α) de solutions de l'équation (4.6) d'énergie uniformément bornée. Il est clair que la suite doit vérifier $\|u_\alpha\|_\infty \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$. En effet, sinon, par théorie elliptique standard, il existerait une sous-suite convergeant dans $C^0(\bar{\Omega})$ vers une solution non-triviale de l'équation-limite $\Delta u = \lambda u$, ce qui est impossible puisque $\lambda < \lambda_1$. La suite (u_α) développe donc des points de concentration, qui vont être en nombre fini grâce à l'hypothèse sur l'énergie. Il faut reprendre la preuve du théorème 2.1 du chap. 2 pour obtenir des estimées précises sur u_α . Fort heureusement, la métrique étant euclidienne, l'homogénéité de celle-ci nous permet d'éviter d'avoir à obtenir les estimées optimales. L'estimée de la section 1.2 va suffire⁷. Autant dire que nous démontrons une estimée qui ne tient compte que des bulles les plus basses. Nous n'avons pas besoin de plus car la métrique euclidienne a ce gros avantage qu'il n'est nul besoin d'estimer les rayons d'influence des bulles hautes pour estimer celui des bulles basses⁸. Ainsi, il est possible de trouver des conditions de recollement de ces bulles entre elles, ou sur la condition au bord. Ces conditions excluent tous les cas du théorème.

7. De plus, dans notre cas, la limite faible est nécessairement nulle, ce qui simplifie la preuve.

8. Ceci est dû à l'exactitude de l'identité de Pohožaev dans l'espace euclidien, ou à la vraie invariance de l'équation par le changement d'échelle adéquat. Dans le cas riemannien, il y a une erreur venant de la métrique dans cette identité qui se révèle difficile à contrôler.

Liste des travaux effectués

Liste des travaux présents dans la thèse

- (1) Optimal Sobolev inequalities of arbitrary order on compact Riemannian manifolds,
Journal of Functional Analysis, vol. 159, 217-242, 1998.
- (2) Best constants in Sobolev inequalities for compact manifolds of nonpositive curvature,
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, avec T. Aubin et E. Hebey, vol. 326, 1998, 1117-1121.
- (3) The best constants problem in Sobolev inequalities,
Mathematische Annalen, vol. 314, 1999, 327-346.
- (4) Optimal Nash's inequalities on Riemannian manifolds : the influence of geometry,
International Mathematics Research Notices, avec E. Hebey et M. Vaugon, vol. 14, 1999, 735-779.
- (5) Generalized scalar curvature type equations on compact Riemannian manifolds,
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, vol. 130A, 2000, 767-788.
- (6) Sharp Sobolev inequalities with lower order remainder terms,
Transactions of the American Mathematical Society, avec E. Hebey et M. Vaugon, vol. 353, 269-289, 2001.
- (7) Extremal functions for optimal Sobolev inequalities on compact manifolds,
Calculus of Variations and PDE's, avec Z. Djadli, 12, 2001, 59-84.
- (8) Asymptotic profile for the sub-extremals of the sharp Sobolev inequality on the sphere,
Communications in Partial Differential Equations, avec F. Robert, 25, 5-6, 2001, 743-778.
- (9) The *AB* program in geometric analysis. Sharp Sobolev inequalities and related problems,
Memoirs of the American Mathematical Society, avec E. Hebey, MEMO/160/761, 2002.
- (10) Isoperimetric inequalities on compact manifolds,
Geometriae Dedicata, 90, 2002, 217-236.

- (11) Pohozaev type obstructions and solutions of bounded energy for quasilinear elliptic equations with critical Sobolev growth, The conformally flat case, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, avec E. Hebey et M. Vaugon, 51, 2002, 79-94.
- (12) Sharp local isoperimetric inequalities involving the scalar curvature, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 130, 8, 2002, 2351-2361.
- (13) Optimal Sobolev inequalities and extremal functions. The three-dimensional case, *Indiana University Mathematics Journal*, 51, 1, 2002, 69-88.
- (14) Elliptic equations with critical Sobolev exponent in dimension 3, *Annales de l'IHP, Analyse non-linéaire*, 19, 2, 2002, 125-142.
- (15) Asymptotics for sharp Sobolev-Poincaré inequalities on compact Riemannian manifolds, *Advances in Differential Equations*, avec E. Hebey, 7, 12, 2002, 1409-1478.

Liste des travaux effectués depuis la thèse

- (16) From one bubble to several bubbles : the low-dimensional case, *Journal of Differential Geometry*, 63, 2003, 399-473.
- (17) Blow up analysis in dimension 2 and a sharp form of Trudinger-Moser inequality, *Communications in Partial Differential Equations*, avec Adimurthi, 29, 1-2, 2004, 295-322.
- (18) Blow-up theory for elliptic PDEs in Riemannian geometry, *Mathematical Notes, Princeton University Press*, avec E. Hebey et F. Robert, 45, 2004.
- (19) Compactness for the Yamabe equation in low dimensions, *International Mathematics Research Notices*, 23, 2004, 1143-1191.
- (20) Blow-up examples for second order elliptic PDEs of critical Sobolev growth, *Transactions of the American Mathematical Society*, avec E. Hebey, 357, 5, 2005, 1915-1929.
- (21) Elliptic equations of Yamabe type, *I.M.R.S.*, avec E. Hebey, 1, 2005.
- (22) Bubbling phenomena for fourth-order four-dimensional PDEs with exponential growth, *Proc. A.M.S.*, avec F. Robert, 134, 3, 2005, 897-908.
- (23) Multibumps analysis in dimension 2 - Quantification of blow up levels, *Duke Math. Journal*, 132, 2, 2006, 217-269.
- (24) Sharp asymptotics and compactness for local low energy solutions of critical elliptic systems in potential form, *Calculus of Variations and PDE's*, avec E. Hebey, 31, 2, 2008, 205-230.

- (25) The critical Lazer-McKenna conjecture in low dimensions,
Journal of Differential Equations, 245, 8, 2008, 2199-2242.
- (26) Stability and instability for Einstein-scalar field Lichnerowicz equations on compact Riemannian manifolds,
Math. Zeitschrift, avec E. Hebey, à paraître.
- (27) Stability for strongly coupled critical elliptic systems in a fully inhomogeneous medium,
preprint, avec E. Hebey, 61 pages.
- (28) Stability of the Pohozaev obstruction in dimension 3,
Journal of the E.M.S., avec P. Laurain, à paraître.
- (29) Asymptotic expansion of the Faber-Krahn profile of a compact Riemannian manifold,
Compte-rendus mathématiques, 346, 21-22, 2008, 1163-1167.

Liste des travaux en cours de rédaction

- (30) About a conjecture of Ni in high dimensions, avec F. Robert et J. Wei.
- (31) Stability vs instability for elliptic equations of Yamabe type.
- (32) Bounded stability for strongly coupled critical elliptic systems, avec E. Hebey et J. Vétois.

Bibliographie

1. M.J. Ablowitz, B. Prinari, and A.D. Trubatch, *Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
2. Adimurthi and S. Prashanth, *Failure of Palais-Smale condition and blow-up analysis for the critical exponent problem in \mathbf{R}^2* , Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **107** (1997), no. 3, 283–317. MR 1467434 (98j :35056)
3. Adimurthi and M. Struwe, *Global compactness properties of semilinear elliptic equations with critical exponential growth*, J. Funct. Anal. **175** (2000), no. 1, 125–167. MR 1774854 (2001g :35063)
4. N. Akhmediev and A. Ankiewicz, *Partially coherent solitons on a finite background*, Phys. Rev. Lett. **82** (1998), 2661–2664.
5. A. D. Aleksandrov, *Uniqueness theorems for surfaces in the large. I*, Vestnik Leningrad. Univ. **11** (1956), no. 19, 5–17. MR MR0086338 (19,167c)
6. F. J. Almgren, Jr., *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, Mem. Amer. Math. Soc. **4** (1976), no. 165, viii+199. MR 0420406 (54 #8420)
7. H. Amann and P. Hess, *A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **84** (1979), no. 1-2, 145–151. MR 549877 (80m :35032)
8. A. Ambrosetti and G. Prodi, *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **93** (1972), 231–246. MR 0320844 (47 #9377)
9. T. Aubin, *Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl. (9) **55** (1976), no. 3, 269–296. MR 0431287 (55 #4288)
10. ———, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Differential Geometry **11** (1976), no. 4, 573–598. MR 0448404 (56 #6711)
11. T. Aubin and Y.Y. Li, *On the best Sobolev inequality*, J. Math. Pures Appl. (9) **78** (1999), no. 4, 353–387. MR 1696357 (2000e :46041)
12. A. Bahri and J.-M. Coron, *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent : the effect of the topology of the domain*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), no. 3, 253–294. MR 929280 (89c :35053)
13. D. Bakry, *L’hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes*, Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992), Lecture Notes in Math., vol. 1581, Springer, Berlin, 1994, pp. 1–114. MR 1307413 (95m :47075)
14. R. Bartnik and J. Isenberg, *The constraint equations*, The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields, Birkhäuser, Basel, 2004, pp. 1–38. MR 2098912 (2005j :83007)
15. R. Beig, P.T. Chruściel, and R. Schoen, *KIDs are non-generic*, Ann. Henri Poincaré **6** (2005), no. 1, 155–194. MR 2121280 (2005m :83013)

16. H. Berestycki, L. Nirenberg, and S. R. S. Varadhan, *The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains*, Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), no. 1, 47–92. MR 1258192 (95h :35053)
17. G. Bianchi and H. Egnell, *A note on the Sobolev inequality*, J. Funct. Anal. **100** (1991), no. 1, 18–24. MR 1124290 (92i :46033)
18. R.J. Biezuner and M. Montenegro, *Best constants in second-order Sobolev inequalities on Riemannian manifolds and applications*, J. Math. Pures Appl. (9) **82** (2003), no. 4, 457–502. MR 1992377 (2004e :58034)
19. G.A. Bliss, *An integral inequality*, J. London Math. Soc. **5** (1930), 40–46.
20. S. Brendle, *Blow-up phenomena for the Yamabe equation*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), no. 4, 951–979. MR 2425176
21. ———, *On the conformal scalar curvature equation and related problems*, Surveys in Differential Geometry (à paraître).
22. S. Brendle and F.C. Marques, *Blow-up phenomena for the Yamabe equation II*, J. Differential Geometry (à paraître).
23. B. Breuer, P.J. McKenna, and M. Plum, *Multiple solutions for a semilinear boundary value problem : a computational multiplicity proof*, J. Differential Equations **195** (2003), no. 1, 243–269. MR 2019251 (2005a :35083)
24. H. Brézis, *Elliptic equations with limiting Sobolev exponents—the impact of topology*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), no. S, suppl., S17–S39, Frontiers of the mathematical sciences : 1985 (New York, 1985). MR 861481 (87k :58272)
25. H. Brezis and J.-M. Coron, *Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles*, Arch. Rational Mech. Anal. **89** (1985), no. 1, 21–56. MR 784102 (86g :53007)
26. H. Brezis and F. Merle, *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), no. 8-9, 1223–1253. MR 1132783 (92m :35084)
27. H. Brézis and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), no. 4, 437–477. MR 709644 (84h :35059)
28. Haïm Brezis and Michel Willem, *On some nonlinear equations with critical exponents*, J. Funct. Anal. **255** (2008), no. 9, 2286–2298. MR MR2473258
29. C. Brouttelande, *The best-constant problem for a family of Gagliardo-Nirenberg inequalities on a compact Riemannian manifold*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **46** (2003), no. 1, 117–146. MR 1961176 (2004b :58025)
30. Y.D. Burago and V.A. Zalgaller, *Geometric inequalities*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 285, Springer-Verlag, Berlin, 1988, Translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ, Springer Series in Soviet Mathematics. MR 936419 (89b :52020)
31. J.P. Burke, J.L. Bohn, B.D. Esry, and C.H. Greene, *Hartree-Fock theory for double condensates*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), 3594–3597.
32. L. A. Caffarelli, B. Gidas, and J. Spruck, *Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), no. 3, 271–297. MR 982351 (90c :35075)
33. A. Castro and S. Gadam, *The Lazer McKenna conjecture for radial solutions in the \mathbf{R}^N ball*, Electron. J. Differential Equations (1993), approx. 6 pp. (electronic only). MR 1241764 (94j :35049)

34. J. Ceccon and M. Montenegro, *Homogeneous sharp Sobolev inequalities on product manifolds*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **136** (2006), no. 2, 277–300. MR 2218153 (2007h :35007)
35. ———, *Optimal L^p -Riemannian Gagliardo-Nirenberg inequalities*, Math. Z. **258** (2008), no. 4, 851–873. MR 2369060
36. S.-Y. A. Chang, *Conformal invariants and partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **42** (2005), no. 3, 365–393 (electronic). MR 2149088 (2006b :53045)
37. I. Chavel, *Riemannian geometry*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, A modern introduction. MR 2229062 (2006m :53002)
38. C.-C. Chen and C.-S. Lin, *Topological degree for a mean field equation on Riemann surfaces*, Comm. Pure Appl. Math. **56** (2003), no. 12, 1667–1727. MR 2001443 (2004h :35065)
39. W. X. Chen and C. Li, *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations*, Duke Math. J. **63** (1991), no. 3, 615–622. MR MR1121147 (93e :35009)
40. Y. Choquet-Bruhat, J. Isenberg, and D. Pollack, *Applications of theorems of Jean Leray to the Einstein-scalar field equations*, J. Fixed Point Theory Appl. **1** (2007), no. 1, 31–46. MR 2282342 (2007k :83014)
41. ———, *The constraint equations for the Einstein-scalar field system on compact manifolds*, Classical Quantum Gravity **24** (2007), no. 4, 809–828. MR 2297268 (2008a :83012)
42. D.N. Christodoulides, T.H. Coskun, M. Mitchell, and M. Segev, *Theory of incoherent self-focusing in biased photorefractive media*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), 646–649.
43. S. Collion, *Critical functions and elliptic PDE on compact Riemannian manifolds*, Adv. Differential Equations **12** (2007), no. 1, 55–120. MR 2272821 (2008a :58021)
44. S. Collion, E. Hebey, and M. Vaugon, *Sharp Sobolev inequalities in the presence of a twist*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 6, 2531–2537 (electronic). MR 2286043 (2008e :58026)
45. D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret, and C. Villani, *A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities*, Adv. Math. **182** (2004), no. 2, 307–332. MR 2032031 (2005b :26023)
46. J.-M. Coron, *Topologie et cas limite des injections de Sobolev*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **299** (1984), no. 7, 209–212. MR 762722 (86b :35059)
47. D.G. Costa, D.G. de Figueiredo, and P.N. Srikanth, *The exact number of solutions for a class of ordinary differential equations through Morse index computation*, J. Differential Equations **96** (1992), no. 1, 185–199. MR 1153315 (93c :34050)
48. A. Cotsiolis and N.K. Tavoularis, *Best constants for Sobolev inequalities for higher order fractional derivatives*, J. Math. Anal. Appl. **295** (2004), no. 1, 225–236. MR 2064421 (2005d :46070)
49. C.B. Croke, *A sharp four-dimensional isoperimetric inequality*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), no. 2, 187–192. MR 749103 (85f :53060)
50. E. N. Dancer, *On the ranges of certain weakly nonlinear elliptic partial differential equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **57** (1978), no. 4, 351–366. MR 524624 (80g :35055)
51. ———, *A counterexample to the Lazer-McKenna conjecture*, Nonlinear Anal. **13** (1989), no. 1, 19–21. MR 973364 (90e :35067)
52. E.N. Dancer and S. Yan, *On the superlinear Lazer-McKenna conjecture*, J. Differential Equations **210** (2005), no. 2, 317–351. MR 2119987 (2005j :35054)

53. ———, *On the superlinear Lazer-McKenna conjecture. II*, Comm. Partial Differential Equations **30** (2005), no. 7-9, 1331–1358. MR 2180307 (2006h :35075)
54. M. del Pino and C. Muñoz, *The two-dimensional Lazer-McKenna conjecture for an exponential nonlinearity*, J. Differential Equations **231** (2006), no. 1, 108–134. MR 2287880
55. W. Ding, J. Jost, J. Li, and G. Wang, *Existence results for mean field equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **16** (1999), no. 5, 653–666. MR 1712560 (2000i :53061)
56. W. Ding and G. Tian, *Energy identity for a class of approximate harmonic maps from surfaces*, Comm. Anal. Geom. **3** (1995), no. 3-4, 543–554. MR 1371209 (97e :58055)
57. Zindine Djadli and Andrea Malchiodi, *Existence of conformal metrics with constant Q -curvature*, Ann. of Math. (2) **168** (2008), no. 3, 813–858. MR MR2456884 (2009h :53074)
58. C. L. Dolph, *Nonlinear integral equations of the Hammerstein type*, Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), 289–307. MR 0032923 (11,367a)
59. I. Ekeland and N. Ghoussoub, *Selected new aspects of the calculus of variations in the large*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002), no. 2, 207–265 (electronic). MR 1886088 (2003b :35048)
60. Z. Faget, *Best constants in Sobolev inequalities on Riemannian manifolds in the presence of symmetries*, Potential Anal. **17** (2002), no. 2, 105–124. MR 1908673 (2003g :58054)
61. ———, *Optimal constants in critical Sobolev inequalities on Riemannian manifolds in the presence of symmetries*, Ann. Global Anal. Geom. **24** (2003), no. 2, 161–200. MR 1990113 (2004d :58028)
62. ———, *Second-best constant and extremal functions in Sobolev inequalities in the presence of symmetries*, Adv. Differential Equations **9** (2004), no. 7-8, 745–770. MR 2100394 (2005i :58024)
63. ———, *Best constants in the exceptional case of Sobolev inequalities*, Math. Z. **252** (2006), no. 1, 133–146. MR 2209155 (2007c :58030)
64. ———, *Optimal constants in the exceptional case of Sobolev inequalities on Riemannian manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 5, 2303–2325. MR 2373315
65. H. Federer and W.H. Fleming, *Normal and integral currents*, Ann. of Math. (2) **72** (1960), 458–520. MR 0123260 (23 #A588)
66. J. Fernández Bonder and J.D. Rossi, *On the existence of extremals for the Sobolev trace embedding theorem with critical exponent*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), no. 1, 119–125. MR 2105826 (2006a :35079)
67. J. Fernández Bonder and N. Saintier, *Estimates for the Sobolev trace constant with critical exponent and applications*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **187** (2008), no. 4, 683–704. MR 2413374
68. W.H. Fleming and R. Rishel, *An integral formula for total gradient variation*, Arch. Math. (Basel) **11** (1960), 218–222. MR 0114892 (22 #5710)
69. Y. Fourès-Bruhat, *Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, Acta Math. **88** (1952), 141–225. MR 0053338 (14,756g)
70. N. Ghoussoub and F. Robert, *The effect of curvature on the best constant in the Hardy-Sobolev inequalities*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), no. 6, 1201–1245. MR 2276538 (2007k :35085)
71. B. Gidas, W.M. Ni, and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), no. 3, 209–243. MR 544879 (80h :35043)

72. M. Gromov, *Paul lévy's isoperimetric inequality*, preprint IHES (1980).
73. R.S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 2, 255–306. MR 664497 (84a :53050)
74. A. Hammerstein, *Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen*, Acta Math. **54** (1930), no. 1, 117–176. MR 1555304
75. Z.-C. Han, *Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **8** (1991), no. 2, 159–174. MR 1096602 (92c :35047)
76. E. Hebey, *Sobolev spaces on Riemannian manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1635, Springer-Verlag, Berlin, 1996. MR 1481970 (98k :46049)
77. ———, *Nonlinear analysis on manifolds : Sobolev spaces and inequalities*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1999. MR 1688256 (2000e :58011)
78. ———, *Sharp Sobolev-Poincaré inequalities on compact Riemannian manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 3, 1193–1213 (electronic). MR 1867378 (2002m :58025)
79. ———, *Sharp Sobolev inequalities of second order*, J. Geom. Anal. **13** (2003), no. 1, 145–162. MR 1967041 (2004g :58022)
80. ———, *Sharp Sobolev inequalities for vector valued maps*, Math. Z. **253** (2006), no. 4, 681–708. MR 2221095 (2007e :58021)
81. E. Hebey, F. Pacard, and D. Pollack, *A variational analysis of Einstein-scalar field Lichnerowicz equations on compact Riemannian manifolds*, Comm. Math. Phys. **278** (2008), no. 1, 117–132. MR 2367200
82. E. Hebey and F. Robert, *Sobolev spaces on manifolds*, Handbook of global analysis, Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2008, pp. 375–415, 1213. MR 2389638
83. E. Hebey and M. Vaugon, *The best constant problem in the Sobolev embedding theorem for complete Riemannian manifolds*, Duke Math. J. **79** (1995), no. 1, 235–279. MR 1340298 (96c :53057)
84. ———, *Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **13** (1996), no. 1, 57–93. MR 1373472 (96m :46054)
85. ———, *From best constants to critical functions*, Math. Z. **237** (2001), no. 4, 737–767. MR 1854089 (2002h :58061)
86. F.T. Hioe, *Solitary waves for N coupled nonlinear Schrödinger equations*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 1152–1155.
87. F.T. Hioe and T.S. Salter, *Special set and solutions of coupled nonlinear Schrödinger equations*, J. Phys. A : Math. Gen. **35** (2002), 8913–8928.
88. H. Hofer, *Variational and topological methods in partially ordered Hilbert spaces*, Math. Ann. **261** (1982), no. 4, 493–514. MR 682663 (84g :58030)
89. M. Holst, G. Nagy, and G. Tsogtgerel, *Far-from-constant mean curvature solutions of Einstein's constraint equations with positive Yamabe metrics*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008), no. 16, 161101, 4. MR 2403263
90. E. Humbert, *Best constants in the L^2 -Nash inequality*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **131** (2001), no. 3, 621–646. MR 1838504 (2002i :58050)
91. ———, *Optimal trace Nash inequality*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), no. 4, 759–772. MR 1866803 (2002m :58050)

92. ———, *Best constant for trace Nash inequality*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **9** (2002), no. 2, 217–238. MR 1905826 (2003g :58031)
93. ———, *Extremal functions for the sharp L^2 -Nash inequality*, Calc. Var. Partial Differential Equations **22** (2005), no. 1, 21–44. MR 2105967 (2005h :58060)
94. E. Humbert and M. Vaugon, *The problem of prescribed critical functions*, Ann. Global Anal. Geom. **28** (2005), no. 1, 19–34. MR 2157345 (2006g :53043)
95. D.L. Johnson and F. Morgan, *Some sharp isoperimetric theorems for Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), no. 3, 1017–1041. MR 1803220 (2002e :53043)
96. J. Jost, *Two-dimensional geometric variational problems*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1991, A Wiley-Interscience Publication. MR 1100926 (92h :58045)
97. T. Kanna and M. Lakshmanan, *Exact soliton solutions, shape changing collisions, and partially coherent solitons in coupled nonlinear Schrödinger equations*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 5043–5046.
98. J.L. Kazdan and F.W. Warner, *Remarks on some quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), no. 5, 567–597. MR 0477445 (57 #16972)
99. ———, *Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure*, J. Differential Geometry **10** (1975), 113–134. MR 0365409 (51 #1661)
100. M. Khuri, F.C. Marques, and R. Schoen, *A compactness theorem for the Yamabe problem*, preprint, 2007.
101. B. Kleiner, *An isoperimetric comparison theorem*, Invent. Math. **108** (1992), no. 1, 37–47. MR 1156385 (92m :53056)
102. A.C. Lazer and P.J. McKenna, *On the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, J. Math. Anal. Appl. **84** (1981), no. 1, 282–294. MR 639539 (83e :35050)
103. ———, *On a conjecture related to the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **95** (1983), no. 3-4, 275–283. MR 726879 (86g :34028)
104. ———, *Multiplicity of solutions of nonlinear boundary value problems with nonlinearities crossing several higher eigenvalues*, J. Reine Angew. Math. **368** (1986), 184–200. MR 850623 (88a :35095)
105. ———, *A symmetry theorem and applications to nonlinear partial differential equations*, J. Differential Equations **72** (1988), no. 1, 95–106. MR 929199 (89b :47087)
106. ———, *Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges : some new connections with nonlinear analysis*, SIAM Rev. **32** (1990), no. 4, 537–578. MR 1084570 (92g :73059)
107. J.M. Lee and T.H. Parker, *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **17** (1987), no. 1, 37–91. MR 888880 (88f :53001)
108. J. Leray, *Hyperbolic differential equations*, mimeographed notes, Institute for Advanced Studies, 1953.
109. G. Li, S. Yan, and J. Yang, *The Lazer-McKenna conjecture for an elliptic problem with critical growth. II*, J. Differential Equations **227** (2006), no. 1, 301–332. MR 2233963 (2007f :35097)
110. ———, *The Lazer-McKenna conjecture for an elliptic problem with critical growth*, Calc. Var. Partial Differential Equations **28** (2007), no. 4, 471–508. MR 2293982 (2008a :35093)
111. Y. Li, P. Liu, and Y. Yang, *Moser-Trudinger inequalities of vector bundle over a compact Riemannian manifold of dimension 2*, Calc. Var. Partial Differential Equations **28** (2007), no. 1, 59–83. MR 2267754 (2008a :58022)

112. Y. Li and B. Ruf, *A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in \mathbb{R}^n* , Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), no. 1, 451–480. MR 2400264
113. Y.Y. Li and I. Shafrir, *Blow-up analysis for solutions of $-\Delta u = Ve^u$ in dimension two*, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), no. 4, 1255–1270. MR 1322618 (96c :35048)
114. Y.Y. Li and L. Zhang, *Liouville-type theorems and Harnack-type inequalities for semilinear elliptic equations*, J. Anal. Math. **90** (2003), 27–87. MR 2001065 (2004i :35118)
115. ———, *Compactness of solutions to the Yamabe problem. III*, J. Funct. Anal. **245** (2007), no. 2, 438–474. MR 2309836 (2008f :53038)
116. Y.Y. Li and M. Zhu, *Yamabe type equations on three-dimensional Riemannian manifolds*, Commun. Contemp. Math. **1** (1999), no. 1, 1–50. MR 1681811 (2000m :53051)
117. A. Lichnerowicz, *L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps*, J. Math. Pures Appl. (9) **23** (1944), 37–63. MR 0014298 (7,266d)
118. C.-S. Lin, *An expository survey on the recent development of mean field equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **19** (2007), no. 2, 387–410. MR 2335753 (2008f :35123)
119. C.-S. Lin and J. Wei, *Sharp estimates for bubbling solutions of a fourth order mean field equation*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **6** (2007), no. 4, 599–630. MR 2394412
120. C.S. Lin, *A classification of solutions of a conformally invariant fourth order equation in \mathbb{R}^n* , Comment. Math. Helv. **73** (1998), no. 2, 206–231. MR 1611691 (99c :35062)
121. P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), no. 1, 145–201. MR 834360 (87c :49007)
122. D. Lupo, S. Solimini, and P.N. Srikanth, *Multiplicity results for an ODE problem with even nonlinearity*, Nonlinear Anal. **12** (1988), no. 7, 657–673. MR 947881 (89j :34026)
123. A. Malchiodi, *Compactness of solutions to some geometric fourth-order equations*, J. Reine Angew. Math. **594** (2006), 137–174. MR 2248155 (2007d :53055)
124. A. Manes and A.M. Micheletti, *Un'estensione della teoria variazionale classica degli autovalori per operatori ellittici del secondo ordine*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **7** (1973), 285–301. MR 0344663 (49 #9402)
125. C. Margerin, *Géométrie conforme en dimension 4 : ce que l'analyse nous apprend*, Astérisque (2006), no. 307, Exp. No. 950, ix–x, 415–468, Séminaire Bourbaki. Vol. 2004/2005. MR 2296426 (2008f :53040)
126. F.C. Marques, *A priori estimates for the Yamabe problem in the non-locally conformally flat case*, J. Differential Geom. **71** (2005), no. 2, 315–346. MR 2197144 (2006i :53046)
127. D. Maxwell, *A class of solutions of the vacuum Einstein constraint equations with freely specified mean curvature*, ArXiv 0804.0874, 2008.
128. P.J. McKenna, *Large-amplitude periodic oscillations in simple and complex mechanical systems : outgrowths from nonlinear analysis*, Milan J. Math. **74** (2006), 79–115. MR 2278730 (2008h :35099)
129. N.G. Meyers and J. Serrin, *$H = W$* , Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **51** (1964), 1055–1056. MR 0164252 (29 #1551)
130. J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1970/71), 1077–1092. MR 0301504 (46 #662)
131. M. Obata, *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Differential Geometry **6** (1971/72), 247–258. MR 0303464 (46 #2601)

132. R. Osserman, *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), no. 6, 1182–1238. MR 0500557 (58 #18161)
133. F. Pacard and P. Sicbaldi, *Extremal domains for the first eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator*, Ann. Inst. Fourier (à paraître).
134. T.H. Parker, *Bubble tree convergence for harmonic maps*, J. Differential Geom. **44** (1996), no. 3, 595–633. MR 1431008 (98k :58069)
135. T.H. Parker and J.G. Wolfson, *Pseudo-holomorphic maps and bubble trees*, J. Geom. Anal. **3** (1993), no. 1, 63–98. MR 1197017 (95c :58032)
136. Y. Peng, *Analyse non-linéaire sur les variétés et applications au traitement d'images*, Ph.D. thesis, ENS Lyon et ECNU Shanghai, 2008.
137. G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, ArXiv math.DG/0211159, 2002.
138. ———, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, ArXiv math.DG/0303109, 2003.
139. ———, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, ArXiv math.DG/0303109, 2003.
140. S. I. Pohožaev, *On the eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$* , Dokl. Akad. Nauk SSSR **165** (1965), 36–39. MR 0192184 (33 #411)
141. D. Pollack, *Nonuniqueness and high energy solutions for a conformally invariant scalar equation*, Comm. Anal. Geom. **1** (1993), no. 3-4, 347–414. MR 1266473 (94m :58051)
142. J. Prajapat and G. Tarantello, *On a class of elliptic problems in \mathbb{R}^2 : symmetry and uniqueness results*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **131** (2001), no. 4, 967–985. MR 1855007 (2002j :35108)
143. J. Qing and G. Tian, *Bubbling of the heat flows for harmonic maps from surfaces*, Comm. Pure Appl. Math. **50** (1997), no. 4, 295–310. MR 1438148 (98k :58070)
144. F. Robert, *Concentration phenomena for a fourth-order equation with exponential growth : the radial case*, J. Differential Equations **231** (2006), no. 1, 135–164. MR 2287881 (2008k :35105)
145. G. Rosen, *Minimum value for c in the Sobolev inequality $\|\phi^3\| \leq c\|\nabla\phi\|^3$* , SIAM J. Appl. Math. **21** (1971), 30–32. MR 0289739 (44 #6927)
146. J.D. Rossi, *First variations of the best Sobolev trace constant with respect to the domain*, Canad. Math. Bull. **51** (2008), no. 1, 140–145. MR 2384747
147. Q.H. Ruan and Z.H. Chen, *Nash inequality on Riemannian manifolds*, Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) **49** (2006), no. 4, 915–918. MR 2264100 (2007j :53036)
148. B. Ruf, *Remarks and generalizations related to a recent multiplicity result of A. Lazer and P. McKenna*, Nonlinear Anal. **9** (1985), no. 12, 1325–1330. MR 820643 (87h :34023)
149. B. Ruf and S. Solimini, *On a class of superlinear Sturm-Liouville problems with arbitrarily many solutions*, SIAM J. Math. Anal. **17** (1986), no. 4, 761–771. MR 846387 (87g :34023)
150. B. Ruf and P.N. Srikanth, *Multiplicity results for superlinear elliptic problems with partial interference with the spectrum*, J. Math. Anal. Appl. **118** (1986), no. 1, 15–23. MR 849438 (88c :35064)
151. J. Sacks and K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. of Math. (2) **113** (1981), no. 1, 1–24. MR 604040 (82f :58035)
152. N. Saintier, *Asymptotic estimates and blow-up theory for critical equations involving the p -Laplacian*, Calc. Var. Partial Differential Equations **25** (2006), no. 3, 299–331. MR 2201675 (2007b :35135)

153. R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Differential Geom. **20** (1984), no. 2, 479–495. MR 788292 (86i :58137)
154. ———, *Lecture notes from courses at Stanford*, written by D. Pollack, 1988.
155. ———, *Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics*, Topics in calculus of variations (Montecatini Terme, 1987), Lecture Notes in Math., vol. 1365, Springer, Berlin, 1989, pp. 120–154. MR 994021 (90g :58023)
156. ———, *On the number of constant scalar curvature metrics in a conformal class*, Differential geometry, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., vol. 52, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991, pp. 311–320. MR 1173050 (94e :53035)
157. R. Schoen and S.-T. Yau, *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature*, Invent. Math. **92** (1988), no. 1, 47–71. MR 931204 (89c :58139)
158. R. Schoen and S.T. Yau, *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, Comm. Math. Phys. **65** (1979), no. 1, 45–76. MR 526976 (80j :83024)
159. R. Schoen and D. Zhang, *Prescribed scalar curvature on the n -sphere*, Calc. Var. Partial Differential Equations **4** (1996), no. 1, 1–25. MR 1379191 (97j :58027)
160. M. Struwe, *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities*, Math. Z. **187** (1984), no. 4, 511–517. MR 760051 (86k :35046)
161. ———, *Quantization for a fourth order equation with critical exponential growth*, Math. Z. **256** (2007), no. 2, 397–424. MR 2289880 (2008a :35063)
162. G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **110** (1976), 353–372. MR 0463908 (57 #3846)
163. N.S. Trudinger, *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. **17** (1967), 473–483. MR 0216286 (35 #7121)
164. ———, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **22** (1968), 265–274. MR 0240748 (39 #2093)
165. J. Wei and S. Yan, *Lazer-McKenna conjecture : the critical case*, J. Funct. Anal. **244** (2007), no. 2, 639–667. MR 2297039 (2007k :35171)
166. A. Weil, *Sur les surfaces à courbure négative*, CR Acad. Sci. Paris **182** (1926), 4069–4071.
167. C. Xia, *The Gagliardo-Nirenberg inequalities and manifolds of non-negative Ricci curvature*, J. Funct. Anal. **224** (2005), no. 1, 230–241. MR 2139111 (2006c :53034)
168. ———, *The Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities on complete manifolds*, Math. Res. Lett. **14** (2007), no. 5, 875–885. MR 2350131
169. H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. **12** (1960), 21–37. MR 0125546 (23 #A2847)
170. Y. Yang, *Extremal functions for a sharp Moser-Trudinger inequality*, Internat. J. Math. **17** (2006), no. 3, 331–338. MR 2215154 (2007a :35020)
171. ———, *A sharp form of Moser-Trudinger inequality in high dimension*, J. Funct. Anal. **239** (2006), no. 1, 100–126. MR 2258218 (2007e :35109)
172. ———, *A weighted form of Moser-Trudinger inequality on Riemannian surface*, Nonlinear Anal. **65** (2006), no. 3, 647–659. MR 2231080 (2007d :35040)
173. ———, *A sharp form of the Moser-Trudinger inequality on a compact Riemannian surface*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 12, 5761–5776 (electronic). MR 2336305

174. ———, *A sharp form of trace Moser-Trudinger inequality on compact Riemannian surface with boundary*, Math. Z. **255** (2007), no. 2, 373–392. MR 2262737 (2008d :46048)
175. M. Zhu, *On the extremal functions of Sobolev-Poincaré inequality*, Pacific J. Math. **214** (2004), no. 1, 185–199. MR 2039132 (2004m :58037)
176. ———, *Sharp Poincaré-Sobolev inequalities and the shortest length of simple closed geodesics on a topological two sphere*, Commun. Contemp. Math. **6** (2004), no. 5, 781–792. MR 2100763 (2005h :53061)

Olivier Druet
UMPA - ENS Lyon,
46, allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 7
France
email : odruet@umpa.ens-lyon.fr
Date : mars 2009.