Université Claude Bernard Lyon 1
M2 pro IR
Année 2011-2012

Processus stochastiques : fiche n° 1

Exercice 1 : Donner la définition d'une fonction à variations bornées. Quels types de fonctions sont toujours à variations bornées ?

Exercice 2 :

1. Définir une martingale $(M_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ en temps continu ainsi que sa variation quadratique. Quel est le lien entre la variation quadratique et la variance ?
2. Pour quels types de processus la variation quadratique est-elle définie ?
3. Suivant que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, sous-martingale, sur-martingale ou une semi-martingale, comment la quantité $\mathbf{E}(M_t)$ varie-t-elle ?
4. Pourquoi cherche-t-on souvent à montrer qu'un processus est une martingale ?
5. À partir d'une martingale (M_n) en temps discret, on construit habituellement une martingale en temps continu en posant $X_t = M_{[t]}$, où $[t]$ désigne la partie entière de t. Pourquoi le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ qui coïncide avec M aux instants entiers et qui est affine par morceaux n'est-il pas une martingale ?

Exercice 3 :

1. Donner la définition d'un temps d'arrêt (en temps continu). Donner des exemples de variables aléatoires qui sont des temps d'arrêt... et de variables aléatoires qui n'en sont pas. Montrer que le minimum et le maximum de deux temps d'arrêt sont des temps d'arrêt.
2. Définir la tribu $\mathcal{F}_\tau$ dans le cas où τ est un temps d'arrêt.
3. Énoncer le théorème d'arrêt de Doob. Que se passe-t-il si le temps d'arrêt est borné ?
4. Donner un critère de convergence d'une martingale $(M_t)_{t\geq 0}$.

Exercice 4 : Donner la définition d'un processus (ou d'une famille) gaussien(ne). Que vérifie la matrice de covariance d'un vecteur ? Comment se traduit l'indépendance dans le cas d'un vecteur gaussien ? Comment marche le conditionnement dans le cas des vecteurs gaussiens ? Pouvez-vous expliquer pourquoi ?

Exercice 5 :

1. Calculer explicitement la variation quadratique du mouvement brownien.
2. Donner trois définitions / caractérisations du mouvement brownien.
3. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ sont deux mouvements browniens indépendants et $\theta \in \mathbb{R}$ est fixé, montrer que le processus $W_t = \cos\theta\ X_t + \sin\theta\ Y_t$ est un mouvement brownien ? Cela reste-t-il vrai si θ est une fonction de t ? Un processus aléatoire ?
4. On fixe $t \geq 0$. Les processus $(B_s)_{s\geq 0}$ et $(B_{t+u} - B_t)_{u\geq 0}$ sont-ils indépendants ? Que faut-il changer ? Et dans le cas où t est remplacé par un temps d'arrêt ? Quel est le nom de ces propriétés ? Citer d'autres processus vérifiant cette propriété.
5. Pour un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ et α un réel fixé, déterminer β de sorte que le processus $\exp(\alpha B_t + \beta t)$ soit une martingale.

Exercice 6 :

1. Pour deux martingales $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(N_t)_{t\geq 0}$, donner la définition de $\langle M, N\rangle_t$. Ce processus est-il à variations bornées ? Quel est son lien avec la covariance ?
2. Calculer $\langle B, W\rangle_t$ lorsque $(B_t)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ sont deux mouvements browniens indépendants.
3. Que peut-on dire de $\langle M, N\rangle_t$ lorsque $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(N_t)_{t\geq 0}$ sont deux martingales indépendantes et telles que $(M_{t+s} - M_t, N_{t+s} - N_t)$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$ pour tous $s, t \geq 0$?

Exercice 7 : Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et a et b deux constantes strictement positives. On note

$$\tau = \inf\{t \geq 0, B_t = -a \text{ ou } B_t = b\}.$$

1. Montrer que $\mathbf{P}(|B_t| \leq \alpha)$ tend vers 0 pour tout $\alpha > 0$ fixé, lorsque t tend vers $+\infty$. En déduire que τ est fini p.s.
2. En utilisant le théorème d'arrêt de Doob appliqué à la martingale $(B_t)_{t\geq 0}$, calculer $\mathbf{P}(B_\tau = -a)$ et $\mathbf{P}(B_\tau = b)$. Pourquoi peut-on appliquer ce théorème ?
3. À l'aide de la question précédente, montrer que $\mathbf{P}(\exists t > 0, B_t = b) = 1$.
4. En utilisant à nouveau le théorème d'arrêt de Doob, pour la martingale $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ entre les instants 0 et $\min(\tau, n)$, puis en faisant tendre n vers $+\infty$, calculer $\mathbf{E}(\tau)$. Pourquoi a-t-on été amené à tronquer le temps d'arrêt ?
5. Suggérer une méthode pour calculer la transformée de Laplace $\mathbf{E}(\exp(-\lambda\tau))$.
6. Dans le cas $a = b$, montrer que τ est indépendant de B_τ.
7. Parmi ces résultats, lesquels restent-ils valables si on remplace le mouvement brownien par une martingale continue ?

Exercice 8 : Soit (B_t) un mouvement brownien. On note, pour tout réel $a > 0$,

$$T_a = \inf\{t \geq 0, B_t = a\}.$$

On pose également $T_0 = 0$. On rappelle que les T_a sont finis presque sûrement.

1. Montrer (sans calcul) que la loi de T_a est la même que celle de $a^2 T_1$.
2. Montrer que les variables aléatoires $(T_{ka} - T_{(k-1)a})_{k\geq 1}$ sont indépendantes et de même loi.
3. En utilisant une martingale bien choisie et le théorème d'arrêt de Doob, déterminer $\mathbf{E}(\exp(-\lambda T_1))$. En déduire $\mathbf{E}(T_1)$. Expliciter également $\mathbf{E}(\exp(-\lambda T_a))$.
4. Indépendamment de ce qui précède, montrer que

$$\mathbf{P}(T_a \leq t) = \mathbf{P}(T_a \leq t, B_t < a) + \mathbf{P}(T_a \leq t, B_t > a) = 2\mathbf{P}(B_t > a).$$

   En déduire la densité de la loi de T_a.

Exercice 9 : Soit a et μ deux constantes positives et (B_t) un mouvement brownien. On note $T_1 = \inf\{t, B_t \geq a - \mu t\}$ et $T_2 = \inf\{t, B_t \leq -a + \mu t\}$. On pose ensuite $\tau = \min(T_1, T_2)$ et $\Phi(\lambda) = \mathbf{E}(\exp(-\lambda\tau))$.

1. Montrer (en comparant avec le cas $\mu = 0$) que T_1 et T_2 sont finis presque sûrement.
2. Montrer que $T_1 \overset{\text{loi}}{=} T_2$ puis que $(T_1, T_2) \overset{\text{loi}}{=} (T_2, T_1)$.
3. Montrer que $\Phi(\lambda) = 2\mathbf{E}(\exp(-\lambda T_1)\mathbf{1}_{T_1 < T_2})$.
4. Montrer ensuite que Φ vérifie

$$e^{\lambda a}\Phi(-\lambda\mu - \lambda^2/2) + e^{-\lambda a}\Phi(\lambda\mu - \lambda^2/2) = 2.$$

5. En utilisant la martingale exponentielle associée à $(B_t)_{t\geq 0}$, et indépendamment du reste de l'exercice, calculer $\mathbf{E}(\exp(-\alpha T_1))$.