Université Claude Bernard Lyon 1
M2 pro IR
Année 2011-2012

Processus stochastiques : fiche n° 2

Dans l'ensemble de cette fiche, $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien, $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale de carré intégrable et $(X_t)_{t\geq 0}$ une semi-martingale.

Exercice 1 : Pour quels processus (H_s) les intégrales stochastiques

$$\int_0^t H_s\, dB_s\ , \qquad \int_0^t H_s\, dM_s \qquad \text{et} \qquad \int_0^t H_s\, dX_s$$

sont-elles définies ? Préciser dans chacun des cas leur variation quadratique.

Exercice 2 : Ecrire les processus suivants sous la forme d'une intégrale stochastique, déterminer leur partie martingale et leur partie à variations bornées ainsi que leur variation quadratique.

$$(B_t^3 - 3tB_t)_{t\geq 0} \qquad (B_t^4 - 6tB_t^2)_{t\geq 0} \qquad (e^{\alpha M_t - \alpha^2 \langle M\rangle_t/2})_{t\geq 0} \qquad (e^{\alpha M_t})_{t\geq 0}.$$

Exercice 3 : A quelles conditions le processus $(f(B_t))_{t\geq 0}$ est-il une martingale ? Qu'en est-il pour $(f(M_t))_{t\geq 0}$? Et pour $(f(X_t))_{t\geq 0}$?

Exercice 4 : En appliquant le lemme d'Itô au processus $Y_t = \ln S_t$, déterminer la solution de l'équation différentielle stochastique suivante modélisant le cours d'un actif risqué dans le modèle de Black et Scholes :

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t.$$

Exercice 5 : Soit $(M_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue, de carré intégrable et vérifiant $M_0 = 0$ p.s.. On suppose que sa variation quadratique de $(M_t)_t$, notée comme d'habitude $\langle M\rangle_t$, est strictement croissante et que $\lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t = \infty$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe un mouvement brownien réel (X_t) tel que $M_t = X_{\langle M\rangle_t}$.

1. On note, pour tout $u \geq 0$, $\tau(u) = \inf\{t \geq 0, \langle M\rangle_t \geq u\}$. Expliquer pourquoi $\tau(u)$ est un temps d'arrêt pour tout u fixé.
2. Montrer que, pour tout $u > 0$ fixé, $\mathbf{P}(\tau(u) < \infty) = 1$.
3. Montrer que, presque sûrement, la fonction $u \to \tau(u)$ est continue et strictement croissante.
4. On pose, pour tout $u \geq 0$, $X_u = M_{\tau(u)}$. Déduire de la question précédente que, presque sûrement, $(X_u)_{u\geq 0}$ est un processus continu.
5. On suppose que les hypothèses du théorème de Doob sont remplies. En déduire que $\mathbf{E}(X_u|\mathcal{F}_{\tau(v)}) = X_v$, pour tous $0 \leq v \leq u$.
6. Montrer de même (sans vérifier les hypothèses nécessaires) que $(X_u^2 - u)_{u\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_{\tau(u)}$–martingale.
7. Conclure que $(X_u)_{u\geq 0}$ est un mouvement brownien réel.