Université Claude Bernard Lyon 1
M2 pro IR
Année 2012-2013

Processus stochastiques : fiche n^o 3

Exercice 1 : Optimisation de richesse

Sur le marché financier, on trouve un actif risqué et un actif sans risque. Soit $(S_t, t \geq 0)$ le prix de l'actif risqué. On suppose que

$$(*) \qquad dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma dB_t),$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien sous la probabilité P et sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t$.
L'actif sans risque vérifie

$$(**) \qquad d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t r_t dt.$$

Les processus μ_t, r_t sont $\mathcal{F}_t$-adaptés bornés, σ est une constante non nulle.

1. Montrer que
$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t + \int_0^t \mu_s \ ds - \sigma^2 t/2}$$
est solution de $(*)$.
2. Montrer que $S_t \exp\left(-\int_0^t \mu_s ds\right)$ est une P-martingale.
3. Résoudre $(**)$.
4. On pose $\theta_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma}$.
   (a) Vérifier que $L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$ est une P-martingale. Quelle est sa variation quadratique sous P ? Calculer également $< L, B >_t$ sous P.
   (b) En justifiant votre réponse, déterminer une mesure de probabilité Q telle que, sous Q le processus $\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$ soit une martingale.*(En justifiant ce choix, il pourra être utile de faire intervenir le processus L_t pour expliciter le changement de probabilité.)*
   (c) Vérifier que $(\tilde{B}_t)$ est un mouvement brownien (sous Q).
   N.B. : l'expression explicite de Q n'est pas utilisée dans la suite du problème.
   (d) Écrire l'équation vérifiée par S_t en utilisant $\tilde{B}_t$.
5. Un agent de richesse initiale x investit sa richesse X_t à l'instant t suivant l'actif sans risque et l'actif risqué de prix S_t suivant la répartition à l'instant t :
$$X_t = n(t)S_t + \tilde{n}(t)\tilde{S}_t.$$
On suppose
$$dX_t = n(t)dS_t + \tilde{n}(t)d\tilde{S}_t.$$
C'est l'hypothèse standard dite d'autofinancement (aucun flux d'argent ne sort du portefeuille).
   (a) Montrer que $dX_t = r_t X_t dt + n(t)(dS_t - S_t r_t dt)$.
   (b) On note $\pi_t = n(t)S_t$ et $R_t = \exp(-\int_0^t r_s ds)$.
   Écrire dX_t en fonction de π_t, r_t, X_t et $\tilde{B}_t$.
   (c) Calculer $d(X_t R_t)$ avec la formule de Itô et montrer que, sous Q, le processus $(X_t R_t)$ est une martingale.

(d) Soit $T > 0$ fixé et $\xi = X_T$. Écrire X_t sous forme d'une espérance conditionnelle faisant intervenir ξ et le processus R, en précisant la probabilité utilisée.

6. On se donne maintenant un processus $(c_t)_{t\geq 0}$ à valeurs positives et adapté et un processus $(\pi_t)_{t\geq 0}$ de carré intégrable $\mathcal{F}_t$-adapté.
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus tel que

$$dX_t = r_t X_t dt + \pi_t(dB_t + \theta_t dt) - c_t dt$$

(a) Montrer que, sous Q, le processus $Z_t = X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds$ est une martingale.

(b) En déduire en justifiant la réponse que $X_t R_t = E_Q\left(X_T R_T + \int_t^T R_s c_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right)$

(c) Écrire cette relation sous P.

Exercice 2 : Le modèle de Black, Scholes et Merton. Le modèle de Black, Scholes et Merton est un modèle dans lequel le prix (S_t) de l'actif sousjacent suit un mouvement brownien géométrique de volatilité σ constante et de dérive μ constante :

$$dS_t = S_t(\sigma\ dW_t + \mu\ dt).$$

Les autres hypothèses de ce modèle sont que

- Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage (on laisse le marché suivre son cours).
- On peut vendre à découvert.
- Les coûts des transactions sont nuls.
- Le taux d'intérêt sans risque r est constant.
- L'actif sous-jacent est infiniment divisible.
- Si le sous-jacent est une action, il n'y a pas de dividende versé entre l'évaluation du prix de l'option et l'échéance de l'option.

On notera $V_t = V(S_t, t)$ le prix de l'option si le prix de l'action est S.

1. Vérifier que $S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t)$.
2. Comment s'écrit $d\langle S\rangle_t$?
3. Calculer dV_t en fonction de dS_t et dt puis en fonction de dW_t et dt.
4. On considère une stratégie de portefeuille suivant laquelle on détient une option et on l'échange en permanence pour détenir $-\partial V/\partial S$ actions. A l'instant t, la valeur du portefeuille est
$$\Pi_t = V_t - S_t \frac{\partial V_t}{\partial S}.$$
On note R_t le profit de ce portefeuille. Justifier que R_t vérifie
$$dR_t = dV_t - \frac{\partial V_t}{\partial S}\ dS_t.$$
5. Calculer dR_t et en déduire que R_t est à variations bornées.
6. Le taux de rendement de ce portefeuille doit être égal au taux de rendement de l'actif non risqué : $r\Pi_t\ dt = dR_t$. En déduire l'équation aux dérivées partielles suivantes appelée EDP de Black-Scholes. :
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + rS\frac{\partial V}{\partial s} - rV = 0.$$