Université Claude Bernard Lyon 1
M2 pro IR
Année 2009-2010

Processus stochastiques : fiche n° 4

Formule de Feynman-Kač

On se donne des fonctions μ, σ et ψ et on considère l'équation aux dérivées partielles suivant :

$$(*) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

avec la condition finale $f(x,T) = \psi(x)$.

Nous allons voir que la solution f de cette équation est de la forme

$$f(x,t) = \mathbf{E}(\psi(X_T)|X_t = x)$$

où (X_t) est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \mu(X_t,t)\ dt + \sigma(X_t,t)dW_t.$$

On applique la formule d'Itô pour le processus $Y_t = f(X_t,t)$ lorsque f est solution de $(*)$:

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial df}{\partial x}(X_t,t)dX_t + \frac{\partial f}{\partial t}(X_t,t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t,t)d\langle X\rangle_t \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(X_t,t)\left(\mu(X_t,t)\ dt + \sigma(X_t,t)dW_t\right) + \frac{\partial f}{\partial t}(X_t,t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t,t)\sigma^2(X_t,t)dt \end{aligned}$$

En rassemblant les termes en dt et en utilisant le fait que f est solution de l'EDP $(*)$, on obtient :

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial x}(X_t,t)\sigma(X_t,t)dW_t.$$

En particulier, (Y_t) est une martingale. On en déduit :

$$f(x,t) = \mathbf{E}(f(X_t,t)|X_t = x) = \mathbf{E}(f(X_T,T)|X_t = x) = \mathbf{E}(\psi(X_T)|X_t = x).$$