

M2IR
Université Claude Bernard Lyon 1
Année universitaire 2012-2013

Remise à niveau en processus stochastiques

F. Bienvenue-Duheille

Le but de ce poly est de vous mettre à niveau sur les processus stochastiques en temps continu (ie familles de variables aléatoires indexées par \mathbb{R}^+) utilisés en finance, pour aborder sereinement les premiers cours de finance.

Les preuves ne sont pas nécessairement fournies en détail : les objets mathématiques présentés ici sont complexes, et leur manipulation n'exige pas une compréhension extensive de toutes leurs propriétés. Les exercices proposés doivent être traités avec le plus grand soin.

Pour procéder dans l'ordre, si vous n'avez pas suivi de cours de probabilité niveau L3 et/ou M1, commencez par vous plonger dans un ouvrage dans ce domaine. Un cours de calcul intégral pourra également être utilisé avec profit si vos souvenirs sont confus. Vous devez absolument être à l'aise avec les notions de tribus, mesurabilité, intégrabilité, variable aléatoire, lois usuelles, convergence d'une suite de variables aléatoires (ou d'une suite de fonctions mesurables), lois des grands nombres, théorème central limite...

Quelques heures de cours de remise à niveau auront lieu courant septembre : elles sont là pour éclaircir les points obscurs et faire des exercices. Si vous arrivez en n'ayant que survolé ce poly, elles ne vous serviront à rien !

Chapitre 1

Espérance conditionnelle

Il s'agit uniquement de rappels ! Consultez un cours de calcul intégral pour les preuves et compléments. Prenez garde à bien différencier les signes \in et \subset .

1 Tribus, variables aléatoires, lois

Rappelons avant tout la définition d'une tribu sur un ensemble Ω :

$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une **tribu** si,

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- Si $A \in \mathcal{F}$ alors $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
- si les $(A_n)_{n \geq 1}$ sont dans \mathcal{F} , alors $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$.

Une **sous-tribu** \mathcal{F} d'une tribu Σ est une tribu telle que $\mathcal{F} \subset \Sigma$, c'est-à-dire que si $A \in \mathcal{F}$ alors $A \in \Sigma$.

Sur \mathbb{N} , la tribu utilisée sera le plus souvent l'ensemble des parties de \mathbb{N} . Sur \mathbb{R} , on utilisera la tribu borélienne (plus petite tribu contenant les ouverts de \mathbb{R} , qui coïncide avec la plus petite tribu contenant les intervalles de \mathbb{R}).

Une **variable aléatoire** $X : (\Omega, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une fonction mesurable, c'est-à-dire que pour tout borélien B de \mathbb{R} , l'ensemble $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}$, noté $\{X \in B\}$, appartient à la tribu Σ . Il est équivalent de dire que pour tout intervalle I (ou tout fermé, ou tout intervalle du type $] -\infty, a]$, ou ...), on a $\{X \in I\} \in \Sigma$.

La **tribu engendrée** par une variable aléatoire X est la tribu $\sigma(X)$ définie par

$$\sigma(X) = \{X \in B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

C'est la plus petite sous-tribu de Σ qui rende X mesurable. C'est également la tribu engendrée par la famille des événements $(\{X \in I\}, I \text{ intervalle de } \mathbb{R})$.

Si \mathbf{P} est une mesure de probabilité sur (Ω, Σ) , la **mesure image** de X , notée $X(\mathbf{P})$ ou \mathbf{P}_X est la mesure de probabilité sur la tribu borélienne de X définie pour tout borélien B par

$$X(\mathbf{P})(B) = \mathbf{P}(X \in B).$$

On parle également de **loi** de la variable aléatoire. L'**espérance** de X est définie par

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbf{P} = \int_{\mathbb{R}} x dX(\mathbf{P})(x),$$

lorsque l'intégrale est absolument convergente (ie $\int_{\Omega} |X| d\mathbf{P} < \infty$). Pour toute fonction borélienne h , on a également

$$\mathbf{E}(h(X)) = \int_{\Omega} h(X) d\mathbf{P} = \int_{\mathbb{R}} h(x) dX(\mathbf{P})(x),$$

lorsque les intégrales convergent. Lorsque la mesure-image de X est soit discrète, soit à densité, on retrouve les écritures classiques de l'espérance. Ainsi, pour toute fonction borélienne $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si X est discrète à valeurs entières,

$$E(h(X)) = \int_{\Omega} h(X) d\mathbf{P} = \sum_{n \in \mathbb{N}} h(n) \mathbf{P}(X = n)$$

alors que si X admet la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ pour densité, on a

$$E(h(X)) = \int_{\Omega} h(X) d\mathbf{P} = \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x) dx.$$

Une variable aléatoire est **indépendante** d'une sous-tribu \mathcal{F} de Σ si $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\forall A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbf{P}(\{X \in B\} \cup A) = \mathbf{P}(X \in B) \mathbf{P}(A).$$

2 Conditionnement

Soient maintenant une variable aléatoire $X : (\Omega, \Sigma, \mathbf{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et une sous-tribu \mathcal{F} de Σ . On suppose que X est **intégrable** (c'est-à-dire $\mathbf{E}|X| < \infty$). L'**espérance conditionnelle** de X sachant \mathcal{F} est alors la **variable aléatoire** Y \mathcal{F} -mesurable telle que, pour tout $A \in \mathcal{F}$,

$$\int_A X d\mathbf{P} = \int_A Y d\mathbf{P}.$$

Cette variable aléatoire est unique, moyennant les « presque sûrement » usuels.

Concrètement, une variable aléatoire Y est mesurable par rapport à une tribu \mathcal{F} si Y peut s'exprimer en fonction des événements qui engendrent \mathcal{F} . Si la tribu \mathcal{F} est la tribu engendrée par une variable aléatoire Z , on peut montrer que Y est \mathcal{F} -mesurable si et seulement s'il existe une fonction borélienne $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $Y = h(Z)$. Toute la difficulté du calcul de l'espérance conditionnelle réside dans la recherche de la fonction h .

Si \mathcal{F} est la tribu engendrée par une variable aléatoire Z , on parle d'espérance conditionnelle sachant Z et on note $\mathbf{E}(X|Z) = \mathbf{E}(X|\sigma(Z))$.

Justification de l'existence : voir le théorème de Radon-Nicodyn.

Exemples :

- Si X est intégrable et \mathcal{F} -mesurable, alors $\mathbf{E}(X|\mathcal{F}) = X$.
- Si X est \mathcal{F} -mesurable et Y est une variable aléatoire intégrable telle que XY est intégrable, alors $\mathbf{E}(XY|\mathcal{F}) = X\mathbf{E}(Y|\mathcal{F})$.
- Si X est une variable aléatoire intégrable et indépendante de \mathcal{F} alors $\mathbf{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbf{E}(X)$.

- Si X est une variable aléatoire intégrable et si \mathcal{F} est la tribu engendrée par une variable aléatoire N à valeurs dans \mathbb{N} , alors

$$\mathbf{E}(X|\mathcal{F}) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}(X|\{N = n\})\mathbf{1}_{N=n} = \sum_{n \geq 0} \frac{\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{N=n})}{\mathbf{P}(N = n)}\mathbf{1}_{N=n}.$$

Attention à ne pas confondre l'espérance conditionnelle sachant une tribu et l'espérance conditionnelle sachant un événement B de probabilité non nulle : la loi de X sachant l'événement B est la mesure μ définie par $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu(A) = \mathbf{P}(X \in A|B) = \frac{\mathbf{P}(\{X \in A\} \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Il s'agit donc d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et non d'une variable aléatoire.

3 Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires intégrables et \mathcal{F} et \mathcal{G} deux tribus. L'espérance conditionnelle vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 1.1

1. $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbf{E}(X)$.
2. Pour tous réels a et b , $\mathbf{E}(aX + bY|\mathcal{F}) = a\mathbf{E}(X|\mathcal{F}) + b\mathbf{E}(Y|\mathcal{F})$.
3. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{F}) = \mathbf{E}(X|\mathcal{F})$ et $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{G}) = \mathbf{E}(X|\mathcal{F})$.
4. Si $X \leq Y$ p.s., alors $\mathbf{E}(X|\mathcal{F}) \leq \mathbf{E}(Y|\mathcal{F})$.
5. Si Φ est une fonction convexe positive (ou telle que $\Phi(X)$ soit intégrable), alors

$$\mathbf{E}(\Phi(X)|\mathcal{F}) \geq \Phi(\mathbf{E}(X|\mathcal{F})).$$

Commentaires :

- Le point 1 est évident (mais très utile). Pour le prouver, il suffit d'écrire la définition de l'espérance conditionnelle en remplaçant A par Ω .
- Le dernier point est l'inégalité de Jensen. Pour mémoriser le sens de l'inégalité, pensez au cas $\Phi(x) = x^2$, en omettant le conditionnement.

Exercice : Faites la preuve de la proposition précédente !

Chapitre 2

Martingales

1 Martingales en temps discret

1.1 Définition, exemples

Définition 2.1

- Une suite croissante de tribus $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, i.e. telle que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ est appelée une **filtration**.
- Un processus $(M_n)_n$ est **adapté** à la filtration (\mathcal{F}_n) si tout n , la variable aléatoire M_n est \mathcal{F}_n -mesurable.
- Un processus $(X_n)_n$ est **prévisible** pour la filtration (\mathcal{F}_n) si tout n , la variable aléatoire X_n est \mathcal{F}_{n-1} -mesurable.
- Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ une filtration et $(M_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires. $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ est une **martingale** si
 - pour tout $n \geq 0$, M_n est une variable aléatoire intégrable : $\mathbf{E}|M_n| < \infty$,
 - M_n est \mathcal{F}_n -mesurable (ou (M_n) est \mathcal{F}_n -adapté),
 - $\mathbf{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n$ p.s.

Exemples :

- La marche symétrique : $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1/2$, est une martingale. Une filtration adéquate est donnée par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\} = \sigma\{S_1, \dots, S_n\}$.
- Plus généralement : on se donne des variables aléatoires (X_n) indépendantes, intégrables et centrées et on pose $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Vérifiez que le processus obtenu est une martingale (même filtration que dans l'exemple précédent).
- Toutes les martingales ne s'écrivent pas comme des sommes de variables aléatoires indépendantes : en prenant les (X_i) indépendantes, de carré intégrable, centrées et de même variance σ^2 , et en posant $M_n = S_n^2 - n\sigma^2$, on obtient à nouveau une martingale. $M_{n+1} - M_n = X_{n+1}^2 + 2X_{n+1}S_n - \sigma^2$ n'est en général pas indépendante de M_n .

Une propriété importante des martingales est la suivante :

Proposition 2.2 Soit $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ une martingale.

- Pour tout $k \geq n \geq 0$, on a $\mathbf{E}(M_k|\mathcal{F}_n) = M_n$ p.s.
- $\mathbf{E}(M_n) = \mathbf{E}(M_0)$.

Preuve : en exercice.

Définition 2.3 Soit $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration et $(M_n)_n$ une suite de variables aléatoires **intégrables** et \mathcal{F}_n -mesurables.

- On dit que (M_n, \mathcal{F}_n) est une **sous-martingale** si $\mathbf{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq M_n$.
- On dit que (M_n, \mathcal{F}_n) est une **sur-martingale** si $\mathbf{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq M_n$.

Attention : Ne pas oublier de vérifier l'intégrabilité et la mesurabilité !

Exercice : Montrez que si (M_n) est une sous-martingale, la suite $(\mathbf{E}(M_n))_n$ est croissante.

Exemple : Si (M_n, \mathcal{F}_n) est une martingale telle que pour tout n , $\mathbf{E}(|M_n|^p) < \infty$, où $p > 1$ est un réel fixé, alors $(|M_n|^p, \mathcal{F}_n)_n$ est une sous-martingale.

Remarque : Souvent, on aura la tribu \mathcal{F}_n sera exactement la tribu engendrée par les variables aléatoires $(M_k)_{k \leq n}$. Dans ce cas, un processus (X_n) sera \mathcal{F}_n -adapté si et seulement s'il existe une suite de fonctions boréliennes $f_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $X_n = f_n(M_0, \dots, M_n)$

1.2 Temps d'arrêt

Définition 2.4 Une variable aléatoire τ , à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un **temps d'arrêt** pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Une autre caractérisation est la suivante :

Proposition 2.5 Une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Convention : Dans la définition d'un temps d'arrêt, on utilisera fréquemment la convention suivante : $\inf\{\emptyset\} = +\infty$ (et sa contrepartie : $\sup\{\emptyset\} = -\infty$ ou 0).

Exemples : Soit (M_n, \mathcal{F}_n) une martingale et λ un réel positif.

- $\tau = \inf\{n \geq 0, M_n \leq \lambda\}$ est un temps d'arrêt.
- $\sigma = \inf\{n \geq 0, |M_n| \leq \lambda\}$ est un temps d'arrêt.
- $\rho = \inf\{n \geq 40, M_n \geq \lambda\}$ est un temps d'arrêt.
- $\phi = \sup\{n \geq 0, M_n \leq \lambda\}$ n'est pas un temps d'arrêt.
- $\tilde{\rho} = \inf\{n \geq \sigma, M_n \geq \lambda\}$ est un temps d'arrêt si σ en est un.

Exercice : Les constantes sont des temps d'arrêt. Si τ et σ sont des temps d'arrêt, les variables aléatoires $\min(\tau, \sigma)$ et $\max(\tau, \sigma)$ sont des temps d'arrêt.

Définition 2.6 On définit la tribu \mathcal{F}_τ par

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \Sigma; \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

Exercice :

1. Vérifiez que le membre de droite de l'égalité ci-dessus définit bien une tribu.
2. Montrez que si τ est un temps d'arrêt constant égal à n , alors \mathcal{F}_τ (comme défini ci-dessus) est la tribu \mathcal{F}_n (de la filtration).

3. Si τ et σ sont deux temps d'arrêt, l'événement $\{\tau \leq \sigma\}$ appartient aux tribus \mathcal{F}_τ et \mathcal{F}_σ .
4. τ est une variable aléatoire \mathcal{F}_τ -mesurable.
5. Montrez que si $\tau \leq \sigma$ **presque sûrement**, alors $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.
6. Montrez que si τ et σ sont deux temps d'arrêt et si $\rho = \min(\tau, \sigma)$ alors $\mathcal{F}_\rho = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.
7. Montrez que si $(M_n)_n$ est une \mathcal{F}_n -martingale et si τ est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_n)_n$ vérifiant $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$ alors M_τ est \mathcal{F}_τ -mesurable. (*indication : écrire M_τ sous la forme $M_\tau = \sum_n M_n \mathbf{1}_{\tau \geq n}$ et/ou étudier pour tout entier n et tout borélien A , les événements $\{M_\tau \in A\} \cap \{\tau = n\}$.)*)

1.3 Théorème d'arrêt de Doob

Le théorème suivant, appelé **théorème d'arrêt** ou **théorème optionnel de Doob** est le plus important de ce chapitre sur les martingales. Moralement, il signifie que, moyennant quelques conditions, il est possible de conditionner par rapport à des tribus \mathcal{F}_σ (avec un temps d'arrêt σ) de la même façon que par rapport à une tribu \mathcal{F}_n .

Théorème 2.7 Soit (M_n, \mathcal{F}_n) une martingale et τ et σ deux temps d'arrêt à valeurs dans \mathbb{N} (et non $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) tels que :

- (i) $\mathbf{E}|M_\sigma| < \infty$, (ii) $\mathbf{E}|M_\tau| < \infty$,
- (iii) $\liminf_n \mathbf{E}(|M_n| \mathbf{1}_{\tau \geq n}) = 0$.

Alors on a

$$\mathbf{E}(M_\tau \mathbf{1}_{\tau \geq \sigma} | \mathcal{F}_\sigma) = M_\sigma \mathbf{1}_{\tau \geq \sigma} \quad p.s..$$

Ce théorème est également vrai pour les sous-martingales et les sur-martingales :

Théorème 2.8 Soient $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration, τ et σ deux temps d'arrêt par rapport à cette filtration, à valeurs dans \mathbb{N} , et $(M_n)_n$ un processus \mathcal{F}_n -intégrable vérifiant les trois hypothèses (i), (ii) et (iii) du théorème précédent. Alors

– Si $(M_n)_n$ est une sous-martingale, on a

$$\mathbf{E}(M_\tau \mathbf{1}_{\tau \geq \sigma} | \mathcal{F}_\sigma) \geq M_\sigma \mathbf{1}_{\tau \geq \sigma} \quad p.s..$$

– Si $(M_n)_n$ est une sur-martingale, on a

$$\mathbf{E}(M_\tau \mathbf{1}_{\tau \geq \sigma} | \mathcal{F}_\sigma) \leq M_\sigma \mathbf{1}_{\tau \geq \sigma} \quad p.s..$$

Les hypothèses des deux théorèmes ci-dessus sont fréquemment difficiles à prouver. Très souvent, on utilisera ces théorèmes sous l'une des conditions suivantes :

1. Si (M_n) est **uniformément intégrable**, c'est-à-dire si $\lim_k \sup_n \mathbf{E}(|M_n| \mathbf{1}_{|M_n| \geq k}) = 0$, alors (iii) est vérifiée.
2. Si τ est borné par une constante déterministe K , les conditions (ii) et (iii) sont remplies.
3. On appliquera souvent le théorème d'arrêt avec $\sigma = 0$ ou 1. La tribu \mathcal{F}_σ est alors particulièrement simple, et on s'intéresse en fait à $\mathbf{E}(M_\tau)$.

4. Toujours avec $\sigma = 0$ ou 1 et τ un temps d'arrêt quelconque. Si l'on ne parvient pas à prouver les hypothèses (ii) et (iii), on remplace τ par $\tau \wedge N$ (N déterministe) et on fait tendre N vers l'infini. Pour le temps d'arrêt $\tau \wedge N$, les hypothèses (ii) et (iii) sont vérifiées et il reste à justifier un passage à la limite sous l'espérance, ce qui se fait classiquement en utilisant les théorèmes de convergence dominée de Lebesgue ou de convergence monotone (Beppo-Levi).

Idées de la preuve pour une sous-martingale On part des définitions de la tribu \mathcal{F}_τ et de l'espérance conditionnelle; montrer que

$$\mathbf{E}(M_\tau \mathbf{1}_{\tau \geq \sigma} | \mathcal{F}_\sigma) \geq M_\sigma \mathbf{1}_{\tau \geq \sigma}$$

équivalent à montrer que

$$\forall A \in \mathcal{F}_\sigma, \mathbf{E}(\mathbf{1}_A M_\tau \mathbf{1}_{\tau \geq \sigma}) \geq \mathbf{E}(\mathbf{1}_A M_\sigma \mathbf{1}_{\tau \geq \sigma})$$

ou encore

$$\forall A \in \mathcal{F}_\sigma, \forall n \geq 0, \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A \cap \{\sigma=n\} \cap \{\tau \geq \sigma\}} M_\tau) \geq \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A \cap \{\sigma=n\} \cap \{\tau \geq \sigma\}} M_\sigma).$$

Fixons donc $A \in \mathcal{F}_\sigma$ et $n \geq 0$. L'événement $A \cap \{\sigma = n\}$ appartient à la tribu \mathcal{F}_n .

On peut alors montrer par récurrence sur p que, pour tout $p \geq 1$,

$$\mathbf{E}(M_\sigma \mathbf{1}_{A \cap \{\sigma=n\} \cap \{\tau \geq \sigma\}}) \leq \mathbf{E}(M_\tau \mathbf{1}_{A \cap \{\sigma=n\} \cap \{\sigma \leq \tau\} \cap \{\tau \leq n+p\}}) + \mathbf{E}(M_{n+p+1} \mathbf{1}_{A \cap \{\sigma=n\} \cap \{\tau \geq n+p+1\}}).$$

Il reste à faire tendre p vers l'infini : le premier terme du membre de droite de cette inégalité tend vers

$$\mathbf{E}(M_\tau \mathbf{1}_{A \cap \{\sigma=n\} \cap \{\tau \geq \sigma\}})$$

par le théorème de convergence dominée. Quant au deuxième terme de cette même inégalité, il possède une sous-suite convergeant vers 0 grâce à l'hypothèse (iii), d'où la conclusion du théorème.

1.4 Convergence

Définition 2.9 On dit qu'une suite (X_n) de variables aléatoires est uniformément bornée dans \mathcal{L}^p si $\sup_n \mathbf{E}(|X_n|^p) < \infty$.

Théorème 2.10

– Si (M_n) est une sous-martingale telle que

$$\sup_n \mathbf{E}(M_n^+) < \infty$$

alors M_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire M_∞ intégrable.

- Si (M_n) est une sous-martingale uniformément bornée dans \mathcal{L}^p , $p > 1$, alors M_n converge presque sûrement et dans \mathcal{L}^p vers une variable aléatoire notée M_∞ .
- Si (M_n) est une martingale uniformément intégrable (c.f. p.8), elle converge presque sûrement et dans \mathcal{L}^1 et on a $\mathbf{E}(M_\infty | \mathcal{F}_n) = M_n$.

Les deux premiers points du théorème précédent sont dûs à J.L. Doob. Le dernier point est un résultat de P. Lévy.

Un corollaire important du point 1) est le suivant :

Corollaire 2.11 Si (M_n) est une sous martingale majorée par une constante alors elle converge presque sûrement.

2 Martingales en temps continu

Les résultats pour les martingales en temps continu sont rigoureusement les mêmes qu'en temps discret, seules changent les preuves. Les questions difficiles sont celles portant sur la mesurabilité qui peuvent être très difficile à résoudre. Les hypothèses de continuité, tant sur les filtrations que sur les processus, sont en partie là pour simplifier ces questions.

2.1 Tribus, filtrations

Les filtrations que l'on utilisera pour étudier les processus en temps continu (et en particulier les martingales) vérifieront toujours les conditions suivantes :

- \mathcal{F}_0 est **complète** : si N est un ensemble négligeable, $N \subset \mathcal{F}_0$.
- $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une **filtration** : $\forall t \geq s \geq 0, \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.
- La filtration est **continue à droite** : $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$.

2.2 Les processus càd-làg

Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit **càd-làg** (continu à droite, limite à gauche) s'il existe un ensemble négligeable $N \in \Omega$ tel que, pour tout $\omega \notin N$, la trajectoire $t \rightarrow X_t(\omega)$ est continue à droite en tout $t \geq 0$ et admet une limite à gauche en tout $t > 0$.

2.3 Martingales

Définition 2.12 *Un processus càd-làg $(M_t)_t$ est adapté à la filtration (\mathcal{F}_t) si pour tout t , la variable aléatoire M_t est \mathcal{F}_t -mesurable.*

Exercice : Montrer que si (X_t) est un processus càd-làg adapté, le processus (S_t) défini pour tout $t \geq 0$ par

$$S_t = \sup_{u \leq t} \{S_u\}$$

est càd-làg et adapté.

Une **martingale en temps continu** par rapport à une filtration (\mathcal{F}_t) complète et continue à droite sera pour nous un processus $(M_t)_{t \geq 0}$ càd-làg et vérifiant les conditions suivantes :

1. Pour tout $t \geq 0$, M_t est intégrable,
2. Pour tout $t \geq 0$, M_t est \mathcal{F}_t -mesurable (ou (M_t) est \mathcal{F}_t -adapté),
3. Pour tous $t \geq s \geq 0$, $\mathbf{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$.

Attention dans la définition ci-dessus à ne pas remplacer le couple (s, t) par le couple $(t, t+1)$!

La définition des sous-martingales (resp. sur-martingales) est similaire : remplacer le signe = par le signe \geq (resp. \leq) dans le dernier point de la définition ci-dessus.

Exercice : Soit (M_n) une martingale en temps continu adaptée à la filtration (\mathcal{F}_n) . On pose pour tout $t \geq 0$, $X_t = M_{[t]}$, où $[t]$ désigne la partie entière de t , et on note

$$\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{F}_{[t]}, \text{négligeables}).$$

Vérifier que (\mathcal{G}_t) est une filtration complète et continue à droite, que (X_t) est un processus càd-làg adapté à la filtration (\mathcal{G}_t) et constitue une martingale. Qu'en est-il du processus Y défini par

$$Y_t = M_{[t]} + (t - [t])(M_{[t]+1} - M_{[t]})$$

construit comme la fonction continue et affine par morceaux coïncidant avec M aux instants entiers ?

2.4 Temps d'arrêt

Un **temps d'arrêt** est une variable T à valeurs réelles vérifiant $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, pour tout $t \geq 0$. **Attention** dans la définition ci-dessus à ne pas remplacer l'événement $\{T \leq t\}$ par l'événement $\{T = t\}$. Très souvent, un temps d'arrêt en temps continu aura une densité (ou pour le moins sa loi aura une composante continue), et l'événement $\{T = t\}$ sera négligeable. Avec les conditions que nous avons mises sur la filtration, il sera donc dans toutes les tribus \mathcal{F}_s . Montrer que $\{T = t\}$ appartient à \mathcal{F}_t est donc vrai, mais n'apporte rien quant au fait que T soit un temps d'arrêt ou non !

Une petite proposition où l'hypothèse de continuité sur les filtrations intervient :

Proposition 2.13 *T est un temps d'arrêt si et seulement si $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$.*

Preuve : Soit $t \geq 0$ fixé et supposons que pour tout $s \geq 0$, $\{T < s\} \in \mathcal{F}_s$. On a :

$$\begin{aligned} \{T \leq t\} &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \left\{ T < t + \frac{1}{k} \right\} \\ &= \bigcap_{k \geq K} \left\{ T < t + \frac{1}{k} \right\} \end{aligned}$$

L'événement $\{T \leq t\}$ appartient donc à la tribu $\mathcal{F}_{t+1/K}$, pour tout K , donc il appartient à l'intersection de ces tribus, qui est la tribu \mathcal{F}_t .

Supposons maintenant que pour tout $s \geq 0$, $\{T \leq s\}$ appartienne à \mathcal{F}_s . On a :

$$\{T < t\} = \bigcup_k \left\{ T \leq t - \frac{1}{k} \right\}$$

donc $\{T < t\}$ appartient à \mathcal{F}_t .

Proposition 2.14 *Soit $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ une martingale en temps discret. On suppose que \mathcal{F}_0 est complète. Pour tout $t \geq 0$, on pose $N_t = M_{[t]}$ et $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{[t]}$, où $[t]$ désigne la partie entière de t .*

Alors $(\mathcal{G}_t)_t$ est une filtration continue à droite, $(N_t)_t$ est un processus càd-làg et c'est une martingale.

Les propriétés des temps d'arrêt en temps continu sont les mêmes qu'en temps discret. En particulier, le min, le max de deux temps d'arrêt sont des temps d'arrêt.

On définit également la tribu \mathcal{F}_T par $\mathcal{F}_T = \{A \in \Sigma; \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$. Comme ci-dessus, la condition $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ peut être remplacée par $A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.

On peut vérifier les propriétés suivantes :

Proposition 2.15 Soit T un temps d'arrêt par rapport à une filtration (\mathcal{F}_t) .

- Si T est une constante t , $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$.
- Si T et S sont des temps d'arrêt vérifiant $T \leq S$ **presque sûrement**, alors $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_S$.
- T est \mathcal{F}_T -mesurable.
- Si T et S sont deux temps d'arrêt, les événements $\{T = S\}$, $\{T \leq S\}$ et $\{T < S\}$ appartiennent aux tribus \mathcal{F}_T et \mathcal{F}_S .
- Si T est un temps d'arrêt et (M_t) un processus càd-làg adapté, M_T est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable.

Le théorème d'arrêt de Doob reste lui aussi valable :

Théorème 2.16 Soient (M_t, \mathcal{F}_t) une martingale càd-làg et τ et σ deux temps d'arrêt à valeurs dans \mathbb{R}^+ (et non $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$). Si les variables aléatoires M_τ et M_σ sont intégrables et si $\liminf_t \mathbf{E}(|M_t| \mathbf{1}_{\tau \geq t}) = 0$ alors on a

$$\mathbf{E}(M_\tau \mathbf{1}_{\tau \geq \sigma} | \mathcal{F}_\sigma) = M_\sigma \mathbf{1}_{\tau \geq \sigma} \quad p.s.$$

Idée de la preuve : Essentiellement, on discrétise le temps en considérant $(M_t^{(n)}) = (M_{[nt]/n})$ et on pose $\tau^{(n)} = [n\tau]/n$ et $\sigma^{(n)} = [n\sigma]/n$. $(M_t^{(n)})_t$ est une martingale en temps discret (en tout cas, elle y ressemble beaucoup) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{[nt]/n})_t$, et $\sigma^{(n)}$ et $\tau^{(n)}$ sont des temps d'arrêt par rapport à cette même filtration. On peut leur appliquer le théorème optionnel de Doob en temps discret. Pour conclure, il reste encore à effectuer un passage à la limite à la fois au niveau de la tribu \mathcal{F}_σ et au niveau de l'espérance conditionnelle.

2.5 Martingales locales

L'intégrabilité est une hypothèse forte dans la construction des martingales : certains processus ressemblent fortement à des martingales du point de vue du conditionnement mais ne sont pas intégrables et on ne peut donc pas calculer leur espérance conditionnelle. Les martingales locales permettent de contourner ce problème :

Définition 2.17 Un processus càd-làg $(M_t)_{t \geq 0}$ est une **martingale locale** pour une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n \geq 1}$ tendant vers $+\infty$ et telle que le processus $(M_{t \wedge \tau_n})_{t \geq 0}$ soit une martingale. On définit de façon similaire les sous-martingales locales et les sur-martingales locales.

2.6 Variation quadratique

On se donne une martingale (M_t, \mathcal{F}_t) de carré intégrable, c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{E}(M_t^2)$ est fini. On peut montrer qu'il existe un unique processus croissant noté $\langle M \rangle$ et appelé **variation quadratique** de M tel que $\langle M \rangle_0 = 0$ et tel que $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)$ soit une martingale.

Lorsque (M_n) est une martingale discrète de carré intégrable, l'existence de $\langle M \rangle_n$ est claire : en effet, posons $X_n = M_n - M_{n-1}$, $X_0 = M_0$ et pour tout $n \geq 1$, $V_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Les V_n sont des variables aléatoires intégrables et \mathcal{F}_n -mesurables. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M_{n+1}^2 - V_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mathbf{E}(M_n^2 + 2M_n X_{n+1} + X_{n+1}^2 - V_n - X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) \\ &= M_n^2 - V_n + 2M_n \mathbf{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\ &= M_n^2 - V_n \end{aligned}$$

car $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) - M_n = 0$.

V_n est donc un processus croissant vérifiant $V_0 = 0$ et $(M_n^2 - V_n)$ est une \mathcal{F}_n -martingale : c'est la variation quadratique de (M_n) .

L'existence de la variation quadratique d'une martingale en temps continu se base sur la discrétisation du temps (voir les idées de la preuve du théorème 2.16 d'arrêt de Doob).

Proposition 2.18 *La variation quadratique $(\langle M \rangle_t)$ est un processus \mathcal{F}_t -mesurable et croissant.*

Remarque : La variation quadratique peut tout à fait être définie pour une martingale locale, ou pour une martingale qui ne serait pas de carré intégrable en ajoutant une suite de temps d'arrêt où il faut.

2.7 Convergence

Les résultats de convergence pour les martingales en temps continu sont les mêmes que pour les martingales en temps discret (cf p. 9) :

Théorème 2.19 *Soit $(M_t)_t$ une sous-martingale.*

1. Si $\sup_t \mathbf{E}(M_t^+) < \infty$ alors M_t converge presque sûrement vers une variable aléatoire M_∞ intégrable.
2. Si, pour un certain $p > 1$, (M_t) est uniformément bornée dans \mathcal{L}^p , c'est-à-dire si

$$\sup_t \mathbf{E}(|M_t|^p) < \infty,$$

alors (M_t) converge presque sûrement et dans \mathcal{L}^p .

3. Si (M_t) est une martingale uniformément intégrable (c.f. p.8), elle converge presque sûrement et dans \mathcal{L}^1 et on a $\mathbf{E}(M_\infty|\mathcal{F}_t) = M_t$.

Chapitre 3

Mouvement brownien

1 Processus gaussiens

1.1 Vecteurs gaussiens

Définition 3.1 $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ est un **vecteur aléatoire gaussien** si, pour tout vecteur $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\langle \bar{\alpha}, \bar{X} \rangle = \sum_k \alpha_k X_k$ suit une loi de Gauss sur \mathbb{R} .

Il y a une grande différence entre un vecteur formé de variables aléatoires gaussiennes et un vecteur gaussien : en effet, si un vecteur est gaussien, chaque composante suit une loi de Gauss (prendre les α_i tous nuls sauf un dans la définition ci-dessus), mais la réciproque est fautive.

Par exemple : si X suit une loi de Gauss centrée et de variance 1 et si ε est une variable aléatoire indépendante de X et de loi donnée par $\mathbf{P}(\varepsilon = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$, $Y = \varepsilon X$ suit également une loi de Gauss centrée et de variance 1 (à faire en exercice), mais $X + Y$ ne suit pas une loi de Gauss donc le couple (X, Y) n'est pas gaussien. Par contre si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, le couple (X_1, X_2) est gaussien, tout comme le couple $(aX_1 + bX_2, cX_1 + dX_2)$ pour tout choix de réels a, b, c et d .

Remarque : Les variables aléatoires **constantes** sont considérées comme gaussiennes. En fait, la bonne caractérisation du caractère gaussien est la fonction caractéristique : une variable aléatoire X est gaussienne si sa fonction caractéristique est de la forme

$$\mathbf{E}(\exp(i\alpha X)) = \exp(i\alpha m) \exp(-\alpha^2 \sigma^2 / 2),$$

où m est la moyenne et σ^2 est la variance de la variable aléatoire. Une variable aléatoire constante admet bien une telle fonction caractéristique.

Cette caractérisation des variables aléatoires gaussiennes par leur fonction caractéristique est bien plus générale et s'étend aux vecteurs gaussiens.

Proposition 3.2 Un vecteur $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire gaussien si et seulement s'il existe une matrice symétrique positive $\Gamma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un vecteur $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$ tels que pour tout $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{E}(\exp(i\langle \bar{\alpha}, \bar{X} \rangle)) = \mathbf{E}\left(\exp\left(i\sum_k \alpha_k X_k\right)\right) = \exp\left(i\langle \bar{\alpha}, \bar{m} \rangle - \frac{1}{2}\langle \bar{\alpha}, \Gamma \bar{\alpha} \rangle\right).$$

On a dans ce cas $m_k = \mathbf{E}(X_k)$ et $\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj} = \mathbf{cov}(X_j, X_k) = \mathbf{E}(X_j X_k) - \mathbf{E}(X_j)\mathbf{E}(X_k)$. Γ est la **matrice de covariance** du vecteur \bar{X} .

Remarque : Rappelons qu'une matrice M est positive si pour tout vecteur v , le produit scalaire $\langle v, Mv \rangle$ est positif. Elle est définie positive si ce même produit scalaire est strictement positif pour tout vecteur v non nul. Cela n'a pas de rapport direct avec la positivité des coefficients non diagonaux de la matrice !

La matrice de covariance et le vecteur des moyennes permettent donc de caractériser complètement la loi d'un vecteur gaussien. En particulier, si un couple (X, Y) est gaussien, ses composantes sont indépendantes si et seulement si la covariance $\mathbf{cov}(X, Y)$ est nulle (c'est-à-dire si sa matrice de covariance est diagonale). C'est bien le seul cas que vous rencontrerez où vous pourrez conclure que deux variables aléatoires sont indépendantes en regardant leur covariance ! Évidemment, c'est un artefact, puisqu'il faut également savoir que le couple est gaussien.

Exercice : Montrez qu'une matrice de covariance est toujours une matrice symétrique et positive (au sens où $\langle v, Mv \rangle \geq 0$ pour tout vecteur v).

Du côté des densités : rappelons que la densité d'une loi de Gauss sur \mathbb{R} de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$ est $f(x) = \exp(-(x - m)^2 / (2\sigma^2)) / \sqrt{2\pi\sigma^2}$, et que la primitive de cette fonction ne s'exprime pas de façon simple.

Pour un vecteur aléatoire gaussien, la densité, si elle existe, s'exprime à l'aide de la matrice de covariance et du vecteur des moyennes :

Proposition 3.3 *On considère un vecteur gaussien $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ sur \mathbb{R}^n de moyenne $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$ et de matrice de covariance $\Gamma = (\Gamma_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$.*

\bar{X} admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n si et seulement si Γ est une matrice définie positive.

La densité est dans ce cas la fonction de n variables f donnée par

$$f(\bar{x}) = \frac{\exp(-\langle \bar{x} - \bar{m}, \Gamma^{-1}(\bar{x} - \bar{m}) \rangle / 2)}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\Gamma)}}.$$

Juste pour vérifier la formule de la densité, supposons que \bar{X} est un vecteur gaussien formé de variables aléatoires indépendantes centrées (pour alléger l'écriture !) et de variances non nulles σ_k^2 . Dans ce cas la densité de chaque X_k est $\exp(-x_k^2 / (2\sigma_k^2)) / \sqrt{2\pi\sigma_k^2}$ et, puisque les variables aléatoires sont indépendantes, la densité du vecteur \bar{X} est le produit des densités :

$$f(\bar{x}) = \frac{\exp(-\sum_k x_k^2 / (2\sigma_k^2))}{(2\pi)^{n/2} \prod_k \sigma_k}.$$

Les composantes de \bar{X} étant indépendantes, la matrice Γ des covariances de \bar{X} est diagonale, et on retrouve bien l'expression de la proposition 3.3.

Définition 3.4 *Une famille $(X_i)_{i \in I}$ de variables aléatoires est dite gaussienne si pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i_1, \dots, i_n) \in I^n$, le vecteur $(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})$ est gaussien.*

Cette définition s'applique bien entendu aux processus.

Proposition 3.5 *Soit $\bar{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille gaussienne de moyenne \bar{m} et de covariance Γ . On note*

$$H = \{ \langle \bar{\alpha}, \bar{X} \rangle, \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ tels que } \langle \bar{\alpha}, \bar{m} \rangle < \infty \text{ et } \langle \bar{\alpha}, \Gamma \bar{\alpha} \rangle < \infty \}$$

l'espace hilbertien engendré par les $(X_n)_{n \geq 0}$.

Alors toute variable $Y \in H$ est gaussienne et plus généralement, toute suite (finie ou non) $(Y_n)_n$ de H est une famille gaussienne.

1.2 Conditionnement

Calculer une espérance conditionnelle est rarement une opération simple. Le cas des vecteurs gaussiens est ici particulier : conditionner revient à projeter orthogonalement dans \mathcal{L}^2 .

Proposition 3.6 *Soit (X, Y_1, \dots, Y_n) un vecteur gaussien centré, alors l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X|Y_1, \dots, Y_n)$ est presque sûrement égale à la projection orthogonale dans $\mathcal{L}^2(\mathbf{P})$ de X sur l'espace vectoriel engendré par $\{Y_1, \dots, Y_n\}$.*

La preuve de cette proposition repose que le fait que, pour un vecteur gaussien, l'indépendance équivaut à la nullité des covariances (et ici à la nullité de l'espérance du produit, puisque les variables aléatoires sont centrées). Il est alors aisé de vérifier que si Z est le projeté de X sur l'espace vectoriel engendré par les (Y_i) , Z s'écrit comme combinaison linéaire des (Y_i) avec comme contrainte : pour tout j , $\mathbf{E}((X - Z)Y_j) = 0$. Autrement dit, $X - Z$ est indépendant des (Y_j) , et on peut ainsi écrire X comme la somme d'une variable aléatoire indépendante des (Y_j) et d'une variable aléatoire mesurable par rapport aux (Y_j) .

Remarque : Vérifier que, sans aucune hypothèse de normalité, si $Z = \mathbf{E}(X|Y)$ alors $\mathbf{E}((X - Z)Y) = 0$, c'est-à-dire que $X - Z$ est orthogonal à Y .

En pratique, pour calculer l'espérance conditionnelle d'une variable gaussienne centrée X , on écrit $Z = \mathbf{E}(X|Y_1, \dots, Y_n)$ sous la forme d'une combinaison linéaire des (Y_i) , dont les coefficients sont déterminés les conditions d'orthogonalité :

$$Z = \sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i$$

$$\forall j, \mathbf{E}((X - Z)Y_j) = 0.$$

Les valeurs des espérances $\mathbf{E}(XY_i)$ et $\mathbf{E}(Y_i Y_j)$ sont fournies par les termes de la matrice de covariance, puisque les variables aléatoires sont centrées.

Remarque : Si le vecteur n'est pas centré, on commence par le centrer en posant : $X^0 = X - \mathbf{E}(X)$ et $Y_i^0 = Y_i - \mathbf{E}(Y_i)$. Si le vecteur (X, Y_1, \dots, Y_n) est gaussien, le vecteur $(X^0, Y_1^0, \dots, Y_n^0)$ l'est aussi et la matrice de covariance est conservée. De plus, $\mathbf{E}(X|Y_1, \dots, Y_n) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X^0|Y_1^0, \dots, Y_n^0)$.

On peut également parler de conditionnement d'un vecteur par rapport à une tribu \mathcal{F} : dans ce cas on a simplement $\mathbf{E}((X_1, \dots, X_m)|\mathcal{F}) = (\mathbf{E}(X_1|\mathcal{F}), \dots, \mathbf{E}(X_m|\mathcal{F}))$.

Définition 3.7 *La loi conditionnelle de (X_1, \dots, X_m) sachant l'événement $\{(Y_1, \dots, Y_n) = (y_1, \dots, y_n)\}$ est la famille de mesures de probabilité μ_{y_1, \dots, y_n} sur \mathbb{R}^m telles que, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ et tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*

$$\mathbf{P}((X_1, \dots, X_m) \in A, (Y_1, \dots, Y_n) \in B) = \int_B \mu_{y_1, \dots, y_n}(A) d(Y_1, \dots, Y_n)(\mathbf{P}).$$

Proposition 3.8 *Soit $(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)$ un vecteur gaussien. On suppose que, pour tout i entre 1 et m ,*

$$\mathbf{E}(X_i|Y_1, \dots, Y_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} Y_j + \beta_i.$$

La loi conditionnelle de (X_1, \dots, X_m) sachant $(Y_1, \dots, Y_n) = (y_1, \dots, y_n)$ coïncide alors avec la loi du vecteur gaussien dont la i -ème composante est

$$X_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} Y_j + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j.$$

Exercice : Lorsque le vecteur $(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)$, non nécessairement gaussien, admet une densité que l'on notera $f_{\bar{X}, \bar{Y}}$ sur \mathbb{R}^{m+n} , vérifiez que la loi conditionnelle de \bar{X} sachant $(Y_1, \dots, Y_n) = (y_1, \dots, y_n)$ admet pour densité

$$(x_1, \dots, x_m) \rightarrow \frac{f_{\bar{X}, \bar{Y}}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)}{f_{\bar{Y}}(y_1, \dots, y_n)},$$

où $f_{\bar{Y}}$ est la densité de \bar{Y} . Vérifiez (en commençant par la cas $n = m = 1$) que, lorsque (\bar{X}, \bar{Y}) est gaussien centré, la loi obtenue dans la proposition 3.8 est bien la loi conditionnelle cherchée.

1.3 Convergence des séries gaussiennes

Proposition 3.9 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées et de loi de Gauss. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\sum X_n$ converge p.s.
2. $\sum X_n$ converge en probabilité.
3. $\sum X_n$ converge dans \mathcal{L}^2 .
4. $\sum X_n$ converge en loi.

La proposition précédente intervient en particulier dans la construction du mouvement brownien.

Remarque : Les implications $1 \Rightarrow 2$, $3 \Rightarrow 2$ et $1 \Rightarrow 4$ sont toujours vérifiées (indépendamment du caractère gaussien de la suite).

2 Mouvement brownien

2.1 Introduction

Rappelons que $[x]$ désigne la partie entière d'un nombre réel x (ou plus grand nombre entier inférieur ou égal à x).

Considérons une suite $(X_i)_i$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi donnée par $\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = 1/2$. Remarquons que les X_i sont centrées et de variance 1 et notons $S_0 = 0$ et $S_n = S_{n-1} + X_n$, la suite des sommes partielles. Il est bien connu que S_n/n tend presque sûrement vers 0 (cela découle de la loi forte des grands nombres) et que S_n/\sqrt{n} tend en loi vers une loi de Gauss centrée et de variance 1 (c'est le théorème central limite). Toujours avec le théorème central limite, on peut voir que pour tout $t > 0$, $S_{[nt]}/\sqrt{n}$ tend en loi vers une loi de Gauss centrée et de variance t . En utilisant une généralisation du théorème central limite, on peut également vérifier que si $0 < t_1 < \dots < t_k$ sont des instants fixés, le vecteur $(S_{[nt_1]}/\sqrt{n}, \dots, S_{[nt_k]}/\sqrt{n})$ tend en loi, lorsque $n \rightarrow \infty$, vers un vecteur gaussien (V_1, \dots, V_k) centré dont les covariances sont $\mathbf{cov}(V_j, V_k) = \min(t_j, t_k)$.

Théorème 3.10 (Donsker) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de carrés intégrables, centrées, indépendantes et identiquement distribuées et S_n la suite de ses sommes partielles. On note $\sigma^2 = \mathbf{var}(X_n)$. Alors, pour tout entier $k \geq 1$ et tous réels $0 < t_1 < \dots < t_k$, le vecteur $(S_{[nt_1]}/\sqrt{n}, \dots, S_{[nt_k]}/\sqrt{n})$ tend en loi vers un vecteur gaussien centré (V_1, \dots, V_k) de covariances $\mathbf{cov}(V_j, V_k) = \sigma^2 \min(t_j, t_k)$.

Définition 3.11 Le mouvement brownien réel standard (ou mouvement brownien tout court) est un processus $(B_t)_{t \geq 0}$ tel que

1. $B_0 = 0$ (ou éventuellement $B_0 = x$ fixé)
2. Pour tous réels positifs t et s , $B_t - B_s$ suit une loi de Gauss centrée et de variance $|t - s|$.
3. Pour tous $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, les variables aléatoires $B_{t_1} - B_{t_0}$, $B_{t_2} - B_{t_1}$, \dots , $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

Remarque : Cette définition implique que le mouvement brownien est un processus gaussien.

On notera de façon indifférenciée B_t , $B_t(\omega)$, $B(t)$, $B(t, \omega)$.

Définition 3.12

- Lorsqu'un processus vérifie le point 2 ci-dessus, on dit qu'il est à accroissements indépendants.
- Si (X_t) est un processus tel que, pour tous $t \geq s$, la loi de $X_t - X_s$ est la même que celle de $X_{t-s} - X_0$, on dit qu'il est stationnaire.

2.2 Propriétés

Proposition 3.13 (B_t) est un mouvement brownien si et seulement si c'est un processus gaussien centré de covariance $\mathbf{cov}(B_t, B_s) = \min(t, s)$.

Preuve : en exercice.

Proposition 3.14 (scaling) Soit (B_t) un mouvement brownien réel standard et $c > 0$ un réel. On pose $X_t = cB_{t/c^2}$. Alors $(X_t)_t$ est un mouvement brownien réel standard.

Preuve : le processus (X_t) est évidemment gaussien et il suffit de calculer les covariances pour montrer que c'est un mouvement brownien.

Proposition 3.15 (inversion temporelle) Soit (B_t) un mouvement brownien réel standard. On pose pour tout $t > 0$, $Z_t = tB_{1/t}$. Alors (Z_t) est un mouvement brownien réel standard.

Preuve : Le processus (Z_t) est gaussien, et comme ci-dessus, il suffit de calculer les covariances.

Proposition 3.16 1. Un mouvement brownien (B_t) est un processus presque sûrement continu, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble négligeable N tel que, pour tout $\omega \notin N$, la trajectoire $t \rightarrow B_t(\omega)$ est continue.

2. Les trajectoires du mouvement brownien sont nulle part dérivables : il existe un ensemble négligeable N' tel que, pour tout $\omega \notin N'$, la fonction $t \rightarrow B_t(\omega)$ est nulle part dérivable.

2.3 Martingale et temps d'arrêt

Proposition 3.17 *Le mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ est une martingale continue, par rapport à la filtration (\mathcal{F}_t) continue à droite et complétée par les négligeables définie par*

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\{B_s, s \leq t + \varepsilon\}}.$$

Preuve : Il est clair que les (\mathcal{F}_t) forment une filtration complète et continue à droite, et que B_t est \mathcal{F}_t -mesurable. Il faut donc montrer que, pour tous $t \geq s \geq 0$, $\mathbf{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s$.

Écrivons $B_t = B_s + (B_t - B_s)$ et notons, pour tout $u \geq 0$, $Z_u = B_{s+u} - B_s$. Le processus $(Z_u)_{u \geq 0}$ est un processus gaussien centré, et la famille formée par les $(B_r)_{r \geq 0}$ et les $(Z_u)_{u \geq 0}$ est gaussienne. Les covariances $\mathbf{cov}(B_r, Z_u)$ sont faciles à calculer et sont toutes nulles pour $r \in [0, s]$ et $u \geq 0$, ce qui prouve que $(Z_u)_{u \geq 0}$ est indépendant de la tribu \mathcal{F}_s . On a donc

$$\mathbf{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(B_s | \mathcal{F}_s) + \mathbf{E}(Z_{t-s} | \mathcal{F}_s) = B_s.$$

Proposition 3.18 *La variation quadratique de $(B_t)_{t \geq 0}$ est égale à t .*

Preuve : Pour prouver cela, il faut montrer que $(M_t) = (B_t^2 - t)$ est une martingale. Calculons donc $\mathbf{E}(B_t^2 - t | \mathcal{F}_s)$, pour $t \geq s \geq 0$, en utilisant les mêmes notations que ci-dessus.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(B_t^2 - t | \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}(((B_t - B_s) + B_s)^2 | \mathcal{F}_s) - t \\ &= \mathbf{E}(Z_{t-s}^2 | \mathcal{F}_s) + (B_s^2 | \mathcal{F}_s) + 2\mathbf{E}(B_s Z_{t-s} | \mathcal{F}_s) - t \end{aligned}$$

On a vu ci-dessus que le processus $(Z_u)_u$ est indépendant de la tribu \mathcal{F}_s donc

$$\mathbf{E}(Z_{t-s}^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(Z_{t-s}^2).$$

Par définition du mouvement brownien, $Z_{t-s} = B_t - B_s$ suit une loi de Gauss centrée et de variance $t - s$. On a donc

$$\mathbf{E}(Z_{t-s}^2) = t - s.$$

De plus, B_s est une variable aléatoire \mathcal{F}_s -mesurable donc

$$\mathbf{E}(B_s Z_{t-s} | \mathcal{F}_s) = B_s \mathbf{E}(Z_{t-s} | \mathcal{F}_s),$$

et en utilisant à nouveau l'indépendance de Z_{t-s} et de \mathcal{F}_s , il vient

$$\mathbf{E}(Z_{t-s} | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(Z_{t-s}) = \mathbf{E}(B_t) - \mathbf{E}(B_s) = 0.$$

Finalement, on a bien

$$\mathbf{E}(B_t^2 - t | \mathcal{F}_s) = B_s^2 - s.$$

Il n'est pas très compliqué de vérifier que le processus $(Z_u)_{u \geq 0}$ qui apparaît ci-dessus est un mouvement brownien indépendant de \mathcal{F}_s : la preuve est essentiellement basée sur le caractère gaussien de ce processus et sur le calcul des covariances nécessaires (voir la preuve de la proposition 3.17). Ce résultat s'appelle la propriété de Markov faible. Elle est encore vraie lorsque l'instant s est remplacé par un temps d'arrêt. Elle ne l'est évidemment plus si on remplace s par une variable aléatoire quelconque. Avant d'énoncer ces deux propriétés, quelques notations :

- On écrira $\mathbf{E}_x(f(B_t))$ ou $\mathbf{P}_x(B_t \in A)$ pour signifier que le mouvement brownien $(B_t)_t$ est issu de x ; autrement dit,

$$\mathbf{E}_x(f(B_t)) = \mathbf{E}_0(f(B_t + x)) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_x(B_t \in A) = \mathbf{P}_0(x + B_t \in A).$$

Par exemple, $\mathbf{E}_x(B_t) = x$ et $\mathbf{E}_x(B_t^2) = \mathbf{E}_0((x + B_t)^2) = x^2 + t$.

- Les expressions $\mathbf{E}_{B_s}(f(B_t))$ ou $\mathbf{P}_{B_s}(B_t \in A)$ signifient que l'on calcule les expressions comme ci-dessus, et que l'on remplace **à la fin** x par B_s . Autrement dit, on se donne un mouvement brownien $(\widetilde{B}_u)_{u \geq 0}$ indépendant de B_s (et de son passé) et on intègre uniquement par rapport à l'aléatoire de $(\widetilde{B}_u)_{u \geq 0}$, et pas par rapport à l'aléatoire de B_s . Par exemple, $\mathbf{E}_{B_s}(B_t) = B_s$ et $\mathbf{E}_{B_s}(B_t^2) = B_s^2 + t$.
- Pour finir, si μ est une mesure de probabilité, on définit \mathbf{E}_μ (et similairement \mathbf{P}_μ) de la façon suivante :

$$\mathbf{E}_\mu(f(B_t)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}_x(f(B_t)) \, d\mu(x).$$

On peut utiliser ces mêmes notations pour étudier la trajectoire du mouvement brownien issu d'un point x (ou la trajectoire postérieure à l'instant s), et pas seulement des caractères de B_t . C'est le cas par exemple lorsque l'on étudie le premier temps d'atteinte d'une barrière λ après l'instant s .

Proposition 3.19 (Propriétés de Markov)

1. **Markov faible.** Soit $s \geq 0$ fixé. Alors le processus $(B_{s+u} - B_s)_{u \geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $(B_v)_{0 \leq v \leq s}$, et donc de la tribu \mathcal{F}_s . Plus concrètement, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée,

$$\mathbf{E}_x(f(B_{s+u}) | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}_{B_s}(f(B_u))$$

et pour toute fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée,

$$\mathbf{E}_x(g(B_{s+u} - B_s, B_s) | \mathcal{F}_s) = \int_{\mathbb{R}} g(x, B_s) e^{-x^2/(2u)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi u}}.$$

2. **Markov fort.** Soit τ un temps d'arrêt presque sûrement fini. Alors le processus $(B_{\tau+u} - B_\tau)_{u \geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de la tribu \mathcal{F}_τ . Plus concrètement, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée,

$$\mathbf{E}_x(f(B_{\tau+u}) | \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}_{B_\tau}(f(B_u))$$

et pour toute fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée,

$$\mathbf{E}_x(g(B_{\tau+u} - B_\tau, B_\tau) | \mathcal{F}_\tau) = \int_{\mathbb{R}} g(x, B_\tau) e^{-x^2/(2u)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi u}}.$$

Chapitre 4

Intégrale stochastique, formule de Itô

Le but est ici, pour certains processus H et une martingale continue M , de donner un sens à l'expression

$$\int_0^t H_s dB_s$$

ou

$$\int_0^t H_s dM_s.$$

Les intégrales de ce type sont appelées “intégrales stochastiques”, c'est-à-dire, intégrales par rapport à des processus stochastiques. Le problème essentiel est que ni le mouvement brownien, ni les martingales continues ne sont des processus à variation bornée (c'est-à-dire qu'on ne peut pas les écrire comme la somme de deux processus monotones càd-làg et adaptés). Ces intégrales ne peuvent donc pas se définir au sens classique de l'intégrale de Lebesgue-Stieljes.

Rappels :

1. Si f est une fonction continue et dérivable, on n'a pas nécessairement

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s) ds.$$

- Il suffit pour que cette égalité soit vérifiée que f' soit Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Si f' est intégrable sur \mathbb{R} , on définit une mesure (signée) en posant $\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(s) f'(s) ds$.
2. Si la fonction f est croissante (même non dérivable) et minorée, f induit une mesure sur les boréliens en posant, $\mu([a, b]) = f(b) - f(a)$. Cette mesure est une mesure positive, finie sur tout borélien borné.
 3. Les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas des fonctions dérivables. Elles ne sont pas non plus à variation bornée, ce qui implique que

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathbf{1}_A(s) dB_s$$

ne définit pas une mesure au sens habituel du terme.

Néanmoins, il est possible de définir une intégrale par rapport au mouvement brownien ou par rapport à une martingale continue, mais dans $\mathcal{L}^2(\mathbf{P})$. Nous verrons que l'on construit ainsi un processus continu, qui est une martingale.

Notation : Pour tout couple de réels x et y , on note $x \wedge y = \min(x, y)$.

1 Comment construire une intégrale

Rappelons comment on construit une intégrale par rapport à une mesure positive. Soit donc μ une mesure positive sur un espace E muni d'une tribu \mathcal{A} .

La construction de l'intégrale au sens de Lebesgue part de l'intégrale des fonctions indicatrices : on pose, pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\int_E \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A).$$

Ensuite, on construit l'intégrale d'une fonction étagée positive f : si f s'écrit

$$f = \sum_{k \leq n} a_k \mathbf{1}_{A_k},$$

où $a_k \in \mathbb{R}^+$ et $A_k \in \mathcal{A}$, on pose

$$\int_E \sum_{k \leq n} a_k \mathbf{1}_{A_k} d\mu = \sum_{k \leq n} a_k \mu(A_k).$$

On doit pouvoir vérifier au passage que si une fonction étagée s'écrit comme deux combinaisons linéaires différentes d'indicatrices, la définition ci-dessus donne bien le même résultat numérique : le fait que la mesure soit positive intervient ici. En effet, si la mesure n'est pas positive, il peut arriver qu'un borélien de mesure finie soit la réunion de deux boréliens de mesure infinie (l'un $+\infty$, l'autre $-\infty$), et il n'y a alors pas une bonne détermination de la mesure.

Puis, on montre que toute fonction mesurable positive f est la limite croissante d'une suite f_n de fonctions étagées positives et on pose

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Le point à vérifier est que la limite ci-dessus ne dépend pas de la suite de fonctions étagées (qui tend en croissant vers f). A nouveau, ce point marche mal si la mesure n'est pas positive.

Pour terminer, si f est une fonction mesurable (pas nécessairement positive), on pose $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$, de sorte que $f = f^+ - f^-$; si on a

$$\int f^+ d\mu < \infty \text{ et } \int f^- d\mu < \infty,$$

on dit que f est μ -intégrable et on pose

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Remarque importante : Si F est une fonction croissante et continue à droite, on peut définir une mesure μ positive en posant, pour tout intervalle $[a, b[$, $\mu([a, b[) = F(b^-) - F(a)$. On pourra donc donner un sens à une intégrale du type $\int f dF$ pour toute fonction f positive (puis intégrable par rapport à dF). Ce sera encore le cas si F s'écrit comme la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante. De telles fonctions sont dites **à variation bornée**.

2 Intégration par rapport au mouvement brownien

L'intégrale stochastique se définit pour les processus H qui sont \mathcal{F} -adaptés (cf définition 2.12), où \mathcal{F}_t est la filtration continue à droite associée au mouvement brownien. Si on veut définir une fonctionnelle

$$H \cdot \rightarrow \int_0^t H_s dB_s$$

qui ressemble à une intégrale, l'une des propriétés "inévitables" est la suivante : si H est de la forme

$$H_s(\omega) = K(\omega)\mathbf{1}_{[a,b[}(s),$$

où a et b sont des constantes fixées et K une variable aléatoire, on doit avoir

$$\int_0^t H_s dB_s = K(B_{t \wedge b} - B_{t \wedge a}).$$

On remarque facilement que H est adapté si et seulement si K est \mathcal{F}_a -mesurable.

Suivant le même raisonnement, la fonctionnelle "intégration stochastique" doit être additive, c'est-à-dire que si H est de la forme

$$H_s(\omega) = \sum_{i=1}^n K_i(\omega)\mathbf{1}_{[a_i, b_i[}(s) \quad (4.1)$$

où les K_i sont \mathcal{F}_{a_i} -mesurables et où $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots$ sont des constantes, on doit avoir

$$\int_0^t H_s dB_s = \sum_{i=1}^n K_i(B_{t \wedge b_i} - B_{t \wedge a_i}).$$

Les processus de la forme (4.1) sont appelés des **processus simples**, et ils engendrent les processus \mathcal{F} -adaptés. Il nous reste donc à voir que la limite au sens \mathcal{L}^2 existe, moyennant une condition d'intégrabilité sur H , pour terminer la construction de l'intégrale stochastique. Les processus simples jouent pour l'intégrale stochastique le même rôle que les fonctions étagées pour l'intégrale par rapport à une mesure positive.

Commençons par fixer un processus simple $H_s(\omega) = \sum_i K_i(\omega)\mathbf{1}_{[a_i, b_i[}(s)$ vérifiant

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\infty H_s^2 ds \right) < \infty$$

et calculons $\mathbf{E}(\int_0^\infty H_s dB_s)^2$.

En utilisant l'expression de l'intégrale stochastique d'un processus simple, on obtient :

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\infty H_s dB_s \right)^2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(K_i^2(B_{b_i} - B_{a_i})^2) + 2 \sum_{j < i} \mathbf{E}(K_i K_j (B_{b_i} - B_{a_i})(B_{b_j} - B_{a_j})).$$

Or, en conditionnant par rapport à \mathcal{F}_{a_i} , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(K_i^2(B_{b_i} - B_{a_i})^2) &= \mathbf{E} \left(K_i^2 \mathbf{E}((B_{b_i} - B_{a_i})^2 | \mathcal{F}_{a_i}) \right) \\ &= \mathbf{E}(K_i^2(b_i - a_i)) \\ &= \mathbf{E} \left(\int_0^\infty K_i^2 \mathbf{1}_{[a_i, b_i[}(s) ds \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[K_i K_j (B_{b_i} - B_{a_i})(B_{b_j} - B_{a_j})] &= \mathbf{E} [K_i K_j (B_{b_j} - B_{a_j}) \mathbf{E}((B_{b_i} - B_{a_i}) | \mathcal{F}_{a_i})] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient la proposition suivante :

Proposition 4.1 *Pour tout processus simple H vérifiant $\mathbf{E}(\int_0^\infty H_s^2 ds) < \infty$,*

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\infty H_s dB_s \right)^2 = \mathbf{E} \left(\int_0^\infty H_s^2 ds \right).$$

On obtient donc une isométrie entre l'espace \mathcal{H} des processus H , \mathcal{F}_t -adaptés, muni de la norme

$$\|H\|_{\mathcal{H}} = \left(\mathbf{E} \int_0^\infty H_s^2 ds \right)^{1/2}$$

et l'espace des variables aléatoires de la forme $\int_0^\infty H_s dB_s$ muni de la norme $\|X\|_2 = \sqrt{\mathbf{E}(X^2)}$. Cela suffit pour prouver l'existence de l'intégrale stochastique d'un processus H , \mathcal{F} -adapté et vérifiant

$$(*) \quad \mathbf{E} \left(\int_0^\infty H_s^2 ds \right) < \infty,$$

comme limite dans $\mathcal{L}^2(\mathbf{P})$ de l'intégrale stochastique de processus simples qui tendent vers H au sens de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. La limite existe et ne dépend pas de la suite de processus simples choisis, en vertu de la complétude de $\mathcal{L}^2(\mathbf{P})$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème fondamental de ce paragraphe :

Théorème 4.2 *Soit H un processus \mathcal{F}_t -adapté vérifiant $\int_0^{+\infty} \mathbf{E}(H_s^2) ds < \infty$. On définit un processus N en posant pour tout $t \geq 0$:*

$$N_t = \int_0^t H_s dB_s = \int_{\mathbb{R}^+} H_s \mathbf{1}_{[0,t[}(s) dB_s.$$

N_t est une martingale continue dans $\mathcal{L}^2(\mathbf{P})$, de variation quadratique donnée par

$$\langle N \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds.$$

Preuve : Il est clair que N est bien défini puisque pour tout t fixé, $\mathbf{E} \left(\int_0^t H_s^2 ds \right)$ est finie. De plus, la relation de Challes est vérifiée, c'est-à-dire que pour tous réels $t > u \geq 0$, on a bien

$$N_t - N_u = \int_u^t H_s dB_s.$$

Pour tout $t > u$, on a

$$\mathbf{E}((N_t - N_u)^2) = \mathbf{E} \left(\int_u^t H_s^2 ds \right),$$

et cette quantité tend vers 0 lorsque t tend vers u . De même si t tend vers u par valeurs inférieures, ce qui prouve la continuité dans $\mathcal{L}^2(\mathbf{P})$.

Si H est un processus simple, on vérifie que N est une martingale continue, de variation quadratique

$$\langle N \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds.$$

En effet, écrivons H sous la forme $H_t = \sum K_i \mathbf{1}_{[a_i, b_i[}(t)$, où $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots$ et où les K_i sont \mathcal{F}_{a_i} -mesurables. On a, en notant $i(t) = \max\{i, a_i \leq t\}$,

$$N_t = \sum_{i \leq i(t)} K_i (B_{b_i \wedge t} - B_{a_i}).$$

La continuité de N_t est évidente, ainsi que le fait que N_t est \mathcal{F}_t -mesurable. Puis, pour tout i vérifiant $a_i \geq s$, et pour tout $u \geq a_i$, on obtient en utilisant le fait que le mouvement brownien est une martingale :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(K_i(B_u - B_{a_i}) | \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(K_i(B_u - B_{a_i}) | \mathcal{F}_{a_i}) | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbf{E}(K_i(\mathbf{E}(B_u | \mathcal{F}_{a_i}) - B_{a_i}) | \mathcal{F}_s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit ainsi que (N_t) est une martingale.

En ce qui concerne sa variation quadratique, on procède de façon similaire : on note

$$V_t = \sum_{i \leq i(t)} K_i^2 ((b_i \wedge t) - a_i).$$

On a

$$N_t^2 - V_t = \sum_{i \leq i(t)} K_i^2 ((B_{b_i \wedge t} - B_{a_i})^2 - (b_i \wedge t) + a_i) + 2 \sum_{i < j \leq i(t)} K_i K_j (B_{b_i \wedge t} - B_{a_i})(B_{b_j \wedge t} - B_{a_j}).$$

En utilisant le fait que $(B_t^2 - t)$ est une martingale, les conditions de mesurabilités vérifiées par les K_i et en conditionnant comme ci-dessus, on démontre alors facilement que $(N_t^2 - V_t)$ est également une martingale.

On passe alors à la limite pour obtenir ces mêmes résultats pour les processus H adaptés.

Nous allons maintenant définir l'intégrale stochastique par rapport à une martingale continue et de carré intégrable. Nous montrerons notamment que le processus obtenu est une martingale continue.

3 Intégrale stochastique par rapport à une martingale continue

On se donne une \mathcal{F}_t -martingale continue (M_t) , de carré intégrable et on suppose que le suprémum pour $t \geq 0$ de $\mathbf{E}M_t^2$ est fini.

Nous allons voir que, si H est un processus adapté vérifiant

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M \rangle_s \right) < \infty,$$

il est possible de définir l'intégrale stochastique de H par rapport à M .

Remarques : importantes

1. La variation quadratique $(\langle M \rangle_t)$ d'une martingale continue M est un processus continu et croissant. La fonction $t \rightarrow \langle M \rangle_t$ est alors la fonction de répartition d'une mesure positive, portée par \mathbb{R}^+ , ce qui définit de façon non ambiguë l'intégration par rapport à $\langle M \rangle_t$.
2. La condition sur le suprémum de $\mathbf{E}M_t^2$ n'est pas restrictive car, en général, on s'intéressera à $\int_0^t H_s dM_s$, et la condition devient alors $\sup\{\mathbf{E}M_s^2; s \leq t\} < \infty$ ou, plus simplement, pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{E}(M_t^2) < \infty$.

Commençons tout d'abord, comme dans le premier paragraphe, par étudier l'intégrale stochastique d'un processus simple. Soit $a \geq 0$ fixé, et K une v.a. bornée \mathcal{F}_a -mesurable et $H(s) = K\mathbf{1}_{[a,b[}(s)$. On définit naturellement

$$N_t = \int_0^t H_s dM_s = K(M_{t \wedge b} - M_{t \wedge a}).$$

Nous allons calculer, comme dans le cas du mouvement brownien, et toujours pour un processus simple, $\mathbf{E}(N_t^2)$. On a le lemme suivant :

Lemme 4.3 (i) $(N_t)_{t \geq 0}$ est une martingale continue,
(ii) $\mathbf{E}N_\infty^2 = \mathbf{E}(K^2(\langle M \rangle_b - \langle M \rangle_a))$

$$(iii) \quad \langle N \rangle_t = \int_0^t K^2 \mathbf{1}_{[a,b[}(s) d\langle M \rangle_s.$$

Preuve : du lemme 4.3(i). La continuité et l'intégrabilité de N_t sont évidentes. Pour montrer que $(N_t)_{t \geq 0}$ est une martingale, fixons $s < t$ et montrons que $\mathbf{E}(N_t | \mathcal{F}_s) = N_s$. Il y a six cas à faire suivant les valeurs respectives de s et t par rapport à a et b .

Par exemple, si $s \leq a \leq t \leq b$, on a $N_t = K(M_t - M_a)$, d'où, en conditionnant par rapport à \mathcal{F}_a , $\mathbf{E}(N_t | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(K\mathbf{E}(M_t - M_a | \mathcal{F}_a) | \mathcal{F}_s) = 0 = N_s$. Les autres cas sont similaires.

(ii). Pour tout $t \geq b$, N_t est égal à $K(M_b - M_a)$. On a donc

$$\mathbf{E}(N_\infty^2) = \mathbf{E}(K^2(M_b - M_a)^2) = \mathbf{E}(K^2\mathbf{E}(M_b^2 + M_a^2 - 2M_bM_a | \mathcal{F}_a)).$$

En utilisant le fait que $M^2 - \langle M \rangle$ est une martingale, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M_b^2 + M_a^2 - 2M_bM_a | \mathcal{F}_a) &= \mathbf{E}(M_b^2 - \langle M \rangle_b | \mathcal{F}_a) + \mathbf{E}(\langle M \rangle_b | \mathcal{F}_a) + M_a^2 - 2M_a\mathbf{E}(M_b | \mathcal{F}_a) \\ &= M_a^2 - \langle M \rangle_a + \mathbf{E}(\langle M \rangle_b | \mathcal{F}_a) - M_a^2 \\ &= \mathbf{E}(\langle M \rangle_b - \langle M \rangle_a | \mathcal{F}_a). \end{aligned}$$

On conclut que $\mathbf{E}(N_\infty^2) = \mathbf{E}(K^2(\langle M \rangle_b - \langle M \rangle_a))$.

(iii). La dernière assertion consiste à vérifier que $N_t^2 - \int_0^t K^2 \mathbf{1}_{[a,b[}(s) d\langle M \rangle_s$ est une martingale, ce qui se fait en distinguant les positions relatives de t , s , a et b .

Le lemme suivant permet de justifier que si on considère une suite de processus simples qui vérifie le critère de Cauchy (pour une certaine norme), la suite des intégrales stochastiques est également de Cauchy :

Lemme 4.4 *Si H^n est une suite de processus simples tels que*

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\int_0^\infty (H_s^n - H_s^m)^2 d\langle M \rangle_s \right) = 0$$

alors

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathbf{E} \sup_{s < \infty} (N_s^m - N_s^n)^2 = 0.$$

Preuve : du lemme 4.4. Soit $H = \sum K_i \mathbf{1}_{[a_i, b_i[}$ un processus simple. On définit $N_t = \int_0^t H_s dM_s$ par linéarité. D'après le lemme 4.3, N_t est une somme de martingales de carré intégrable, donc une martingale de carré intégrable. On peut lui appliquer l'inégalité de Doob et on obtient :

$$\mathbf{E} \left(\sup_{s \geq 0} N_s^2 \right) \leq c \mathbf{E}(N_\infty^2),$$

où c est une constante positive. Un calcul simple montre que

$$\mathbf{E}(N_\infty^2) = \sum \mathbf{E} (K_i^2 (\langle M \rangle_{b_i} - \langle M \rangle_{a_i})) = \mathbf{E} \left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M \rangle_s \right).$$

Si on applique ce résultat au processus simple $H^n - H^m$, l'intégrale stochastique obtenue est $N^n - N^m$ et on obtient le résultat souhaité.

Il nous reste maintenant à passer à la limite pour définir l'intégrale stochastique d'un processus adapté H .

Théorème 4.5 *Soit H un processus adapté vérifiant*

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M \rangle_s \right) < \infty$$

et H^n une suite de processus simples vérifiant

$$\lim_n \mathbf{E} \left(\int_0^\infty (H_s^n - H_s)^2 d\langle M \rangle_s \right) = 0.$$

Alors N_s^n converge uniformément pour $s \geq 0$ dans \mathcal{L}^2 vers une limite notée N_s . Le processus N_s est une martingale continue et ne dépend pas de la suite H_n . On a

$$\langle N \rangle_t = \int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s \text{ p.s..}$$

Preuve : D'après le lemme 4.4, N_s^n est une suite de Cauchy pour la norme \mathcal{L}^2 du suprémum, elle converge donc dans \mathcal{L}^2 et on peut extraire une sous-suite qui converge presque-sûrement uniformément pour $s \geq 0$. Les martingales N_s^n étant continues, on en déduit alors que N_s est continu sur \mathbb{R}^+ .

Fixons $s \leq t$ et étudions $\mathbf{E}((\mathbf{E}N_t^n | \mathcal{F}_s - \mathbf{E}N_t | \mathcal{F}_s)^2)$. On a

$$\mathbf{E}((\mathbf{E}N_t^n | \mathcal{F}_s - \mathbf{E}N_t | \mathcal{F}_s)^2) \leq \mathbf{E}(\mathbf{E}(N_t^n - N_t)^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(N_t^n - N_t)^2.$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et le membre de droite est égal à $\mathbf{E}((N_s^n - \mathbf{E}N_t | \mathcal{F}_s)^2)$. On a donc, en passant à la limite : $\mathbf{E}(N_t | \mathcal{F}_s) = N_s$ p.s..

Il est trivial que la limite ne dépend pas de la suite de processus simples choisis, et la dernière assertion s'obtient par passage à la limite.

4 Généralisations

La construction de l'intégrale stochastique décrite dans les paragraphes précédents permet d'affirmer que, pour toute martingale (M_t) de carré intégrable et pour tout processus adapté (H_t) tels que, pour tout $t > 0$,

$$\mathbf{E} \left(\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s \right) < \infty$$

le processus (N_t) défini par

$$N_t = \int_0^t H_s dM_s$$

est un martingale de carré intégrable et de variation quadratique

$$\langle N_t \rangle = \int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_t.$$

Nous allons maintenant affaiblir les conditions portant sur les processus (M_t) et/ou (H_t) .

4.1 Processus adaptés quelconques

Le premier pas est de généraliser l'intégrale stochastique à des processus adaptés vérifiant

$$\int_0^\infty H_s^2 d\langle M \rangle_s < \infty \text{ p.s.}$$

mais pour lesquels la quantité ci-dessus n'est pas intégrable. Dans ce but, considérons les temps d'arrêt

$$T_k = \inf\{t > 0 : \int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s > k\},$$

et définissons

$$N_t = \int_0^t H_s dM_s = \int_0^t H_s dM_{s \wedge T_k} \text{ si } t \leq T_k.$$

Comme $d\langle M \rangle_{s \wedge T_k} = 0$ pour $s > T_k$, la martingale $M_{s \wedge T_k}$ et le processus H vérifient la condition d'intégrabilité nécessaire. Lorsque $k \rightarrow \infty$, $T_k \rightarrow \infty$: on définit ainsi $\int_0^t H_s dM_s$ pour tout t positif, et la définition obtenue est consistante.

Le processus (N_t) est alors une martingale locale, localement de carré intégrable.

4.2 Martingales locales ou de carré non intégrable

On se donne une martingale locale continue (M_t) , sans condition d'intégrabilité. On considère ici les temps d'arrêt $S_k = \inf\{t, |M_t| > k\}$ et on définit comme précédemment

$$\int_0^t H_s dM_s = \int_0^t H_s dM_{s \wedge S_k} \text{ si } t \leq S_k.$$

On obtient la même conclusion que dans le paragraphe précédent.

4.3 Intégration par rapport à des semi-martingales continues

Définition 4.6 Une semi-martingale $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de la forme $X_t = M_t + A_t$ où M est une martingale et A est un processus adapté à variation bornée, c'est-à-dire que A est la différence de deux processus monotones.

NB : Cette décomposition, appelée décomposition de Doob-Meyer, est unique pour une large classe de semi-martingales, pour peu que l'on impose $A_0 = 0$.

Considérons une semi-martingale continue $(X_t)_t = (M_t + A_t)_t$. $(A_s)_s$ étant à variation bornée, on peut définir "proprement" (au sens de Lebesgue–Stieljes) l'intégration par rapport à dA_s . On pose alors, pour tout processus adapté H tel que $\int H_s^2 d\langle M \rangle_s + \int_0^t |H_s| |dA_s| < \infty$,

$$\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s.$$

Remarque : La variation quadratique de X est, par définition, égale à celle de M . Prendre garde à ne pas confondre la partie à variation bornée de X et sa variation quadratique.

Une autre façon d'écrire une semi-martingale continue est d'écrire une équation du type

$$dX_s = dM_s + dA_s$$

ou

$$dX_s = f(B_s)dB_s + g(B_s)ds.$$

Une telle équation s'appelle une **équation différentielle stochastique** (ou EDS). Nous ne nous intéressons pas ici aux conditions d'existence des solutions d'une EDS.

5 Formule de Itô

5.1 Énoncé

La formule de Itô est une formule de changement de variable dans une intégrale stochastique.

Théorème 4.7 Soit (M_t) une martingale continue et f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . On a alors presque sûrement :

$$f(M_t) - f(M_0) = \int_0^t f'(M_s) dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(M_s) d\langle M \rangle_s$$

ou encore :

$$d(f(M_s)) = f'(M_s) dM_s + \frac{1}{2} f''(M_s) d\langle M \rangle_s$$

Un exemple important est le cas où M est le mouvement brownien réel issu d'un point $x \in \mathbb{R}$. On obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4.8 Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel issu d'un point $x \in \mathbb{R}$. On a, pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^2 ,

$$f(B_t) = f(x) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$$

ou encore :

$$d(f(B_s)) = f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} f''(B_s) ds.$$

Exemple : En prenant pour f la fonction $f(x) = x^2$, on obtient :

$$M_t^2 = M_0^2 + 2 \int_0^t M_s dM_s + \langle M \rangle_t.$$

Exercice : Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 et M_t la martingale définie par l'intégrale stochastique suivante :

$$M_t = \int_0^t H_s dB_s.$$

Écrivez la formule de Itô pour $f(M_t)$.

Dans un souci de concision, la preuve de la formule d'Itô, longue et très technique, n'est pas donnée dans ce poly.

5.2 La formule de Itô pour les semi-martingales

Rappelons que si X est une semi-martingale continue, $X = M + A$ où M est une martingale continue et A un processus continu à variation bornée, et $\langle X \rangle$ est par définition égal à $\langle M \rangle$.

Théorème 4.9 Soit X une semi-martingale continue et f une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On a

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s$$

ce qui s'écrit aussi :

$$d(f(X_s)) = f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} f''(X_s) d\langle X \rangle_s = f'(X_s) dM_s + f'(X_s) dA_s + \frac{1}{2} f''(X_s) d\langle M \rangle_s.$$

Attention : Ne pas oublier le terme de variation quadratique $d\langle X \rangle_s$, en particulier lorsque la semi-martingale est donnée sous la forme d'une équation différentielle stochastique !

Exercice : Soit g une fonction de classe \mathcal{C}^2 et convexe. Écrivez la formule de Itô pour $g(B_t)$, où B_t est un mouvement brownien, et déduisez-en la décomposition de Doob-Meyer de $g(B_t)$ (i.e., écrivez $g(B_t)$ sous la forme d'une martingale additionnée d'un processus à variation bornée). Écrivez les deux formules de Itô possibles pour $f(g(B_t))$, pour une fonction f de classe \mathcal{C}^2 .

5.3 La formule de Itô dans \mathbb{R}^d

Notation : Si M et N sont deux martingales de carré intégrable, on définit le « **crochet croisé** » de M et N par $\langle M, N \rangle_t = (\langle M + N \rangle_t - \langle M \rangle_t - \langle N \rangle_t)/2$. On vérifie alors que $(M_t N_t - \langle M, N \rangle_t)_t$ est une martingale.

Exercice : Calculez les crochets $\langle M, M \rangle$, et $\langle B_1, B_2 \rangle$ où B_1 et B_2 sont deux mouvements browniens indépendants.

Exercice : Vérifiez que si M et N sont deux martingales indépendantes et suffisamment intégrables, par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma\{M_s, N_s, s \leq t\}$, $(M_t N_t)$ est une martingale et en déduire que $\langle M, N \rangle_t = 0$ p.s.

Exercice : Soient $(M_t)_t$ et $(N_t)_t$ deux martingales continues par rapport à la même filtration et $(K_t)_t$ et $(H_t)_t$ deux processus adaptés. On note $X_t = \int_0^t H_s dM_s$ et $Y_t = \int_0^t K_s dN_s$. Montrez, en commençant par le cas où H et K sont des processus simples, que

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s.$$

Théorème 4.10

1. Soient f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^d et $M = (M^1, \dots, M^d)$ un d -uplet de semi-martingales continues. On a alors

$$f(M_t) - f(M_0) = \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_s) dM_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_s) d\langle M^i, M^j \rangle_s.$$

2. Soient f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^d et $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sur \mathbb{R}^d . On a alors

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t \nabla f(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(B_s) ds,$$

où

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d} \right), \\ \nabla f(B_s) dB_s &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_s) dB_s^i \\ \Delta f &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}. \end{aligned}$$

Exemple : Soient X et Y deux martingales continues. On a

$$X_t Y_t = \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t d\langle X, Y \rangle_s,$$

c'est-à-dire que $X_t Y_t - \langle X, Y \rangle_t$ est une martingale.

Exercice :

1. Montrez directement puis en utilisant la formule de Itô que $(\exp(\lambda B_t - \lambda^2 t/2))_t$ est une martingale, pour tout réel λ fixé.
2. Soit $T_a = \inf\{t, B_t = a\}$. Déduisez de 1) et du théorème d'arrêt de Doob que $\mathbf{E}_0 \exp(-\alpha T_a) = \exp(-a\sqrt{2\alpha})$.

5.4 Formule de Black et Scholes

La formule de Black et Scholes est une application de la formule d'Itô aux marchés financiers. On étudie un marché financier avec :

- Un actif sans risque dont le prix $X(t)$ vérifie $dX(t) = r X(t) dt$, et $X(0) = X_0$ où X_0 et r sont des constantes.

- Un actif risqué dont le prix ($S(t)$) vérifie $dS(t) = S(t)(b dt + \sigma dB_t)$ et $S(0) = S_0$, où S_0 , b et σ sont des constantes et (B_t) est un mouvement brownien standard. On peut vérifier (avec la formule de Itô en ce qui concerne (S_t)) que l'on a :

$$X_t = X_0 e^{rt} \quad \text{et} \quad S_t = S_0 e^{\sigma B_t + (b - \sigma^2/2)t}.$$

Le processus (S_t) est un mouvement brownien géométrique.

Un portefeuille est un couple (α_t, β_t) de processus aléatoires adaptés à la filtration du mouvement brownien, représentant respectivement les unités d'actif risqué et d'actif sans risque détenus à l'instant t .

La valeur du portefeuille à l'instant t est

$$V_t = \alpha_t S_t + \beta_t X_t.$$

L'hypothèse d'autofinancement standard se traduit par :

$$(d\alpha_t)S_t + (d\beta_t)X_t = 0.$$

Elle signifie qu'on ne rajoute ni ne retire de l'argent du portefeuille. On la retrouve facilement en discrétisant le temps et en décomposant le mode d'établissement du portefeuille en deux temps : le prix des actifs évolue pendant un certain laps de temps (par exemple une journée), avec une composition constante du portefeuille. Le soir, alors que la bourse est fermée, le trader reconstitue son portefeuille avec des nouvelles valeurs $\alpha_{t+1}, \beta_{t+1}$, en conservant la valeur globale du portefeuille.

La formule d'Itô permet d'écrire

$$dV_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dX_t$$

ou encore, en remplaçant dX_t par $r(V_t - \alpha_t S_t) dt$:

$$dV_t = \alpha_t dS_t + r(V_t - \alpha_t S_t) dt.$$

Finalement, on a donc :

$$dV_t = rV_t dt + \alpha_t (dS_t - rS_t dt).$$

Prenons maintenant un acteur financier qui propose un produit basé sur (S_t) , arrivant à maturité en T , proposant alors un flux $h(S_T)$. Il cherche à couvrir son risque en composant un portefeuille comme-ci dessus. L'objectif recherché est donc de trouver une stratégie de portefeuille autofinçant pour laquelle le bilan perte/profit final (à l'instant T) soit nul. On cherche ainsi deux fonctions (et non processus!) v et α définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ telles que

$$dv(t, S_t) = v(t, S_t)r dt + \alpha(t, S_t)(dS_t - rS_t dt) \quad \text{et} \quad v(T, S_T) = h(S_T).$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 4.11 *Soit h une fonction continue, à croissance au plus linéaire, pour laquelle l'EDP suivant admet une solution régulière $v(t, x)$ sur $]0, T[\times]0, +\infty[$:*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v''_{xx}(t, x) + rxv'_x(t, x) + v'_t(t, x) - rv(t, x) = 0 \\ v(T, x) = h(x) \end{cases}$$

Le flux $h(S_T)$ est alors duplicable par un portefeuille dont la valeur à l'instant t est $v(t, S_t)$, et dont la composition est donnée par $\alpha_t = v'_x(t, S_t)$ et $\beta_t = (V_t - \alpha_t S_t)/X_t$.

5.5 Formule de Girsanov

Le but de la formule de Girsanov est, par un changement de mesure de probabilité, de transformer un processus en une martingale.

Avant tout, quelques notations : on se donne deux mesures de probabilité \mathbf{P} et \mathbf{Q} sur (Ω, Σ) , que l'on suppose équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe une densité « dans les deux sens ». On notera α la densité de \mathbf{Q} par rapport à \mathbf{P} : $d\mathbf{Q}(\omega) = \alpha(\omega) d\mathbf{P}(\omega)$ et α est Σ -mesurable. On se donne également une filtration continue à droite $(\mathcal{F}_t)_t$. On notera \mathbf{P}_t et \mathbf{Q}_t les mesures \mathbf{P} et \mathbf{Q} restreintes à \mathcal{F}_t et α_t l'espérance conditionnelle (sous \mathbf{P}) de α :

$$\alpha_t = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\alpha | \mathcal{F}_t).$$

Proposition 4.12

1. α_t est la densité de \mathbf{Q}_t par rapport à \mathbf{P}_t :

$$\alpha_t = \frac{d\mathbf{Q}_t}{d\mathbf{P}_t}.$$

2. Un processus (Y_t) est une martingale pour \mathbf{Q} si et seulement si $(\alpha_t Y_t)$ est une martingale par rapport à \mathbf{P} .

Preuve du point 1. Soit $A \in \mathcal{F}_t$. On a

$$\begin{aligned} \int \mathbf{1}_A \alpha_t d\mathbf{P}_t &= \int \mathbf{1}_A \alpha_t d\mathbf{P} \quad [\text{mesure restreinte}] \\ &= \int \mathbf{1}_A \alpha d\mathbf{P} \quad [\text{espérance conditionnelle}] \\ &= \int \mathbf{1}_A d\mathbf{Q} \quad [\text{densité}] \\ &= \int \mathbf{1}_A d\mathbf{Q}_t \quad [\text{mesure restreinte}] \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Preuve du point 2. Soit $(Y_t)_t$ une \mathbf{Q} -martingale. Fixons $A \in \mathcal{F}_s$, pour $s \leq t$. Il faut montrer que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{1}_A \alpha_t Y_t) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{1}_A \alpha_s Y_s).$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{1}_A \alpha_t Y_t) &= \int \mathbf{1}_A Y_t \alpha_t d\mathbf{P} \\
&= \int \mathbf{1}_A Y_t \alpha_t d\mathbf{P}_t \quad [\text{restriction}] \\
&= \int \mathbf{1}_A Y_t d\mathbf{Q}_t \quad [\text{densité}] \\
&= \int \mathbf{1}_A Y_t d\mathbf{Q} \quad [\text{restriction}] \\
&= \int \mathbf{1}_A Y_s d\mathbf{Q} \quad [Y \text{ est une } \mathbf{Q}\text{-martingale}] \\
&= \int \mathbf{1}_A Y_s d\mathbf{Q}_s \quad [\text{restriction}] \\
&= \int \mathbf{1}_A Y_s \alpha_s d\mathbf{P}_s \quad [\text{densité}] \\
&= \int \mathbf{1}_A Y_s \alpha_s d\mathbf{P} \quad [\text{restriction}]
\end{aligned}$$

Théorème 4.13 (Formule de Girsanov) Soit $(X_t)_t$ une \mathbf{P} -martingale. On note A_t le processus à variation bornée suivant :

$$A_t = \int_0^t \frac{1}{\alpha_s} d\langle \alpha, X \rangle_s.$$

Alors $(X_t - A_t)$ est une \mathbf{Q} martingale.

Preuve : Appliquer la formule de Itô à la fonction $f(x, a, \alpha) = \alpha(x - a)$.

Application : Soit (X_t) une \mathbf{P} -martingale. On se donne une fonction bornée b . On cherche une mesure \mathbf{Q} telle que $(X_t - \int_0^t b(X_s) d\langle X \rangle_s)$ soit une \mathbf{Q} -martingale.

En pratique, on cherche une densité α telle que

$$\int_0^t b(X_s) d\langle X \rangle_s = \int_0^t \frac{d\langle \alpha, X \rangle_s}{\alpha_s}.$$

On écrit α_t sous la forme

$$\alpha_t = 1 + \int_0^t H_s dX_s.$$

On a alors

$$\langle \alpha, X \rangle_t = \int_0^t H_s d\langle X \rangle_s$$

ce qui induit

$$\frac{H_s}{\alpha_s} = b_s.$$

On obtient donc une équation intégrale sur α :

$$\alpha_t - 1 = \int_0^t b(X_s) \alpha_s dX_s.$$

On remarque alors que si $Y_t = \int_0^t b(X_s) dX_s$, $\alpha_t = \exp(Y_t - \langle Y_t \rangle / 2)$ est solution de cette équation intégrale.

Table des matières

1	Espérance conditionnelle	3
1	Tribus, variables aléatoires, lois	3
2	Conditionnement	4
3	Propriétés	5
2	Martingales	6
1	Martingales en temps discret	6
1.1	Définition, exemples	6
1.2	Temps d'arrêt	7
1.3	Théorème d'arrêt de Doob	8
1.4	Convergence	9
2	Martingales en temps continu	10
2.1	Tribus, filtrations	10
2.2	Les processus càd-làg	10
2.3	Martingales	10
2.4	Temps d'arrêt	11
2.5	Martingales locales	12
2.6	Variation quadratique	12
2.7	Convergence	13
3	Mouvement brownien	14
1	Processus gaussiens	14
1.1	Vecteurs gaussiens	14
1.2	Conditionnement	16
1.3	Convergence des séries gaussiennes	17
2	Mouvement brownien	17
2.1	Introduction	17
2.2	Propriétés	18
2.3	Martingale et temps d'arrêt	19
4	Intégrale stochastique, formule de Itô	21
1	Comment construire une intégrale	22
2	Intégration par rapport au mouvement brownien	23
3	Intégrale stochastique par rapport à une martingale continue	25
4	Généralisations	28
4.1	Processus adaptés quelconques	28
4.2	Martingales locales ou de carré non intégrable	28

4.3	Intégration par rapport à des semi-martingales continues	29
5	Formule de Itô	29
5.1	Énoncé	29
5.2	La formule de Itô pour les semi-martingales	30
5.3	La formule de Itô dans \mathbb{R}^d	30
5.4	Formule de Black et Scholes	31
5.5	Formule de Girsanov	33