Université Claude Bernard Lyon 1
Agrégation interne
Année 2015-2016

Probabilités : fiche n° 1

Exercice 1 : Un sac contient 4 billes noires et 3 billes rouges.

1. On tire au hasard, successivement et sans remise, deux billes successivement.
   (a) Expliciter un espace de probabilité $(\Omega, \mathbf{P})$ permettant de décrire cette expérience *(Cette question peut être reportée à la fin de l'exercice)*.
   (b) Calculer la probabilité que la première bille soit noire.
   (c) Calculer la probabilité que la deuxième bille soit noire sachant que la première l'était, puis la probabilité que la deuxième bille soit noire sachant que la première était rouge.
   (d) En déduire la probabilité que la deuxième bille soit noire.
   (e) Quelle est la probabilité que les deux billes soient de la même couleur ?
   (f) Reprendre la dernière question dans le cas où il n'y a qu'une bille rouge.
2. On procède à des tirages successifs sans remise jusqu'à l'obtention de la première boule rouge. Décrire l'univers Ω et la probabilité dont on le munit permettant de déterminer la probabilité pour que ce numéro de tirage soit un entier fixé.

Exercice 2 : **Le loto**. Pour jouer au loto, il faut cocher 5 cases dans une grille de 49 numéros (de 1 à 49) et choisir un numéro chance parmi 10.

1. Décrire un espace de probabilité permettant de répondre aux questions suivantes.
2. Calculer la probabilité de gagner le gros lot (les 5 bons numéros et le numéro chance=rang 1), la probabilité de gagner les 5 bons numéros mais pas le numéro chance (= rang 2).
3. Calculer successivement les probabilités d'avoir trouvé un, deux, trois, ou quatre des bons numéros.
4. Pour gagner au loto, il faut : soit avoir le numéro chance (et dans ce cas, la mise est remboursée), soit avoir au moins deux numéros gagnants. Calculer la probabilité de gagner.
5. S'il y a un million de joueurs, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un gagnant au rang 1 ?

Exercice 3 : Des urnes. On dispose de trois urnes U_i contenant chacune r_i boules rouges et n_i boules noires. Dans chacun des cas, expliciter l'espace probabilisé utilisé pour répondre aux questions.

1. On choisit au hasard une urne, puis on tire une boule dans l'urne choisie. Cette boule est rouge. Quelles est la probabilité qu'elle vienne de l'urne n°1 ?
2. On choisit au hasard une urne puis on pioche simultanément deux boules dans cette urne. Quelle est la probabilité que les deux boules soient de la même couleur ?
3. On choisit au hasard une urne puis on pioche simultanément deux boules avec remise dans cette urne. Quelle est la probabilité que les deux boules soient de la même couleur ?

Trois paradoxes probabilistes classiques

Exercice 4 : **Le chevalier de Méré**. Antoine Gombaud, chevalier de Méré était un noble à la cour de Louis XIV, grand amateur de jeu de dés. Son problème était le suivant : lorsque l'on joue aux dés, est-il avantageux de parier d'obtenir au moins un 6 en quatre lancers ? Est-il avantageux de parier d'obtenir au moins un double 6 en vingt-quatre lancers de deux dés ?

1. Que signifie le terme « avantageux » dans ce contexte ?
2. Décrire les espaces Ω et les probabilités correspondant à chacune des deux expériences.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un 6 en quatre lancers.
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un double 6 en vingt-quatre lancers.
5. Que conseillez-vous de choisir comme pari au chevalier ?

Le chevalier de Méré avait remarqué que la première probabilité était supérieure à 1/2. Il pensait cela dû au fait que le quotient du nombre de lancers (quatre) par le nombre de résultats possibles (six) était supérieur à 1/2.

En lançant deux dés, il y a trente-six résultats possibles et $24/36 = 4/6$ est supérieur à 1/2. Dans l'idée du Chevalier de Méré, puisqu'il est avantageux de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant le dé quatre fois de suite, il doit être avantageux de miser sur l'apparition d'un double-six en lançant deux dés vingt-quatre fois de suite. C'est Blaise Pascal, avec qui le chevalier de Méré a entretenu une correspondance, qui a effectué le calcul de la deuxième probabilité, détrompant le chevalier de Méré. La réponse de Pascal figure dans une lettre destinée à Fermat.

Exercice 5 : **Le problème du Duc de Toscane**. Ce problème a été posé par le Grand-Duc de Toscane Cosme II (?) de Médicis à Galilée. Lorsque l'on joue aux dés, il y a le même nombre de façons d'écrire 9 et 10 comme somme de trois lancers. Pourtant, le Grand-Duc avait remarqué que l'on obtenait plus souvent 10. Pourquoi ?

Exercice 6 : **Le paradoxe du prisonnier**. Un prisonnier a été condamné à mort, mais le tribunal, dans sa grande bonté, lui accorde une dernière chance : il est face à trois portes, dont deux conduisent au couloir de la mort et la dernière au monde libre.

Si le prisonnier choisit la bonne porte, il est donc libre.

Le prisonnier commence par désigner la porte n°1. Le gardien par compassion, lui indique que, derrière la porte n°2, c'est la mort et propose au prisonnier de changer de porte.

Que lui conseillez-vous de faire ?

Exercice 7 : On répète $n \geq 2$ fois de façon indépendante la même expérience dont l'issue est soit un succès, soit un échec. On notera p la probabilité d'obtenir un succès. On s'intéresse notamment au nombre de succès parmi ces n tentatives.

1. Décrire l'espace de probabilité utilisé.
2. Expliciter la loi du nombre de succès parmi ces n tirages.
3. Déterminer la probabilité pour que le premier succès ait eu lieu au plus tard au tirage numéro k (pour tout $k \leq n$ fixé).
4. En déduire la probabilité pour que le premier succès ait lieu au plus tard au tirage numéro k sachant qu'il y a eu au moins un succès.
5. Calculer l'espérance et la variance du nombre de succès au cours des n tirages.